ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. LÉVISTAL

Recherches d'optique géométrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 4 (1867), p. 195-254

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1867_1_4__195_0>

RECHERCHES
D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE,

PAR M. A. LÉVISTAL,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

PREMIER MÉMOIRE.
SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SYSTÈMES OPTIQUES DE RAYONS RECTILIGNES.

INTRODUCTION.

1. Les premières recherches relatives aux propriétés générales des systèmes formés par les rayons lumineux remontent à l'année 1682, et ont trait aux courbes caustiques. Elles sont dues à Tschirnhausen (*), qui se proposa de trouver l'équation de la caustique par réflexion dans le cas particulier où, les rayons incidents étant parallèles et contenus dans un même plan, la réflexion a lieu sur une circonférence de cercle. Ce problème, qui paraît aujourd'hui fort simple, était alors d'une grande difficulté, et la solution donnée par Tschirnhausen fut reconnue fausse par Cassini, Mariotte et de la Hire, commissaires nommés par l'Académie des Sciences. L'attention des géomètres se trouva dès lors appelée sur ce genre de questions, dont ils ne tardèrent pas à apprécier toute l'importance pour l'optique. Les Bernoulli, Carré, de l'Hôpital et plusieurs autres mathématiciens, indiquèrent des méthodes générales pour obtenir l'équation des caustiques planes par réflexion et par réfraction, quelle que soit la nature de la courbe réfléchissante ou réfringente. A une époque plus récente, la théorie des caustiques

(*) TSCHIRNHAUSEN, *Inventa nova, etc.*, *Acta eruditorum*, année 1682, p. 364.

planes a été notablement perfectionnée par M. Quetelet, qui a montré que, dans un grand nombre de cas, ces caustiques, quoique fort compliquées par elles-mêmes, ne sont que les développées d'autres courbes beaucoup plus simples, qui sont en général des épicycloïdes (*).

2. Malus est le premier qui ait considéré les systèmes de rayons dans l'espace. C'est dans un Mémoire sur l'optique, publié en 1810 (**), qu'il démontra, au moyen d'une analyse assez laborieuse, le théorème fondamental qui porte souvent son nom. Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante : *Lorsque tous les rayons qui composent un faisceau lumineux sont normaux à une même surface, ils conservent cette propriété après un nombre quelconque de réflexions sur des surfaces quelconques, et un nombre quelconque de réfractions par leur passage à travers des milieux limités jouissant de pouvoirs réfringents quelconques.* Une erreur de calcul avait conduit Malus à refuser à cette proposition toute la généralité qu'elle comporte, et à la restreindre au cas d'une réflexion ou d'une réfraction unique. M. Charles Dupin reconnut, en 1822, que le théorème de Malus s'étend à un nombre quelconque de réflexions et de réfractions, et substitua, pour le cas de la réflexion, une démonstration géométrique fort simple aux considérations analytiques dont Malus avait fait usage (***). Timmermans (****) et, d'après lui, Gergonne (*****), traitèrent d'une manière analogue le cas de la réfraction.

L'importance du théorème de Malus, qui n'est applicable, du reste, qu'aux milieux isotropes, et sa relation avec la théorie des caustiques sont faciles à concevoir. Si, en effet, un système de rayons lumineux peut être considéré comme formé de droites normales à une même surface, il en résulte immédiatement que le lieu des intersections de ces rayons, c'est-à-dire la surface caustique, n'est autre que la surface à deux nappes, lieu des centres de courbure de cette trajectoire ortho-

(*) QUETELET, Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, soit par réflexion, soit par réfraction, *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III, p. 15.

(**) MALUS, Mémoire sur l'Optique, *Journal de l'École Polytechnique*, XIV^e Cahier, p. 1.

(***) CH. DUPIN, *Développements de Géométrie;* 4^e Mémoire : Sur les routes suivies par la lumière dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction, p. 187.

(****) TIMMERMANS, *Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 336.

(*****) GERGONNE, Démonstration purement géométrique du principe fondamental de la théorie des caustiques, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, p. 307.

gonale des rayons; la théorie des caustiques se trouve ainsi rattachée par un lien intime à celle de la courbure des surfaces.

3. Les géomètres dont nous venons de parler s'étaient occupés exclusivement des milieux isotropes. Les systèmes de rayons qui se propagent dans les milieux de ce genre jouissent, comme nous venons de le voir, de la propriété d'être toujours normaux à une même surface; dans les milieux biréfringents ou anisotropes il n'en est généralement pas ainsi, ce qui a fait donner aux systèmes qui se propagent dans de tels milieux la qualification d'*irréguliers*. L'étude de ces systèmes irréguliers a été abordée pour la première fois par Hamilton dans son traité intitulé *Theory of systems of rays*, et surtout dans un supplément publié en 1830 (*). Dans ces importants Mémoires, Hamilton prend pour point de départ le principe de la moindre action, qui, lorsqu'on l'applique aux phénomènes de l'optique, conduit à la condition

$$\delta \int v\,ds = 0,$$

ds étant l'élément de la trajectoire suivie par le rayon lumineux, v la vitesse de la lumière calculée dans l'hypothèse de l'émission. Il fait dépendre la solution de toutes les questions relatives à la réflexion et à la réfraction, ordinaire ou extraordinaire, de l'existence d'une *fonction caractéristique* pour chaque système optique de rayons. Cette fonction est définie en général de la manière suivante :

$$V = \int v\,ds = f(x, y, z, x', y', z', \psi).$$

x, y, z sont les coordonnées du point final d'une trajectoire lumineuse, x', y', z' celles du point initial, ψ une constante qui dépend de la couleur. Ce qui distingue les recherches d'Hamilton au sujet de cette intégrale, c'est qu'il la regarde comme dépendant des coordonnées variables des deux extrémités du rayon et de la couleur, tandis que, dans l'énoncé du principe de la moindre action, ces coordonnées extrêmes et la couleur sont considérées comme constantes, et les points intermé-

(*) HAMILTON, Theory of Systems of Rays, *Transactions of the Irish Academy*, t. XV, p. 69, et t. XVI, p. 1 et 94.

diaires où s'effectue la réflexion ou la réfraction sont seuls supposés varier. Hamilton, dans le Rapport qu'il fit sur ses travaux à l'Association Britannique (*), fait remarquer que la fonction caractéristique V, dans l'hypothèse des ondulations, représente *le temps de la propagation de la lumière d'un point à un autre*. Mais il se borne à indiquer ce point de vue sans en tirer autrement parti, ce qui s'explique aisément par le peu de faveur dont jouissait encore en Angleterre à cette époque la théorie ondulatoire de la lumière. Hamilton s'occupe du reste presque exclusivement des systèmes réguliers de rayons, et ce n'est qu'accessoirement qu'il parle des modifications introduites dans ces systèmes par leur passage à travers des milieux biréfringents.

4. Les travaux d'Hamilton n'obtinrent pas d'abord toute l'attention qu'ils méritent, et ce n'est qu'après un assez long intervalle que nous voyons M. Kummer revenir, en 1859, sur le même sujet dans un très-remarquable Mémoire qui porte pour titre : *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes* (**). Le célèbre géomètre allemand s'est proposé d'*étudier dans toute leur généralité les propriétés d'un système de droites remplissant l'espace ou une portion de l'espace, de telle manière que, par un point donné, il passe un rayon ou un nombre déterminé de rayons*. Se plaçant à un point de vue purement géométrique, il n'a nullement à s'occuper des changements produits dans la direction des rayons par la réflexion ou la réfraction, ni des relations de ces directions avec le système des ondes lumineuses. De plus, il s'élève à un degré de généralité qui, sans doute, a un intérêt considérable pour la géométrie, mais qui est inutile en optique. Les rayons qui se meuvent dans un milieu homogène quelconque jouissent en effet, de quelque manière qu'ils y aient été introduits, de cette propriété, dont on trouvera plus loin la démonstration, que leur direction a avec celle du plan tangent à la surface de l'onde une liaison déterminée et constante pour un même milieu. Il résulte de là que les systèmes de rayons optiquement réalisables dans un milieu donné ne sont pas quelconques,

(*) *Report of the first and the second meetings of British Association for the advancement of science*, p. 545.

(**) KUMMER, Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme, *Journal de Crelle*, t. LVII, p. 189.

que leur constitution est dans une connexion intime avec celle du milieu, et qu'ils présentent un certain nombre de particularités n'appartenant pas à un système de droites choisies tout à fait arbitrairement.

Les conséquences que comporte la théorie de M. Kummer, lorsqu'on la restreint aux systèmes de rayons optiquement possibles, ont été développées ultérieurement par M. Meibauer (*). Cet auteur s'occupe presque exclusivement des surfaces caustiques; c'est dans son travail que se trouve pour la première fois énoncée d'une façon nette la relation qui, dans un milieu homogène quelconque, existe entre la direction d'un rayon et celle du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon.

5. Le rapide aperçu historique que l'on vient de lire indique suffisamment le genre de questions que je me propose de traiter. Mon but est de simplifier et de généraliser à la fois la démonstration des principes de l'optique géométrique. La méthode à laquelle j'ai recours consiste essentiellement à faire intervenir dans la solution des problèmes qui sont du ressort de cette branche des mathématiques appliquées la considération des ondes lumineuses, et aussi celle du temps employé par la lumière pour se propager d'un point à un autre. Cette manière de procéder offre l'avantage de permettre de prendre pour point de départ, non pas les lois de la réflexion et de la réfraction dans les milieux isotropes, mais le principe général énoncé pour la première fois par Huyghens sous le nom de *principe des ondes enveloppes*, et qui est applicable à toute espèce de milieu homogène. Les théorèmes de l'optique géométrique reçoivent ainsi, par l'introduction de la notion du temps, une forme qui permet d'embrasser, dans un énoncé unique, les propriétés des trajectoires lumineuses dans tous les milieux homogènes, isotropes ou anisotropes.

Le présent Mémoire a pour objet l'étude des propriétés générales des systèmes optiques de rayons rectilignes, c'est-à-dire des systèmes qui se propagent dans un milieu *homogène* quelconque (**). Les prin-

---

(*) MEIBAUER, Theorie der gradlinigen Strahlensysteme des Lichts, Berlin, 1864.

(**) Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été consignés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 10 septembre 1866. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIII, p. 458.

cipes qui y sont exposés recevront ultérieurement leur application dans d'autres Mémoires consacrés aux surfaces aplanétiques et aux surfaces caustiques. Les résultats acquis pour les milieux homogènes peuvent du reste facilement s'étendre aux milieux hétérogènes, ceux-ci pouvant toujours être considérés comme formés par la juxtaposition d'une infinité de couches homogènes infiniment minces.

I. — *Définitions et notations.*

6. Soit, dans un milieu homogène quelconque, un centre d'ébranlement dont émane de la lumière homogène : le lieu des points auxquels se communique le mouvement vibratoire, au bout d'un temps donné, constitue une certaine surface; comme suivant chacune des directions qui partent du point lumineux la vitesse de propagation de ce mouvement est constante, les surfaces qui correspondent à des temps différents sont toutes semblables et semblablement placées par rapport au point lumineux. Le milieu étant homogène, la forme de ces surfaces et leur orientation dans le milieu sont indépendantes de la position du point dont émane la lumière. Chacune d'elles a évidemment pour centre le point lumineux auquel elle se rapporte; d'ailleurs, la vitesse de la lumière ne pouvant devenir infinie suivant aucune direction, ce sont des surfaces fermées. Nous les appellerons *surfaces d'onde caractéristiques du milieu*. Il est clair, en effet, qu'un milieu homogène est optiquement défini, du moins pour une couleur déterminée, lorsqu'on connaît le lieu des points auxquels un mouvement vibratoire correspondant à cette couleur et émané d'un point quelconque du milieu se communique au bout d'un temps donné. Connaissant une quelconque des surfaces d'onde caractéristiques d'un milieu homogène, par exemple celle qui a pour centre un point pris pour origine et qui correspond à l'unité de temps, il est facile de trouver toutes les autres; pour qu'une de ces surfaces soit déterminée, il suffit alors de donner son centre et le temps auquel elle correspond.

Pour que deux milieux homogènes soient identiques au point de vue optique (en ne considérant toujours que la lumière d'une couleur déterminée), il faut et il suffit que les surfaces d'onde caractéristiques de ces deux milieux correspondant à un même temps, par exemple à l'unité de temps, soient identiques. Il est cependant à remarquer que, deux milieux homogènes étant optiquement identiques, la lumière peut néanmoins éprouver un changement de direction en passant de l'un dans l'autre; c'est ce qui se produira toutes les fois que ces milieux seront placés de façon que les rayons vecteurs homologues des surfaces d'onde caractéristiques ne soient pas parallèles, comme cela a lieu lorsqu'on superpose deux lames d'un même cristal taillées suivant des plans différents. Pour que deux milieux homogènes puissent être considérés comme formant un tout continu, il faut donc et il suffit : 1° que les surfaces d'onde caractéristiques correspondant à l'unité de temps soient identiques; 2° que les rayons vecteurs homologues de ces surfaces soient parallèles. Pour les milieux homogènes isotropes, les surfaces d'onde caractéristiques étant toujours sphériques, la première condition est suffisante.

Les milieux homogènes dont les surfaces d'onde caractéristiques correspondant à l'unité de temps, sans être identiques, sont semblables, constituent un groupe et jouissent d'un certain nombre de propriétés communes : tel est, par exemple, le groupe des milieux homogènes isotropes dont les surfaces d'onde caractéristiques, correspondant à l'unité de temps, sont toutes des sphères, mais de rayons différents.

7. Les surfaces d'onde caractéristiques d'un milieu homogène ont une ou plusieurs nappes, suivant que, sur chaque direction, le mouvement lumineux peut se propager dans ce milieu avec une vitesse unique ou avec plusieurs vitesses différentes; les milieux dont les surfaces d'onde caractéristiques n'ont qu'une nappe sont dits *uniréfringents;* ceux où ces surfaces ont deux nappes sont dits *biréfringents*. A un autre point de vue, on distingue les milieux *isotropes,* c'est-à-dire ceux dans lesquels la lumière se propage avec la même vitesse dans toutes les directions, et les milieux *anisotropes*, dans lesquels la vitesse de propagation de la lumière varie avec la direction. Le calcul et l'expérience s'accordent à montrer, si l'on ne tient compte que des vibrations transversales, qui seules paraissent aptes à produire l'impression lumineuse, que tout milieu homogène non isotrope est nécessairement biré-

fringent. Dans les milieux homogènes isotropes ou uniréfringents, les surfaces d'onde caractéristiques sont évidemment des sphères. Quant aux milieux anisotropes ou biréfringents, l'optique physique nous apprend qu'ils se divisent en deux classes. Pour les uns, les surfaces d'onde caractéristiques sont formées d'une nappe sphérique et d'une nappe présentant la forme d'un ellipsoïde de révolution, ces deux nappes s'enveloppant l'une l'autre et se touchant aux extrémités de l'axe de la nappe ellipsoïdale : ce sont les milieux *uniaxes*. Pour les autres, les surfaces d'onde caractéristiques sont des surfaces du quatrième degré indécomposables en surfaces du second degré : ce sont les milieux *biaxes*. Remarquons dès à présent que les milieux uniaxes peuvent être considérés comme isotropes relativement aux rayons qui correspondent à la nappe sphérique et qu'on nomme *rayons ordinaires*. Tous les théorèmes démontrés pour les milieux isotropes sont donc applicables aux milieux biréfringents uniaxes, lorsqu'on se borne à considérer dans ces derniers milieux les rayons ordinaires.

8. Nous représenterons par

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface d'onde caractéristique d'un milieu homogène ayant pour centre l'origine des coordonnées et correspondant à l'unité de temps. Celle de la surface d'onde caractéristique ayant pour centre l'origine et correspondant au temps T sera, par suite,

$$f\left(\frac{x}{T}, \frac{y}{T}, \frac{z}{T}\right) = 0.$$

Lorsque cette dernière équation sera supposée résolue par rapport à T, nous l'écrirons

$$\varphi(x, y, z) = T.$$

L'équation de la surface d'onde caractéristique ayant pour centre un point dont les coordonnées sont (a, b, c) et correspondant au temps T sera

$$f\left(\frac{x-a}{T}, \frac{y-b}{T}, \frac{z-c}{T}\right) = 0,$$

ou

$$\varphi(x-a, y-b, z-c) = T.$$

S'il y a lieu de considérer deux milieux différents, nous donnerons au signe de la fonction f ou φ l'indice 1 pour le milieu où se propagent les rayons incidents et réfléchis, l'indice 2 pour le milieu où se meuvent les rayons réfractés. Lorsqu'il s'agira d'un milieu biréfringent, les indices o ou e ajoutés au signe de la fonction serviront à distinguer les deux nappes des surfaces d'onde caractéristiques.

Quand nous parlerons de réflexion et de réfraction, nous supposerons toujours implicitement que la surface de séparation où s'opère le changement de direction des rayons est continue, c'est-à-dire qu'en chaque point de cette surface on ne peut lui mener qu'un seul plan tangent. Cette restriction est essentielle, car la plupart des théorèmes auxquels nous serons conduits cessent d'être vrais lorsque la surface de séparation est formée de plusieurs portions de surfaces se coupant sous des angles différents de zéro, lorsque, par exemple, cette surface est polyédrique. Le cas où la surface de séparation présente un ou plusieurs points saillants doit également être réservé.

9. Nous désignerons, pour abréger, les rayons ordinaires par le signe (o), les rayons extraordinaires par le signe (e). Lorsque la lumière passe d'un milieu biréfringent dans un autre milieu également biréfringent il y a en général quatre espèces de rayons réfractés : nous désignerons par le signe (o, o) ceux qu'on obtient en prenant dans les deux milieux les nappes ordinaires des surfaces d'onde caractéristiques, les trois autres espèces de rayons réfractés seront désignées d'une manière analogue par les symboles (e, e), (o, e), (e, o), la première lettre se rapportant toujours au premier milieu, c'est-à-dire à celui dans lequel se meuvent les rayons incidents. On sait d'ailleurs que la construction qui donne certains de ces rayons réfractés peut devenir impossible, et leur nombre se réduire à 3, à 2, à 1, et même à zéro. Lorsque la lumière émanée d'un point situé dans un milieu biréfringent subit une réflexion, il y a lieu également de distinguer quatre espèces de rayons réfléchis que nous désignerons par les mêmes notations que dans le cas de la réfraction. Mais ici il faut remarquer que les rayons réfléchis (o, o) et (e, e) existent toujours, tandis que la construction qui donne les rayons réfléchis (o, e) ou (e, o) peut devenir impossible. Il y a d'ailleurs une distinction essentielle à faire entre les rayons réfléchis (o, o) et (e, e)

d'une part, et les rayons réfléchis (o, e) et (e, o) de l'autre. Pour les rayons du premier groupe, c'est la même nappe de la surface d'onde caractéristique du milieu qui correspond aux rayons incidents et aux rayons réfléchis; pour ceux du second groupe, ce sont deux nappes différentes. Il en résulte, comme cela est aisé à concevoir, que cette dernière espèce de réflexion offre plus d'analogie avec la réfraction qu'avec la réflexion proprement dite. Nous dirons qu'il y a *réflexion homologue* lorsque les rayons incidents et les rayons réfléchis correspondent à une même nappe de la surface d'onde caractéristique du milieu, et qu'il y a *réflexion antilogue* dans le cas contraire. Les rayons (o, o) et (e, e) sont donc des rayons qui ont subi une réflexion homologue, tandis que les rayons (o, e) et (e, o) ont éprouvé une réflexion antilogue. Dans les milieux uniréfringents, la réflexion est nécessairement toujours homologue.

10. Lorsque les directions des rayons incidents qui, dans un milieu homogène, tombent sur une surface réfléchissante ou réfringente concourent en un même point situé *en deçà* de cette surface, ce point, qu'il soit ou non celui d'où provient la lumière, portera le nom de *point lumineux réel;* si le point de concours des rayons incidents est situé *au delà* de la surface réfléchissante ou réfringente, nous dirons, pour abréger le langage, que ces rayons émanent d'un *point lumineux virtuel.* Quant tous les rayons réfléchis ou réfractés qui se propagent dans un milieu homogène sont dirigés de façon que ces rayons ou leurs prolongements convergent en un même point, nous nommerons ce point *foyer total.* Si parmi les rayons réfléchis ou réfractés qui se meuvent dans un milieu homogène il y en a une infinité, formant une surface conique, qui, par eux-mêmes ou par leurs prolongements, concourent en un même point, ce point s'appellera *foyer partiel.* Dans le cas de la réflexion, un foyer total ou partiel sera dit *réel* s'il est en deçà de la surface réfléchissante, *virtuel* s'il est au delà; dans le cas de la réfraction, ce sera l'inverse. S'il existe une série de foyers partiels formant une ligne continue, cette ligne recevra la dénomination de *ligne focale.*

11. Nous terminerons ces considérations préliminaires par quelques remarques importantes relatives aux ondes.

Lorsque les rayons qui se meuvent dans un milieu homogène ne sont pas issus d'un point situé dans ce milieu, ou quand, bien qu'émanant d'un point du milieu, ils ont subi une ou plusieurs réflexions, le lieu des points atteints au même instant par le mouvement vibratoire qui se propage suivant ces rayons porte encore le nom de *surface d'onde*. Mais, et c'est là un point sur lequel on ne saurait trop insister, ces ondes réfléchies ou réfractées n'ont pas en général, ainsi que nous le ferons voir plus loin, la forme des surfaces d'onde caractéristiques du milieu dans lequel elles se propagent et ne constituent plus nécessairement un système de surfaces semblables et concentriques; dans un milieu isotrope, par exemple, ces ondes ne sont sphériques que dans des cas très particuliers.

Soit un système de rayons issus originairement d'un point lumineux situé dans un milieu homogène, et se propageant actuellement, soit dans ce milieu, soit dans tout autre milieu homogène, ces rayons pouvant avoir subi un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, mais n'ayant eu à traverser que des milieux homogènes : l'onde qui correspond à ces rayons peut avoir plusieurs nappes, même lorsque le milieu dans lequel ils se meuvent actuellement est isotrope; c'est ce qui arrivera en général si ces rayons ont eu à traverser antérieurement des milieux biréfringents. A plus forte raison l'onde a-t-elle plusieurs nappes quand les rayons se propagent actuellement dans un milieu biréfringent. Il est essentiel, d'après cela, pour donner de la précision aux théorèmes que nous aurons à énoncer, de grouper les rayons qui, issus originairement d'un même point lumineux, se propagent dans un milieu homogène quelconque en systèmes tels qu'*aux rayons d'un même système correspondent des ondes dont chacune soit formée d'une nappe unique et continue*. Nous appellerons *rayons de même espèce* ceux qui font partie d'un tel système.

Pour que des rayons, issus originairement d'un même point, n'ayant eu à traverser que des milieux homogènes et se propageant actuellement dans un tel milieu, soient de même espèce, il faut et il suffit évidemment, d'après la définition que nous venons de donner :

1° Que, si le milieu où se trouve le point lumineux est biréfringent, ces rayons soient tous originairement *de même nature*, c'est-à-dire tous ordinaires ou tous extraordinaires;

2° Qu'ils aient subi les mêmes réflexions et les mêmes réfractions sur les mêmes surfaces dans le même ordre, et, par conséquent, traversé les mêmes milieux homogènes;

3° Que, dans chacune de ces réflexions ou de ces réfractions, ces rayons aient, ou tous conservé leur nature, c'est-à-dire leur qualité d'ordinaire ou d'extraordinaire, ou tous changé à la fois de nature.

Il faut se garder de confondre la dénomination de rayons de même espèce avec celle de rayons de même nature : des rayons peuvent être de même nature, c'est-à-dire tous ordinaires ou tous extraordinaires relativement au milieu dans lequel ils se meuvent, sans pour cela être de même espèce; des rayons de même espèce sont nécessairement de même nature.

12. Considérons enfin un système de rayons de même espèce se propageant dans un milieu homogène quelconque; désignons par S l'onde formée d'une nappe unique et continue qui, à un certain instant, correspond à ces rayons, et par R un quelconque des rayons du système. Le rayon R peut rencontrer l'onde S en plus d'un point; mais, *parmi les points d'intersection du rayon* R *avec l'onde* S, *il y en a toujours un, et un seul, où le mouvement vibratoire est parvenu sur le rayon* R *à l'instant considéré,* et c'est toujours ce point que nous entendrons désigner quand nous parlerons du point où le rayon R rencontre l'onde S. Cette remarque ne doit pas être perdue de vue, car ce que nous aurons à dire de ce point ne sera nullement applicable aux autres points d'intersection du rayon R avec l'onde S, s'il en existe plus d'un. On voit, de plus, que, toutes les fois qu'une onde S est rencontrée en plus d'un point par un rayon R du système auquel elle correspond, tous ces points, sauf celui où le mouvement vibratoire est parvenu sur le rayon R à l'instant considéré, sont nécessairement des points d'intersection du rayon R avec d'autres rayons du système.

II. — *Principe de Huyghens ou des ondes enveloppes. — Construction générale des ondes réfléchies et réfractées.*

13. Les seules notions que l'optique géométrique ait à emprunter à la théorie mécanique des ondes sont :

1° La connaissance de la forme des surfaces d'onde caractéristiques des différents milieux homogènes;

2° Le théorème connu sous le nom de *principe de Huyghens* ou *principe des ondes enveloppes* (*).

Il importe, avant tout, de bien préciser la signification et la portée de ce principe fondamental, dont nous ne ferons, pour ainsi dire, que développer les conséquences dans tout ce qui va suivre.

Plaçons-nous d'abord dans le cas le plus simple, celui où la lumière émanée d'un point situé dans un milieu homogène indéfini se propage dans ce milieu sans subir de réflexion ni de réfraction. Soit O le point lumineux; désignons par S la position occupée par l'onde émanée du point lumineux au bout du temps T, par S′ la position de cette même onde au bout du temps $T + t$. Les surfaces S et S′ sont des surfaces d'onde caractéristiques du milieu; elles sont donc semblables et semblablement placées par rapport au point lumineux O. Il suit de là que l'onde S′ peut être regardée comme l'enveloppe des surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites des différents points de l'onde S comme centres et correspondant au temps t; ces surfaces d'onde caractéristiques sont ce que Huyghens appelle les *ondes élémentaires*. On voit de plus que, pour avoir la direction du rayon qui passe par un point quelconque A de l'onde S′, il suffit de joindre ce point au centre de l'onde élémentaire qui touche en A l'onde S′. Il est bien entendu que, si le milieu est biréfringent, on doit prendre pour onde élémentaire l'une ou l'autre des nappes de la surface d'onde caractéristique du milieu, suivant qu'il s'agit de la propagation des rayons ordinaires ou des rayons extraordinaires. Les résultats que nous venons d'énoncer s'expriment sous une autre forme en disant que, pour étudier la propagation de l'onde postérieurement au temps T, on peut supposer le point lumineux O supprimé, à condition de considérer chacun des points de l'onde S comme un centre d'ébranlement, mais de ne regarder chacune des ondes élémentaires émanées des différents points de la surface S comme n'étant active qu'au point où elle touche l'enveloppe commune. Tant qu'on se borne au cas simple de la propagation de la lumière dans un même milieu homogène, le principe de Huyghens n'est que l'expression d'une identité, et il n'est pas besoin de démonstration spéciale pour faire voir qu'il ne peut y avoir à un

(*) HUYGHENS, *Traité de la lumière*, Leyde, 1690.

instant donné de mouvement sensible sur chacune des ondes élémentaires qu'au point où elle touche l'onde enveloppe. Mais Huyghens ne s'est point arrêté là : par une sorte d'intuition il est arrivé à généraliser le principe des ondes enveloppes et à le faire servir à la construction des ondes réfléchies et réfractées. Le principe, conçu dans toute son extension, peut s'énoncer comme il suit : *Que les différents points d'une surface soient atteints successivement ou simultanément par le mouvement vibratoire émané d'un point lumineux, l'onde, à un instant quelconque, est toujours l'enveloppe des ondes élémentaires émanées des différents points de la surface et considérées dans la position qu'elles occupent à ce moment; de plus, le rayon qui passe par un point quelconque de l'onde passe aussi par le centre de l'onde élémentaire qui touche en ce point l'onde enveloppe.* La surface dont il s'agit peut être, soit une surface d'onde, soit une surface réfléchissante ou réfringente, et, par suite, les ondes élémentaires peuvent correspondre à des temps égaux ou inégaux. Pris dans cette acception générale, le principe de Huyghens est loin d'être évident par lui-même, comme cela a lieu dans le cas où l'onde se propage dans un même milieu homogène sans se réfléchir ni se réfracter. Il ne suffit pas, comme l'a fait Huyghens, et après lui Young et beaucoup d'autres auteurs, de remarquer que les ondes élémentaires se serrent de plus en plus à mesure que l'on se rapproche de l'onde enveloppe : tant que l'on ne fait pas intervenir la notion des interférences, on peut bien démontrer que, sur chaque onde élémentaire, à une distance finie de l'enveloppe commune, le mouvement vibratoire est très-petit par rapport à ce qu'il est sur l'enveloppe, mais non pas qu'il est infiniment petit (*). Ce n'est que par les travaux de Fresnel qu'il a été prouvé rigoureusement que les ondes élémentaires se détruisent par interférence, en tous les points qui ne font point partie de l'enveloppe commune, et que l'emploi du principe de Huyghens s'est trouvé justifié dans tous les cas.

14. Prenons donc ce principe pour point de départ, et, avant de passer à la construction générale des ondes réfléchies ou réfractées,

---

(*) C'est ce que M. Verdet a prouvé par l'analyse dans les premières leçons du Cours d'optique supérieure professé à la Sorbonne en 1865.

appliquons-le à la solution d'un problème qui se présentera constamment à nous par la suite. Soit donnée une onde S correspondant à un système de rayons de même espèce et se propageant dans un milieu homogène; cette onde, comme nous l'avons déjà fait remarquer, n'aura pas en général la forme des surfaces d'onde caractéristiques du milieu où elle se propage, parce que les rayons pourront ne pas être issus d'un point situé dans ce milieu, et que, même lorsqu'ils émanent d'un point situé dans ce milieu, ils pourront avoir subi une ou plusieurs réflexions. Il s'agit, la position de l'onde S étant connue à un certain instant, de trouver la position de cette même onde au bout d'un temps T positif ou négatif, c'est-à-dire à une époque postérieure ou antérieure de T à l'instant considéré, en supposant que, pendant ce temps T, l'onde ne subisse ni réflexion ni réfraction. D'après le principe des ondes enveloppes, il suffira, à cet effet, de décrire de chacun des points de la première onde comme centre une surface d'onde caractéristique du milieu correspondant au temps T; si le milieu est biréfringent, on prendra la nappe ordinaire ou la nappe extraordinaire de la surface d'onde caractéristique, suivant que les rayons du système sont eux-mêmes ordinaires ou extraordinaires. L'enveloppe des portions des surfaces d'onde caractéristiques ainsi décrites qui se trouvent, si T est positif, en avant de la première onde, si T est négatif, en arrière de cette onde, sera l'onde cherchée. Il pourra se faire que l'onde obtenue au moyen de cette construction soit, en totalité ou en partie, en dehors des limites du milieu; c'est ce que nous exprimerons en disant que cette onde est *virtuelle* en totalité ou en partie. La considération des positions virtuelles de l'onde, c'est-à-dire des positions qu'elle occuperait à des époques antérieures ou postérieures à celles où cette onde passe par ses positions réelles, si le milieu dans lequel elle se meut se continuait au delà des limites qui le séparent des milieux contigus, nous sera d'un grand secours dans la démonstration de plusieurs théorèmes.

Remarquons encore que, d'après la construction que nous venons d'indiquer, toutes les fois que l'onde qui se propage dans un milieu homogène ne coïncide pas avec l'une des surfaces d'onde caractéristiques de ce milieu, les différentes positions qu'elle occupe successivement ne constituent plus un système de surfaces semblables et concentriques.

15. Il est facile de traduire la construction précédente en langage analytique. Désignons, en effet, par

$$(1) \qquad \psi(x', y', z') = 0$$

l'équation de l'onde considérée dans la position qu'elle occupe à un certain moment pris pour origine, et soit

$$f_1(x, y, z) = 0$$

l'équation de la nappe, de même nature que les rayons, de la surface d'onde caractéristique du milieu décrite de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps. L'équation de la surface d'onde caractéristique du milieu, décrite d'un point quelconque (x', y', z') de l'onde primitive comme centre et correspondant au temps T, sera, en ne considérant que celle des nappes de cette surface qui est de même nature que les rayons,

$$(2) \qquad f_1\left(\frac{x-x'}{T}, \frac{y-y'}{T}, \frac{z-z'}{T}\right) = 0.$$

L'onde au bout du temps T est l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (2). Pour obtenir cette enveloppe, il faut, entre les équations (1) et (2), éliminer l'un des trois paramètres variables x', y', z', par exemple z', ce qui donne une équation de la forme

$$(3) \qquad \Phi(x, y, z, x', y', T) = 0,$$

qui ne contient plus que deux paramètres arbitraires x' et y'. Si, entre l'équation (3) et les deux équations qu'on obtient en la différentiant par rapport aux deux variables x' et y', équations qui sont

$$\frac{d\Phi}{dx'} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dy'} = 0,$$

on élimine x' et y', on arrive à une équation de la forme

$$F(x, y, z, T) = 0,$$

qui représente l'onde dans la position qu'elle occupe au temps T.

16. Nous pouvons maintenant aborder le problème général de la

construction des ondes réfléchies ou réfractées. Soient deux milieux homogènes séparés par une surface continue; supposons que, dans l'un de ces milieux, se propage un système de rayons de même espèce, issus originairement d'un point lumineux situé dans ce milieu ou dans tout autre milieu homogène, mais n'ayant eu à traverser que des milieux homogènes. A ce système de rayons correspond un système d'ondes que nous nommerons *ondes incidentes*, et, comme les rayons sont de même espèce, chaque onde incidente est formée d'une nappe unique et continue. Lorsque les rayons incidents viennent à rencontrer la surface de séparation des deux milieux, la lumière se divise, du moins en général, en deux parties, dont l'une rebrousse chemin dans le premier milieu et est dite *réfléchie*, tandis que l'autre pénètre dans le second milieu et est dite *réfractée*.

Ceci posé, considérons l'onde incidente dans une certaine position S, où elle coupe la surface de séparation des deux milieux, et proposons-nous de trouver la position de l'onde réfléchie ou réfractée. Nous ferons encore usage du principe des ondes enveloppes. Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse de l'onde réfractée. Des différents points de la courbe suivant laquelle l'onde S coupe la surface réfringente comme centres on décrira des surfaces d'onde caractéristiques du second milieu correspondant au temps T; on cherchera ensuite l'intersection de l'onde incidente postérieure de τ à l'onde S avec la surface réfringente, et, des différents points de cette courbe comme centres, on décrira des surfaces d'onde caractéristiques du second milieu correspondant au temps $T-\tau$. On donnera à τ toutes les valeurs positives comprises entre zéro et T, et toutes les valeurs négatives comprises depuis zéro jusqu'à une certaine valeur limite pour laquelle l'onde incidente devient tangente à la surface réfringente et cesse de la couper; l'enveloppe des portions situées dans le second milieu des surfaces d'onde caractéristiques ainsi décrites des différents points de la surface réfringente comme centres sera l'onde réfractée au bout du temps T. En d'autres termes, de chaque point de la surface réfringente comme centre on décrit une surface d'onde caractéristique du second milieu correspondant au temps $T-\tau$, τ étant l'intervalle qui s'écoule entre le moment où l'onde incidente passe par la position S prise pour origine, et celui où elle passe par le point considéré, et ce temps τ étant pris positivement ou négativement, suivant que le premier de ces deux moments est antérieur ou postérieur au second; l'enveloppe des portions situées dans le second milieu de toutes ces surfaces d'onde caractéristiques est l'onde réfractée demandée. Une construction absolument semblable à la précédente donne la position de l'onde réfléchie au bout du temps T; mais, dans ce cas, les surfaces d'onde caractéristiques qu'on doit décrire des différents points de la surface réfléchissante comme centres sont celles du premier milieu, et c'est l'enveloppe des portions situées dans le premier milieu de ces surfaces d'onde caractéristiques qui est l'onde réfléchie cherchée.

Pour avoir les directions des rayons réfléchis ou réfractés qui proviennent d'un rayon incident donné, il faut chercher les points où la surface d'onde caractéristique, décrite du point A où ce rayon incident rencontre la surface de séparation comme centre, touche l'enveloppe commune, c'est-à-dire l'onde réfléchie ou réfractée, et joindre ces points au point A. Dans le cas de la réflexion, on obtiendra toujours par cette construction un rayon réfléchi unique si le premier milieu est uniréfringent, mais on pourra en trouver deux si ce milieu est biréfringent. Dans le cas de la réfraction, cette construction ne fournira jamais plus d'un rayon réfracté si le second milieu est uniréfringent, mais pourra en donner deux s'il est biréfringent.

Si le second milieu est biréfringent dans le cas de la réfraction, si le premier milieu est biréfringent dans le cas de la réflexion, l'onde réfléchie ou réfractée aura en général deux nappes, ce qui signifie qu'à un système de rayons incidents de même espèce correspondent alors deux systèmes de rayons réfléchis ou réfractés, qui doivent être considérés comme d'espèce différente.

Il peut arriver que la surface d'onde caractéristique décrite, dans la construction précédente, d'un certain point de la surface de séparation comme centre, ne coupe aucune de celles décrites des autres points de cette surface comme centres, et ne touche pas par conséquent l'enveloppe commune; c'est à ce caractère qu'on reconnaîtra l'impossibilité de la réflexion ou de la réfraction. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une réfraction : si, le second milieu étant uniréfringent, la surface d'onde caractéristique décrite d'un certain point A comme centre ne touche pas l'enveloppe commune, cela indique qu'il n'y a pas réfraction en A, et que, par suite, le rayon incident qui aboutit en A subit en ce point une réflexion totale; si le second milieu est biréfringent, de ce qu'une des nappes de la surface d'onde caractéristique décrite du point A comme centre ne touche pas l'enveloppe commune, il faut conclure qu'il n'y a qu'un seul rayon réfracté; mais lorsqu'aucune des nappes de cette surface ne touche l'enveloppe commune, il y a réflexion totale. Examinons maintenant le cas de la réflexion : si le premier milieu est uniréfringent, chacune des surfaces d'onde caractéristiques touche nécessairement l'enveloppe commune, et, par suite, à chaque rayon incident correspond un rayon réfléchi unique; si le premier milieu est biréfringent, celle des nappes de chacune des surfaces d'onde caractéristiques, qui est de même nature que le rayon incident, touche nécessairement l'enveloppe commune, et, par suite, à chaque rayon incident correspond toujours au moins un rayon réfléchi, qui est le rayon (o, o) ou le rayon (e, e), suivant que le rayon incident est ordinaire ou extraordinaire; mais l'autre rayon réfléchi, le rayon (o, e) ou (e, o), peut manquer, et manque en effet si la nappe de la surface d'onde caractéristique décrite du point d'incidence comme centre, qui est de nature différente de celle des rayons, ne touche pas l'enveloppe commune.

17. La construction générale que nous venons d'exposer permet de trouver l'équation de l'onde réfléchie ou réfractée, considérée dans la position qu'elle occupe au bout d'un temps donné, l'équation qui représente l'onde incidente à un certain moment étant connue.

Soit donnée, en effet, la position de l'onde incidente à un certain moment que nous prendrons pour origine du temps : l'équation de cette onde incidente, dans la position qu'elle occupe au bout d'un temps t, positif ou négatif, compté à partir de cet instant, pourra s'obtenir comme nous l'avons indiqué plus haut (**15**), et cette équation sera de la forme

$$F(x, y, z, t) = 0;$$

soient d'ailleurs

$$f_1(x, y, z) = 0,$$

et

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

les équations des surfaces d'onde caractéristiques du premier et du second milieu décrites de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps, et enfin

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

l'équation de la surface réfléchissante ou réfringente.

Proposons-nous de trouver l'équation de l'onde réfractée, considérée dans la position qu'elle occupe au bout d'un temps T, compté à partir de l'instant pris pour origine. Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de la surface réfringente atteint par l'onde incidente au bout d'un temps positif ou négatif que nous désignerons par θ ; nous aurons

$$F(\xi, \eta, \zeta, \theta) = 0, \tag{1}$$

et

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{2}$$

D'après la construction précédente, il faudra, du point ξ, η, ζ comme centre, décrire la surface d'onde caractéristique du second milieu correspondant au temps $T - \theta$, surface dont l'équation est

$$f_2\left(\frac{x-\xi}{T-\theta}, \frac{y-\eta}{T-\theta}, \frac{z-\zeta}{T-\theta}\right) = 0. \tag{3}$$

L'onde cherchée est l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (3). Pour trouver cette enveloppe, il faudra, en premier lieu, entre les équations (1), (2) et (3), éliminer θ et l'une des trois variables ξ, η et ζ, par exemple ζ, ce qui conduira à une équation ne renfermant plus que deux paramètres variables ξ et η, équation qui sera de la forme

$$\Phi(x, y, z, T, \xi, \eta) = 0.$$

Si, entre cette équation et celles qu'on obtient en la différentiant par rapport aux deux paramètres variables ξ et η, équations qui sont

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = 0,$$

et

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = 0,$$

on élimine les deux variables ξ et η, on arrivera définitivement à une équation de la forme

$$\mathfrak{F}(x, y, z, T) = 0,$$

qui représentera l'onde cherchée.

La marche à suivre pour trouver l'équation de l'onde réfléchie est absolument semblable à celle que nous venons d'indiquer, avec cette seule différence que, dans l'équation (3), la fonction f_2 doit être remplacée par la fonction f_1, qui représente les surfaces d'onde caractéristiques du premier milieu.

Dans le cas particulier où les directions des rayons incidents concourent en un même point lumineux, réel ou virtuel, l'équation de l'onde incidente devient, en désignant par (a, b, c) les coordonnées du point lumineux, et en comptant le temps à partir de l'instant où la lumière part de ce point,

$$f_1\left(\frac{x-a}{t}, \frac{y-b}{t}, \frac{z-c}{t}\right) = 0,$$

et l'équation (1) prend la forme

$$f_1\left(\frac{\xi-a}{\theta}, \frac{\eta-b}{\theta}, \frac{\zeta-c}{\theta}\right) = 0.$$

18. Afin d'éclaircir par un exemple ce qui précède, nous allons faire le calcul de l'onde réfractée dans le cas simple où, les deux milieux étant isotropes, la surface de séparation est plane et les rayons émanent d'un point situé dans le premier milieu. Nous prendrons la surface réfringente pour plan des xy, et la perpendiculaire abaissée du point lumineux sur ce plan pour axe des z. Nous représenterons par c la distance du point lumineux au plan réfringent, et nous désignerons par v et v' les vitesses de la lumière dans le premier et dans le second milieu. Nous prendrons pour origine du temps le moment où la lumière part du point lumineux, et nous nous proposerons de calculer l'équation de l'onde réfractée dans la position qu'elle occupe lorsque le temps T est égal à zéro. Cette position est évidemment virtuelle, mais nous la choisissons parce que c'est celle où l'onde réfractée a la forme la plus simple. Les équations (1), (2) et (3) deviennent, dans le cas particulier où nous nous sommes placés,

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2 = v^2\theta^2, \quad \zeta = 0, \quad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = v'^2\theta^2.$$

En éliminant θ et ζ entre ces trois équations, il vient

$$(A) \qquad v'^2(\xi^2 + \eta^2 + c^2) = v^2[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2];$$

cette dernière équation différentiée par rapport aux deux paramètres variables ξ et η qu'elle contient donne

$$v'^2\xi + v^2(x - \xi) = 0, \quad v'^2\eta + v^2(y - \eta) = 0,$$

d'où

$$\xi = \frac{v^2 x}{v^2 - v'^2}, \qquad \eta = \frac{v^2 y}{v^2 - v'^2},$$

$$x - \xi = -\frac{v'^2 x}{v^2 - v'^2}, \quad y - \eta = -\frac{v'^2 y}{v^2 - v'^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (A), on obtient pour l'onde réfractée cherchée l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{(v'^2 - v^2)}{v'^2} z^2 = \frac{(v'^2 - v^2)}{v^2} c^2$$

qui, en posant

$$\frac{v}{v'} = n,$$

devient

$$x^2 + y^2 + (1 - n^2) z^2 = \frac{(1 - n^2)}{n^2} c^2.$$

On voit immédiatement que les surfaces que peut représenter cette équation, lorsqu'on donne à n différentes valeurs, sont toutes des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe des z, ayant un de leurs foyers au point lumineux et leur centre à l'origine, c'est-à-dire au pied de la perpendiculaire abaissée du point lumineux sur le plan réfringent. L'onde réfractée correspondant à un temps égal à zéro est un ellipsoïde de révolution si n est plus petit que l'unité, c'est-à-dire si le second milieu est moins réfringent que le premier; c'est un hyperboloïde de révolution lorsque le second milieu est plus réfringent que le premier. Si la position du point lumineux par rapport au plan réfringent change, c'est-à-dire si l'on fait varier c, le rapport des axes de la courbe méridienne demeure constant, car ce rapport est égal à $\sqrt{n^2-1}$ ou à $\sqrt{1-n^2}$ suivant que n est supérieur ou inférieur à l'unité : il résulte de là que, si la courbe méridienne est une hyperbole, elle conserve les mêmes asymptotes lorsqu'on fait varier c.

D'après le théorème de Malus, les rayons étant toujours normaux à l'onde dans un milieu isotrope, on voit que, lorsque deux milieux isotropes sont séparés par une surface plane, et que les rayons incidents émanent d'un point lumineux situé dans le premier milieu, les rayons réfractés sont normaux à une surface de révolution du second degré. Pour avoir l'onde réfractée correspondant à un temps quelconque T, il suffit de porter sur chacune des normales à cette surface une longueur égale à $v'T$; la surface qui passe par tous les points ainsi obtenus sera l'onde cherchée.

19. La construction bien connue indiquée par Huyghens pour trouver la direction du rayon réfléchi ou réfracté, connaissant la direction du rayon incident et aussi celle du plan tangent à la surface réfléchissante ou réfringente au point d'incidence, se déduit aisément de la construction générale de l'onde réfléchie ou réfractée. Il suffit pour cela d'imaginer que le rayon incident fasse partie d'un système de rayons parallèles de même espèce, que la surface de séparation soit plane et que cette surface se confonde avec le plan tangent à la surface réfléchissante ou réfringente au point d'incidence, hypothèses qui ne changent en rien la direction du rayon réfléchi ou réfracté. L'onde incidente est alors plane ainsi que l'onde réfléchie ou réfractée. Soient OA le rayon incident, P l'onde plane incidente passant par le point d'incidence A, P′ la position de l'onde plane réfléchie ou réfractée au bout d'un temps égal à l'unité compté à partir du moment où l'onde incidente occupe la position P. L'onde P′ est tangente à celle des nappes de la surface d'onde caractéristique décrite du point A comme centre et correspondant à l'unité de temps, qui est de même nature que les rayons auxquels se rapporte cette onde P′, cette surface d'onde caractéristique étant celle du premier milieu s'il s'agit d'une réflexion, celle du second s'il s'agit d'une réfraction. En joignant le point de contact au point A, on a le rayon réfléchi ou réfracté cherché. Le plan P′ coupe d'ailleurs la surface plane de séparation des deux milieux suivant la même droite que l'onde incidente considérée dans la position qu'elle occupe au bout de l'unité de temps. Pour trouver cette position de l'onde incidente, il suffit évidemment de décrire, du point A comme centre, la nappe, de même nature que les rayons incidents, de la surface d'onde caractéristique du premier milieu correspondant à l'unité de temps, et de mener à la portion de cette nappe qui est comprise dans le second milieu un plan tangent parallèle au plan P; on peut encore, ce qui revient exactement au même, mener à cette nappe, au point où elle est rencontrée par le rayon incident OA prolongé, un plan tangent, plan qui est nécessairement parallèle au plan P.

Nous arrivons ainsi à la construction suivante, qui n'est autre que celle de Huyghens. Du point d'incidence comme centre, on décrit les surfaces d'onde Σ et Σ' caractéristiques du premier et du second milieu et correspondant à l'unité de temps; par le point de rencontre du rayon incident prolongé avec la surface Σ si le premier milieu est uniréfringent, avec celle des nappes de la surface Σ qui est de même nature que lui si, le premier milieu étant biréfringent, le rayon incident est seulement ordinaire ou seulement extraordinaire, on mène un plan tangent à cette surface ou à cette nappe; si, le premier milieu étant biréfringent, le rayon incident est à la fois ordinaire et extraordinaire, on mène par les points où ce rayon prolongé rencontre les deux nappes de la surface Σ des plans tangents à ces nappes. Pour avoir les rayons réfractés, par la droite ou par les droites d'intersection de ce plan tangent ou de ces plans tangents avec le plan tangent à la surface de séparation au point d'incidence, on mène autant de plans tangents qu'il est possible à la portion de la surface Σ' comprise dans le second milieu, et on joint les points de contact au point d'incidence; pour avoir les rayons réfléchis, on mène par les mêmes droites d'intersection autant de plans tangents qu'il est possible à la portion de la surface Σ comprise dans le premier milieu, et on joint les points de contact au point d'incidence.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter les conséquences connues qui résultent de cette construction pour les milieux biréfringents à deux axes, où la surface d'onde caractéristique présente des points singuliers et des plans tangents singuliers. Les phénomènes particuliers qui peuvent alors se produire pour certaines directions du rayon incident ont été étudiés au point de vue théorique par Hamilton et expérimentalement par Lloyd, et constituent ce qu'on est convenu d'appeler *la réfraction conique intérieure ou extérieure.*

III. — *Relations entre la direction du rayon et celle du plan tangent à l'onde. — Généralisation du théorème de Malus.*

20. Soit dans un milieu homogène quelconque un système d'ondes correspondant à un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce. Prenons pour point de départ une de ces ondes, que nous désignerons par Σ, et soient S, S′, S″,... les positions occupées successivement par l'onde qui se propage dans le milieu sans se réfléchir ni se réfracter. Considérons un rayon du système qui rencontre l'onde Σ au point O, les ondes S, S′, S″,... aux points A, A′, A″,....

D'après la construction indiquée plus haut (14) et fondée sur le principe des ondes enveloppes, les ondes S, S′, S″,..., aux points A, A′, A″,... sont respectivement tangentes aux nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites du point O comme centre et correspondant à des temps différents. Ces nappes étant des surfaces semblables et semblablement placées par rapport au point O, et les points A, A′, A″,... se trouvant sur une même droite, les plans tangents à ces nappes aux points A, A′, A″,..., et par suite aussi les plans tangents aux ondes S, S′, S″,... en ces mêmes points, sont parallèles entre eux ; d'où la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsqu'un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, les plans tangents menés aux ondes qui correspondent à ces rayons aux points où ces ondes sont rencontrées par un même rayon, sont parallèles entre eux.*

Il est à remarquer que ce théorème est vrai, quel que soit le nombre des réflexions et des réfractions qu'ont subies les rayons.

21. Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, la direction d'un de ces rayons est déterminée dès qu'on connaît celle du plan tangent mené à l'une des ondes correspondant au système des rayons, au point où elle est rencontrée par ce rayon, et que, de plus, si le milieu est biréfringent, la nature des rayons est donnée. Soit, en effet, à trouver la direction du rayon qui rencontre l'onde S en un certain point A; d'un point quelconque comme centre on décrira la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu correspondant à un temps quelconque, et on mènera à cette nappe un plan tangent parallèle au plan tangent en A à l'onde S: le rayon vecteur qui joint le point de contact au centre de la surface sera parallèle au rayon qui passe par le point A.

Réciproquement, étant donnée la direction d'un des rayons du système et sa nature, il est facile de trouver la direction commune des plans tangents menés aux ondes aux points où elles sont rencontrées par ce rayon. Il suffit pour cela de décrire, d'un point quelconque comme centre, la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu correspondant à un temps quelconque, et de mener un rayon vecteur de cette surface parallèle au rayon donné : le plan tangent à la nappe ainsi décrite au point où elle est rencontrée par le rayon vecteur aura la direction cherchée.

Ces deux constructions, réciproques l'une de l'autre, peuvent être réunies dans l'énoncé suivant :

Théorème II. — *Lorsqu'un système de rayons issus originairement d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, il existe, entre la direction du plan tangent à l'onde qui correspond à ces rayons et la direction du rayon qui passe par le point de contact, une liaison qui est constante dans un même milieu homogène pour des rayons de même nature, et cette liaison est la même que celle qui existe entre la direction du plan tangent à la nappe, de même nature que les rayons, d'une des surfaces d'onde caractéristiques du milieu et la direction du rayon vecteur de cette surface qui passe par le point de contact.*

Nous exprimerons la relation qui, dans un milieu homogène, existe entre la direction d'un rayon et celle du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon, en disant que ces deux directions sont *conjuguées* l'une à l'autre; si le milieu est biréfringent, suivant que le rayon est ordinaire ou extraordinaire, nous dirons que les deux directions sont *conjuguées ordinairement* ou *extraordinairement* l'une à l'autre. Il peut arriver, comme cas particulier, que, dans un milieu biréfringent, les directions des plans conjugués ordinairement et extraordinairement à la direction d'une même droite se confondent : pour cela, il faut et il suffit qu'en décrivant, d'un point quelconque comme centre, les deux nappes d'une surface d'onde caractéristique du milieu, et en menant un rayon vecteur parallèle à cette droite, les plans tangents à ces deux nappes aux points où elles sont rencontrées par ce rayon vecteur, soient parallèles entre eux. Nous exprimerons la relation qui existe entre les directions d'un plan et d'une droite qui sont conjugués à la fois ordinairement et extraordinairement l'un à l'autre, en disant que ces directions sont *doublement conjuguées*. Ainsi, dans un milieu biréfringent à un axe, la direction d'une droite parallèle ou perpendiculaire à l'axe du milieu et celle d'un plan perpendiculaire à cette droite sont doublement conjuguées.

22. Le théorème précédent, dont le théorème de Malus n'est qu'un cas particulier, est la clef de la plupart des questions d'optique géométrique; il joue un rôle important dans la théorie des surfaces caustiques et dans celle des surfaces aplanétiques. Nous allons en développer quelques conséquences immédiates.

Dans les milieux homogènes isotropes ou uniaxes, les surfaces d'onde caractéristiques ne présentant ni points singuliers ni plans tangents singuliers, c'est-à-dire ces surfaces n'étant tangentes en chacun de leurs points qu'à un seul plan, et chacun des plans tangents à ces surfaces ne les touchant qu'en un seul point, à chaque direction donnée pour le rayon est conjuguée une direction unique pour le plan tangent à l'onde, la nature du rayon étant assignée; réciproquement, dans ces milieux, à chaque direction du plan tangent à l'onde est conjuguée une direction unique pour un rayon de nature donnée. Dans les milieux biréfringents à deux axes il en est de même, sauf deux exceptions, qui proviennent de ce que, dans ces milieux, chaque surface d'onde caractéristique présente quatre points singuliers et quatre plans tangents singuliers. Les quatre points singuliers sont ceux où la surface est tangente à un cône au lieu d'être tangente à un plan; ils sont disposés symétriquement deux par deux sur deux droites passant par le centre : nous appellerons les directions de ces deux droites *directions singulières* du milieu. Les plans tangents singuliers sont ceux qui touchent la surface le long d'une courbe au lieu de la toucher en un point unique. Nous allons examiner les particularités qui résultent, pour la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents à deux axes, de l'existence de ces points singuliers et de ces plans tangents singuliers.

23. Soit, dans un milieu biaxe, un rayon faisant partie d'un système de rayons issus d'un même point et de même espèce; si ce rayon se propage parallèlement à l'une des directions singulières du milieu, le théorème II se trouve en défaut et n'est plus suffisant pour déterminer la direction du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que ce plan tangent est parallèle à l'un des plans tangents au cône qui touche la surface d'onde caractéristique du milieu en celui de ses points singuliers qui est situé sur un rayon vecteur parallèle au rayon considéré, et que ce plan tangent reste parallèle à lui-même pendant que l'onde se déplace. En général, l'onde ne présente pas de point singulier au point où elle est rencontrée par un rayon parallèle à l'une des directions singulières du milieu; car, si l'onde en ce point touche une surface d'onde caractéristique du milieu en un de ses points singuliers, il n'en résulte pas qu'elle doive être tangente au cône qui touche en ce point singulier la surface d'onde caractéristique; il suffit que le plan tangent en ce point à l'onde soit aussi tangent à ce cône. La direction du plan tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par un rayon parallèle à l'une des directions singulières du milieu ne peut être en général déterminée d'une manière complète que lorsqu'on connaît les changements de direction et de nature qu'a subis ce rayon avant de se propager suivant la droite qu'il parcourt actuellement.

Il existe cependant un cas tout à fait spécial, où l'on peut affirmer que l'onde présente un point singulier au point où elle est rencontrée par un rayon parallèle à l'une des directions singulières du milieu : c'est celui où ce rayon provient d'une infinité de rayons qui, en se réfractant ou en se réfléchissant, se sont réunis en un seul. Le cône tangent à l'onde au point où elle est rencontrée par ce rayon, a alors ses génératrices parallèles à celles du cône tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu en celui de ses points singuliers qui est situé sur le rayon vecteur parallèle au rayon considéré ; quand l'onde se propage dans le milieu, son point singulier se déplace en suivant une droite parallèle à l'une des directions singulières du milieu.

24. Dans les milieux biréfringents à deux axes, à chaque plan tangent singulier de la surface d'onde caractéristique sont conjugués une infinité de rayons vecteurs, formant une surface conique et allant aboutir aux différents points de la courbe suivant laquelle ce plan touche la surface.

Il est facile de voir, d'après cela, que, si, parmi les rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un tel milieu, il y en a un qui soit parallèle à l'un des rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique du milieu conjugués à un plan tangent singulier, il y aura nécessairement dans le système une infinité d'autres rayons parallèles chacun à l'un des rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique conjugués à ce même plan tangent singulier. Cela est évident quand les rayons émanent directement d'un point lumineux situé dans le milieu ; si, avant de prendre leurs directions actuelles, ils ont subi un certain nombre de réflexions et de réfractions, on peut remarquer que, dans la dernière réflexion ou réfraction, qui a fait prendre à ces rayons leurs directions actuelles, un rayon incident ayant donné naissance à un rayon réfléchi ou réfracté parallèle à l'un des rayons vecteurs dont nous venons de parler, le plan tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point d'incidence comme centre au point où elle est rencontrée par ce rayon réfléchi ou réfracté, touche cette surface suivant une courbe. Donc, d'après la construction de Huyghens, toutes les droites qui joignent les différents points de la portion de cette courbe située dans le milieu au point d'incidence, sont autant de rayons réfléchis ou réfractés provenant du même rayon incident. Ces rayons forment une surface conique, et chaque onde, le long de la courbe suivant laquelle elle est coupée par cette surface conique, est tangente à un même plan, qui est parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu.

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Théorème III. — *Lorsque, dans un milieu homogène biaxe, se propage un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, si l'on peut mener à l'une quelconque des ondes correspondant à ce système un plan tangent parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu, ce plan touche l'onde le long d'une courbe. Les rayons qui passent par les différents points de cette courbe forment une surface conique dont le sommet se trouve sur la surface où ces rayons ont subi la réflexion ou la réfraction qui leur a donné leurs directions actuelles, ou au point lumineux si les rayons émanent directement d'un point situé dans le milieu. Chacun de ces rayons est parallèle à l'un des rayons vecteurs qui, dans la surface d'onde caractéristique du milieu, sont conjugués au plan tangent singulier de cette surface parallèle au plan tangent singulier de l'onde. Enfin, pendant que l'onde se propage dans le milieu, son plan tangent singulier se déplace en restant parallèle à lui-même.*

Il suit de là que, toutes les fois que, dans un milieu biaxe, le plan tangent à l'onde est parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu, la direction du rayon qui passe par le point de contact est indéterminée, en ce sens que ce rayon peut être parallèle à l'un quelconque des rayons vecteurs conjugués à ce plan tangent singulier.

25. Dans un milieu biréfringent à un axe, les deux nappes de la surface d'onde caractéristique du milieu sont tangentes l'une à l'autre en deux points situés sur une droite passant par le centre commun de ces deux nappes et dont la direction est ce qu'on appelle l'axe du milieu. Concevons dans un tel milieu un système de rayons qui, avant la réflexion ou la réfraction qui leur a donné leurs directions actuelles, étaient de même espèce ; à ces rayons correspond un système d'ondes à deux nappes. Si parmi ces rayons il s'en trouve qui soient parallèles à l'axe du milieu, chacun de ces rayons parallèles à l'axe rencontrera évidemment au même point les deux nappes de chaque onde; car, suivant la direction de l'axe, les vitesses ordinaire et extraordinaire de la lumière sont égales entre elles. De plus, en ce point commun, les deux nappes de l'onde doivent être tangentes l'une à l'autre, car en ce point le plan tangent à chacune de ces nappes doit être parallèle au plan tangent mené à la nappe correspondante de la surface d'onde caractéristique du milieu au point où elle est rencontrée par l'axe, plan qui est perpendiculaire à l'axe. Donc :

THÉORÈME IV. — *Lorsque dans un milieu biréfringent à un axe se propage un système de rayons issus d'un même point, et qui, avant de subir la réflexion ou la réfraction qui leur a donné leurs directions actuelles, étaient de même espèce, les deux nappes de chacune des ondes correspondant à ce système de rayons sont tangentes l'une à l'autre au point où elles sont rencontrées par tout rayon parallèle à l'axe du milieu, et le plan tangent commun en ce point aux deux nappes de l'onde est perpendiculaire à l'axe.*

26. Dans les milieux isotropes, les rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique sont tous normaux à cette surface, qui est sphérique. Dans les milieux biréfringents à un axe, il en est de même si l'on se borne à considérer la nappe ordinaire de la surface d'onde caractéristique. Cette remarque nous permet de déduire du théorème II le théorème suivant, qui n'est autre que celui de Malus :

THÉORÈME V. — *Lorsque dans un milieu homogène isotrope se propage un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, ou lorsque dans un milieu homogène uniaxe se propage un système de rayons ordinaires issus d'un même point et de même espèce, ces rayons sont toujours normaux à l'onde qui leur correspond, considérée dans une quelconque des positions qu'elle occupe successivement.*

Le théorème de Malus se trouve généralisé dans cet énoncé, en ce sens que les rayons, avant de pénétrer dans le milieu où ils se meuvent actuellement, peuvent avoir traversé des milieux homogènes quelconques, anisotropes aussi bien qu'isotropes, et avoir subi dans ces milieux des réflexions en nombre quelconque, sans que le théorème cesse d'être applicable.

Le théorème V nous conduit au corollaire suivant : les ondes correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un milieu isotrope forment un système de surfaces telles, que toute droite normale à l'une d'elles est en même temps normale à toutes les autres; c'est ce qu'on est convenu d'appeler des *surfaces parallèles*. Il en est de même dans un milieu biréfringent à un axe pour les ondes ordinaires. Si l'on considère, au contraire, un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, extraordinaires dans un milieu biréfringent à un axe, ordinaires ou extraordinaires dans un milieu biréfringent à deux axes, on voit que ces rayons, sauf quelques directions particulières, ne sont plus normaux aux ondes, et que celles-ci par conséquent ne constituent plus des surfaces parallèles, du moins dans le sens qu'on attache le plus souvent à cette expression. Ces ondes ont bien leurs plans tangents parallèles en des points situés sur une même droite, mais les droites qui passent par les points de contact des plans tangents parallèles ne sont pas en général normales aux ondes.

La réciproque du théorème V est vraie : si, en effet, dans un milieu homogène peut se propager un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, *non parallèles entre eux*, qui soient tous normaux aux ondes qui leur correspondent, il faudra en conclure que les rayons vecteurs de la surface d'onde caractéristique du milieu, ou du moins de la nappe de cette surface qui correspond aux rayons, sont tous normaux à cette surface ou à cette nappe, qui, par suite, ne peut être que sphérique. Donc :

Théorème VI. — *Lorsque dans un milieu homogène peut se propager un système de rayons issus d'un même point et de même espèce, non parallèles entre eux, qui soient tous normaux aux ondes qui leur correspondent, ce milieu est isotrope ou biréfringent à un axe, et, dans ce dernier cas, les rayons sont nécessairement ordinaires.*

Si les rayons du système sont tous parallèles entre eux, de ce qu'ils sont perpendiculaires aux ondes qui leur correspondent, il n'est pas permis de conclure que le milieu est isotrope, ni même uniaxe. Il en résulte seulement que le rayon vecteur de la nappe, de même nature que les rayons, de la surface d'onde caractéristique du milieu, mené parallèlement à la direction commune des rayons, est normal à cette nappe, ce qui peut avoir lieu pour certaines directions du rayon vecteur même dans les milieux biaxes.

27. Du théorème II et des différentes propositions que nous en avons déduites comme corollaires nous pouvons tirer cette conclusion, qui résume tous les développements précédents : si, dans un milieu homogène, les ondes qui correspondent à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce ne présentent pas nécessairement, lorsque ces rayons avant de prendre leurs directions actuelles ont eu à subir un certain nombre de réflexions et de réfractions, la forme des surfaces d'onde caractéristiques du milieu, du moins la nature de ces surfaces d'onde caractéristiques imprime, pour ainsi dire, un cachet spécial à toutes les ondes qui peuvent se propager dans le milieu, surtout en ce qui concerne les relations entre les directions des rayons et celles des plans tangents aux ondes, et certaines particularités de ces surfaces d'onde caractéristiques se trouvent reproduites sur toutes les ondes qui peuvent cheminer dans le milieu.

28. Nous allons maintenant mettre en évidence plusieurs conséquences du théorème II relatives au cas où les rayons qui se propagent dans un milieu homogène sont parallèles entre eux. Remarquons d'abord que, dans un milieu homogène quelconque, en vertu de la construction indiquée précédemment (14), une onde plane, quelle que soit sa direction, reste toujours en se déplaçant plane et parallèle à elle-même. Ceci posé, nous pouvons énoncer les deux propositions suivantes :

Théorème VII. — *Si les rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque sont tous parallèles entre eux, l'onde qui correspond à ces rayons est plane dans chacune des positions qu'elle occupe successivement et se propage en restant parallèle à elle-même.*

En effet, d'après le théorème II, les rayons étant parallèles, le plan tangent à l'onde doit avoir la même direction en tous les points de cette onde, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'onde est plane. La direction de l'onde plane est toujours conjuguée à la direction commune des rayons parallèles, ordinairement ou extraordinairement, suivant que ces rayons sont eux-mêmes ordinaires ou extraordinaires. Par suite, si le milieu est isotrope ou s'il est uniaxe, les rayons étant ordinaires, le plan de l'onde est toujours perpendiculaire aux rayons parallèles.

Mais, de ce que l'onde plane est perpendiculaire aux rayons parallèles, on peut conclure uniquement que le rayon vecteur de la surface d'onde caractéristique du milieu qui est parallèle à ces rayons est normal à celle des nappes de cette surface qui est de même nature que les rayons; par suite, si le milieu est isotrope ou s'il est uniaxe, les rayons étant ordinaires, ces rayons peuvent avoir une direction quelconque; mais si le milieu est uniaxe et les rayons extraordinaires, ils sont nécessairement parallèles ou perpendiculaires à l'axe du milieu, et si le milieu est biaxe, ils sont nécessairement parallèles à l'un des trois axes de symétrie du milieu.

Le théorème VII souffre une exception très-particulière à la vérité, mais que nous ne devons pas omettre de signaler : cette exception se présente dans le cas où, le milieu étant biaxe, les rayons sont parallèles à l'une des directions singulières du milieu: dans ce cas, comme nous l'avons vu (23), la direction du plan tangent à l'onde peut varier, celle du rayon restant constante, et, par suite, bien que les rayons soient parallèles entre eux, l'onde qui leur correspond n'est plus nécessairement plane.

Théorème VIII. — *Si, dans un milieu homogène quelconque, l'onde correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce est plane dans une quelconque des positions qu'elle occupe successivement, tous ces rayons sont parallèles entre eux.*

En effet, la direction du plan tangent à l'onde étant constante aux différents points de cette onde, il doit en être de même de la direction des rayons qui passent par ces points.

Ce théorème est soumis, comme le précédent, à une exception. Si, dans un milieu biaxe, il se propage une onde plane parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu, cette onde reste bien parallèle à elle-même en se déplaçant, mais les rayons qui lui correspondent ne sont plus tous parallèles entre eux. Ces rayons forment alors, en effet, des surfaces coniques dont les sommets se trouvent sur la surface où ces rayons ont subi leur dernière réflexion ou leur dernière réfraction (24); les génératrices de tous ces cônes sont parallèles; il se propage par conséquent dans le milieu une infinité de systèmes de rayons parallèles, chaque système ayant une direction différente, et à tous ces systèmes de rayons correspond un système unique d'ondes planes et parallèles entre elles.

Au lieu de supposer tous les rayons d'un système parallèles entre eux, on peut imaginer qu'une partie seulement de ces rayons, formant une surface continue, soient parallèles; on arrive alors aux théorèmes suivants :

Théorème IX. — *Si, parmi les rayons issus d'un même point et de même espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque, il s'en trouve une infinité formant une surface continue qui soient parallèles entre eux, chacune des ondes qui correspondent au système des rayons est tangente à un même plan le long de la courbe suivant laquelle elle est coupée par la surface cylindrique que forment les rayons parallèles.* (*Sauf le cas où, le milieu étant biaxe, les rayons sont parallèles à l'une des directions singulières du milieu.*)

Théorème X. — *Si, dans un milieu homogène quelconque, une onde correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce est tangente à un même plan le long d'une courbe continue, les rayons qui passent par les différents points de la ligne de contact sont parallèles entre eux et forment une surface cylindrique continue, à moins que, le milieu étant biaxe, ce plan ne soit parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu.*

IV. — *Recherche de la surface réfléchissante ou réfringente, étant données l'onde incidente et l'onde réfléchie ou réfractée. — Construction réciproque de celle de Huyghens.*

29. La construction générale de l'onde réfléchie ou réfractée (16) montre immédiatement que la surface réfléchissante ou réfringente peut être considérée comme le lieu des intersections des ondes incidentes avec les ondes réfléchies ou réfractées correspondant au même temps. Cette remarque va nous permettre de résoudre le problème suivant :

Étant données une position réelle S *de l'onde incidente et une position* *également réelle* S′ *de l'onde réfléchie ou réfractée, ou d'une des nappes de cette onde, si elle en a deux, et connaissant de plus le temps* T *que met la lumière pour se propager de l'onde* S *à l'onde* S′, *trouver la surface réfléchissante ou réfringente.*

Il s'agit uniquement de déterminer les ondes incidentes et les ondes réfléchies ou réfractées qui correspondent au même temps. Soit une onde incidente postérieure de τ à l'onde S, l'onde réfléchie ou réfractée qui correspond au même temps est antérieure de $T - \tau$ à l'onde S′ si τ est compris entre zéro et T, postérieure de $\tau - T$ à l'onde S′ si τ est plus grand que T; soit maintenant une onde incidente antérieure de τ à l'onde S, l'onde réfléchie ou réfractée qui correspond au même temps est antérieure de $T + \tau$ à l'onde S′. En définitive, la surface réfléchissante ou réfringente est donc le lieu des intersections des ondes incidentes séparées de l'onde S par un intervalle de temps τ, avec les ondes réfléchies ou réfractées séparées de l'onde S′ par un intervalle de temps $T - \tau$, en convenant que l'onde incidente doit être regardée comme postérieure ou comme antérieure à l'onde S, suivant que τ est positif ou négatif, et que l'onde réfléchie ou réfractée doit être considérée comme antérieure ou comme postérieure à l'onde S′, suivant que $T - \tau$ est positif ou négatif; τ devra du reste recevoir toutes les valeurs pour lesquelles il y a intersection. Le problème est impossible lorsque, pour aucune valeur de τ il n'y a intersection entre l'onde incidente et l'onde réfléchie ou réfractée correspondant au même temps. Il est évident d'ailleurs que, quelles que soient les ondes S et S′, il existe toujours certaines valeurs de T pour lesquelles le problème est possible; car, si l'on imagine une onde incidente postérieure de τ à l'onde S, on peut toujours trouver pour T une valeur telle, que cette onde incidente soit coupée par l'onde réfléchie antérieure de $T - \tau$ à l'onde S′. Si l'on donne à T toutes les valeurs pour lesquelles le problème comporte une solution, on obtient le système des surfaces réfléchissantes ou réfringentes qui peuvent transformer l'onde incidente S dans l'onde réfléchie ou réfractée S′.

Comme cas particulier, on peut supposer que les ondes S et S′ se réduisent chacune à un point, c'est-à-dire chercher les surfaces réfléchissantes ou réfringentes qui font converger en un point donné les rayons émanés d'un point lumineux également donné; ces surfaces reçoivent la qualification d'*aplanétiques*, et leur théorie complète exige des développements assez étendus, qui feront l'objet d'un chapitre spécial.

30. Revenons maintenant au cas général et proposons-nous de le traiter par le calcul. Étant donnée l'équation de l'onde incidente S, connaissant de plus la nature des rayons et par suite l'équation de la nappe, de même nature que ces rayons, de la surface d'onde caractéristique du premier milieu, on peut, en suivant la marche indiquée au n° 15, trouver l'équation de l'onde incidente postérieure de τ à l'onde S, équation qui sera de la forme

$$F(x, y, z, \tau) = 0.$$

De même, étant donnée l'équation de l'onde réfléchie ou réfractée S′, connaissant de plus la nature des rayons réfléchis ou réfractés, et par suite l'équation de la nappe, de même nature que ces rayons, de la surface d'onde caractéristique du milieu où ils se propagent, on peut, en suivant une marche analogue, trouver l'équation de l'onde réfléchie ou réfractée postérieure de t à l'onde S′, équation qui sera de la forme

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = 0.$$

D'après la construction indiquée dans le paragraphe précédent, on obtiendra l'équation des surfaces réfléchissantes ou réfringentes capables de transformer l'onde incidente S dans l'onde réfléchie ou réfractée S′, en éliminant τ entre les deux équations

$$F(x, y, z, \tau) = 0$$

et

$$\mathcal{F}(x, y, z, \tau - T) = 0,$$

ce qui conduira à une équation de la forme

$$\Phi(x, y, z, T) = 0,$$

où T pourra recevoir toutes les valeurs possibles.

31. Soit S une onde correspondant à un système de rayons issus d'un même point et de même espèce; supposons que ces rayons, après avoir subi un nombre quelconque de réflexions et de réfractions en traversant un nombre quelconque de milieux homogènes, isotropes ou anisotropes, restent de même espèce, et soit alors S′ une des ondes qui leur correspondent. D'après ce que nous venons de voir, il est toujours possible de trouver une surface réfléchissante ou réfringente capable de transformer l'onde S dans l'onde S′; si nous remarquons, de plus, que, dans le même milieu, la nature des rayons étant donnée, aux mêmes systèmes d'ondes correspondent nécessairement les mêmes systèmes de rayons, nous sommes conduits au théorème suivant, démontré par Gergonne (*) pour le cas particulier des milieux isotropes, et qui se trouve étendu à toute espèce de milieux homogènes.

Théorème XI. — *Lorsque des rayons issus d'un même point et de même espèce subissent un nombre quelconque de réflexions et de réfractions en traversant un nombre quelconque de milieux homogènes, isotropes ou anisotropes, l'effet de ces réflexions et de ces réfractions peut toujours être remplacé, soit par celui d'une réflexion unique, soit par celui d'une réfraction unique.*

32. La construction de Huyghens permet encore, étant données la direction d'un rayon incident et celle d'un rayon réfléchi ou réfracté provenant de ce rayon incident, de déterminer la direction du plan tangent à la surface réfléchissante ou réfringente au point d'incidence, en supposant la nature de chacun de ces rayons connue si le milieu où il se propage est biréfringent. A cet effet, du point d'incidence comme centre on décrit les surfaces d'onde Σ et Σ' caractéristiques du premier et du second milieu, et correspondant à l'unité de temps; par le point où le rayon incident rencontre celles des nappes de la surface Σ qui est de même nature que lui, on mène un plan tangent P à cette nappe : par le point où le rayon réfléchi rencontre celle des nappes de la surface Σ qui est de même nature que lui, ou bien par le point où le rayon réfracté rencontre celle des nappes de la surface Σ' qui est de même nature que lui, on mène un plan tangent P′ à cette nappe. Enfin, par la droite d'intersection des plans P et P′ et par le point d'incidence on fait passer un plan, qui est le plan cherché. Si les deux plans tangents P et P′ sont parallèles entre eux, le plan demandé est parallèle à ces deux plans. La droite d'intersection des plans P et P′ ne pouvant jamais passer par le

(*) Gergonne, *Annales*, t. XIV, p. 129.

point d'incidence, la construction que nous venons d'indiquer donne toujours un plan et un seul, sauf le cas particulier où, l'un des deux milieux étant biaxe, le rayon incident ou le rayon réfléchi, si c'est le premier milieu, le rayon réfracté, si c'est le second, rencontre la surface d'onde caractéristique de ce milieu en un de ses points singuliers. Cependant le problème n'est possible, quelles que soient les directions données pour les deux rayons, que s'il s'agit d'une réflexion homologue. S'il y a réfraction ou réflexion antilogue, le problème peut devenir impossible pour certaines directions des rayons donnés : c'est ce qui arrive, dans le cas de la réfraction, si le plan déterminé par la construction que nous venons d'indiquer est compris dans l'angle formé par le rayon incident prolongé et par le rayon réfracté, et pour la réflexion antilogue si ce plan est compris dans l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi.

33. Nous allons maintenant nous proposer de chercher les conditions qui doivent être remplies pour qu'un rayon se réfléchisse en revenant sur lui-même ou se réfracte sans déviation.

Considérons en premier lieu le cas d'une réflexion homologue. Si un rayon se réfléchit alors de façon à revenir sur lui-même, la construction du paragraphe précédent montre immédiatement que le plan tangent à la surface réfléchissante au point d'incidence est parallèle au plan tangent mené à celle des nappes de la surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point d'incidence comme centre et correspondant à l'unité de temps qui est de même nature que le rayon incident, au point où cette nappe est rencontrée par le rayon incident prolongé. La construction de Huyghens montre d'ailleurs que cette condition est suffisante. Donc :

THÉORÈME XII. — *Pour qu'un rayon qui se propage dans un milieu homogène quelconque se réfléchisse en revenant sur lui-même, la réflexion étant homologue, il faut et il suffit que le plan tangent à la surface réfléchissante au point d'incidence ait une direction conjuguée à celle du rayon incident, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature de ce rayon.*

Si le milieu est isotrope, ou si le milieu est uniaxe et le rayon ordinaire, pour qu'un rayon revienne sur lui-même par suite d'une réflexion homologue, il faut et il suffit, d'après le théorème précédent, que ce rayon soit normal à la surface réfléchissante.

En passant au cas de la réfraction, nous pouvons nous proposer, étant données la direction d'un rayon incident et sa nature, ainsi que la nature du rayon réfracté, de déterminer la direction que doit avoir le plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient sur le prolongement l'un de l'autre. La construction de Huyghens nous fournit encore la solution de ce problème. D'un point quelconque O comme centre on décrit les nappes Σ et Σ' des surfaces d'onde caractéristiques des deux milieux correspondant à l'unité de temps qui sont respectivement de même nature que le rayon incident et que le rayon réfracté; par le point O on mène une droite parallèle à la direction donnée pour le rayon incident; cette droite rencontre les nappes Σ et Σ' en deux points, situés du même côté du point O, par où on mène deux plans tangents P et P′ à ces deux nappes; enfin, par la droite d'intersection des deux plans P et P′ et par le point O on fait passer un plan, dont la direction est la direction cherchée. On voit que ce problème comporte toujours une solution et une seule.

Lorsque les nappes Σ et Σ' sont semblables et semblablement placées, les plans P et P′ sont parallèles entre eux, et, par suite, pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient en ligne droite, il faut que le plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence soit parallèle aux plans P et P′. Cette condition est évidemment suffisante; donc :

Théorème XIII. — *Lorsque les nappes des surfaces d'onde caractéristiques de deux milieux homogènes qui correspondent respectivement au rayon incident et au rayon réfracté sont semblables et semblablement placées, pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient sur le prolongement l'un de l'autre, il faut et il suffit que le plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence ait la direction qui, dans l'un et l'autre milieu, est conjuguée à celle du rayon incident, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature de ce rayon.*

On peut remarquer que, dans ce cas, le rayon incident et le rayon réfracté sont toujours de même nature. On voit encore que, si les nappes des surfaces d'onde caractéristiques des deux milieux qui correspondent respectivement au rayon incident et au rayon réfracté sont sphériques, pour que le rayon incident et le rayon réfracté soient sur le prolongement l'un de l'autre, il faut et il suffit que le rayon incident soit normal à la surface réfringente.

Un problème inverse du précédent est celui qui consiste, étant données la direction du plan tangent à la surface réfringente au point d'incidence, la nature du rayon incident et celle du rayon réfracté, à chercher la direction que doit avoir le rayon incident pour pénétrer dans le second milieu sans se briser. Pour répondre à cette question, on décrit encore d'un point quelconque O comme centre les nappes Σ et Σ'; on mène par le point O un plan parallèle au plan donné, et on cherche sur ce plan une droite telle, que les plans tangents menés par cette droite aux parties des nappes Σ et Σ' qui se trouvent d'un même côté de ce plan touchent ces surfaces en deux points qui soient en ligne droite avec le point O : la droite qui passe par le point O et par les deux points de contact a la direction cherchée.

Quant au cas où un rayon doit se réfléchir en revenant sur lui-même, la réflexion étant antilogue, il se traite en suivant exactement la même marche que pour la réfraction; les surfaces Σ et Σ' sont alors les deux nappes de la surface d'onde caractéristique du premier milieu; ces deux nappes ne pouvant jamais être semblables, il n'y a pas lieu d'énoncer une proposition analogue au théorème XIII.

V. — *Des foyers totaux et partiels et des lignes focales. — Tautochronisme des trajectoires lumineuses aboutissant au même foyer.*

34. Supposons que dans un milieu homogène quelconque, isotrope ou anisotrope, tous les rayons réfléchis ou réfractés d'une certaine espèce soient dirigés de façon à concourir en un foyer total O, réel ou virtuel. Soit S une quelconque des ondes réelles ou virtuelles qui correspondent à ce système de rayons; prenons sur cette onde un point quelconque A; si du point O comme centre nous décrivons la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du

milieu correspondant à un temps tel, que cette nappe passe en A, cette nappe sera, en vertu du théorème II, tangente en A à l'onde S. Ce raisonnement étant applicable à tous les points de l'onde S, cette onde doit être en chacun de ses points tangente à la nappe, de même nature que les rayons, d'une certaine surface d'onde caractéristique décrite du point O comme centre. Si cette surface d'onde caractéristique n'était pas la même pour tous les points de l'onde S, cette onde envelopperait des nappes de même nature de surfaces d'onde caractéristiques décrites d'un même point O comme centre et correspondant à des temps différents, ce qui est impossible, puisque ces nappes ne pourraient se couper. L'onde S est donc tangente en tous ses points à la nappe, de même nature que les rayons, d'une même surface d'onde caractéristique décrite du point O comme centre, et, par suite, coïncide avec cette nappe. Réciproquement, si une quelconque des ondes, réelles ou virtuelles, correspondant au système des rayons, coïncide avec la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu décrite d'un certain point O comme centre, les directions de tous les rayons du système concourent au point O. En effet, si cette condition est remplie, les directions conjuguées, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons, aux plans tangents menés à cette onde en ses différents points, passent tous par le point O; or, d'après le théorème II, ces directions sont précisément celles des rayons qui passent par les différents points de l'onde; donc ces rayons concourent tous en O.

Nous arrivons ainsi au théorème fondamental dont voici l'énoncé :

Théorème XIV. — *Pour que tous les rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et d'une certaine espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque convergent en un foyer total* O, *réel ou virtuel, il faut et il suffit que l'onde qui correspond à ce système de rayons, considérée dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, coïncide avec la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point* O *comme centre. D'où il suit :* 1° *que l'onde au moment où elle passe par le foyer total se réduit à un point;* 2° *que si, dans un milieu homogène quelconque, tous les rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et d'une certaine espèce vien-*

nent converger en un même foyer réel, tous ces rayons emploient des temps égaux pour se propager du point lumineux au foyer, et y arrivent par conséquent sans différence de phase.

Ce théorème est vrai, quelles que soient les réflexions et les réfractions que les rayons aient subies avant de prendre leurs directions actuelles, à condition cependant que ces rayons émanent originairement d'un même point et qu'ils soient restés de même espèce.

Le tautochronisme des trajectoires lumineuses aboutissant au même foyer constitue une proposition d'une importance capitale : c'est la base principale de la théorie des surfaces aplanétiques, et on doit nécessairement y avoir recours pour justifier l'emploi des lentilles dans l'observation des phénomènes d'interférences et de diffraction (*).

Il résulte du théorème précédent que, pour que les ondes réfléchies ou réfractées qui se propagent dans un milieu homogène quelconque affectent la forme que présente dans ce milieu celle des nappes de la surface d'onde caractéristique qui est de même nature que ces ondes, il faut et il suffit que tous les rayons réfléchis ou réfractés soient dirigés de façon à concourir en un même point.

Remarquons enfin que, si du foyer total O comme centre on décrit la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique correspondant à un temps quelconque T, cette nappe coïncide à la fois avec deux ondes, savoir : avec celle qui est antérieure de T au moment où l'onde se réduit au foyer total, et avec celle qui est postérieure de T à ce même moment. Si les rayons réfléchis ou réfractés ne remplissent pas tout l'espace, ces deux ondes coïncideront avec deux parties de la surface d'onde caractéristique qui seront limitées par deux courbes symétriques par rapport au foyer et pouvant empiéter l'une sur l'autre. Mais, si les rayons réfléchis ou réfractés, avant d'arriver au foyer, remplissent tout l'espace, comme cela a lieu, par exemple, lorsque des rayons, émanés d'un point lumineux situé dans un milieu homogène limité par une surface fermée, viennent après réflexion con-

(*) Ce théorème est connu depuis longtemps pour les milieux isotropes. Huyghens (*Traité de la Lumière*, chap. VI) en a donné une démonstration, en s'appuyant sur les lois de la réflexion et de la réfraction dans ces milieux. Il restait à faire voir qu'il s'applique également aux milieux biréfringents.

verger en un foyer unique, les deux ondes coïncident chacune avec la nappe de la surface d'onde caractéristique dans toute l'étendue de cette nappe, et, par suite, coïncident entre elles.

35. Il peut arriver que, parmi les rayons réfléchis ou réfractés d'une certaine espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque, il y en ait seulement une partie, formant une surface conique, qui convergent en un même foyer réel ou virtuel : ce foyer prend alors le nom de *foyer partiel*. En employant exactement le même mode de raisonnement que dans le paragraphe précédent, on arrive à la proposition suivante :

Théorème XV. — *Pour que, parmi les rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et d'une certaine espèce qui se propagent dans un milieu homogène quelconque, il y en ait une infinité formant une surface continue qui aillent converger en un foyer partiel* O, *réel ou virtuel, il faut et il suffit que l'onde qui correspond à ce système de rayons, considérée dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, soit tangente le long de la courbe suivant laquelle elle est coupée par la surface que forment les rayons à la nappe, de même nature que les rayons, d'une surface d'onde caractéristique du milieu décrite du point* O *comme centre. D'où il suit que, si, dans un milieu homogène quelconque, une infinité de rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et de même espèce, formant une surface continue, convergent en un même foyer partiel réel, ces rayons emploient des temps égaux pour se propager du point lumineux à ce foyer, et y arrivent par conséquent sans différence de phase.*

Il peut arriver, comme cas particulier, que la surface conique formée par les rayons dont les directions convergent au foyer partiel O se réduise à une surface plane : le théorème précédent subsiste alors sans modification.

36. Lorsqu'un système de rayons issus d'un même point et de même espèce se propage dans un milieu homogène quelconque, il peut se présenter quatre cas distincts :

1° Il n'y a ni foyer total ni foyer partiel;

2° Il y a un nombre fini de foyers partiels isolés les uns des autres;

nous appellerons alors *lignes aplanétiques*, soit sur la surface réfléchissante ou réfringente, soit sur les ondes qui correspondent au système des rayons, les intersections de ces surfaces avec les cônes formés par les rayons qui convergent au même foyer partiel, ces surfaces coniques pouvant dans des cas particuliers se réduire à des plans;

3° Il y a une infinité de foyers partiels formant une ligne continue que nous nommons *ligne focale;* il existe alors sur la surface réfléchissante ou réfringente et sur chacune des ondes qui correspondent au système des rayons réfléchis ou réfractés un système continu de lignes aplanétiques, et le système des rayons se décompose en une infinité de surfaces coniques dont les sommets forment une ligne continue;

4° Il y a un foyer total, et alors la surface réfléchissante ou réfringente est dite *aplanétique*.

Ce dernier cas vient d'être étudié (34); nous nous arrêterons maintenant quelque temps à examiner les conséquences qui résultent de l'existence d'une ligne focale. Cette ligne focale peut être, soit tout entière réelle, soit tout entière virtuelle, soit en partie réelle et en partie virtuelle; mais il y a, en outre, une distinction essentielle à faire, suivant que les rayons emploient des temps égaux ou inégaux pour aller de l'onde réfléchie ou réfractée considérée dans une quelconque des positions réelles ou virtuelles qu'elle occupe successivement aux différents points de la ligne focale (en supposant, si cela est nécessaire pour l'évaluation de ces temps, le milieu où se meuvent les rayons prolongé au delà de ses limites, de façon à comprendre l'onde et la ligne focale). Si ces temps sont égaux, nous dirons que la ligne focale est *isochrone;* dans le cas contraire, nous l'appellerons *anisochrone*. On voit que, lorsqu'une ligne focale réelle est isochrone, tous les rayons réfléchis ou réfractés emploient le même temps pour se propager du point lumineux aux différents points de cette ligne focale, tandis qu'en général ce sont seulement les rayons aboutissant à un même point de la ligne focale qui mettent des temps égaux pour atteindre ce foyer partiel.

37. Soit, dans un milieu homogène quelconque, L une ligne focale isochrone, réelle ou virtuelle. D'après le théorème XV, si on considère l'onde S qui correspond au système des rayons réfléchis ou réfractés dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, cette onde doit être tangente le long d'une courbe aux nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'ondes caractéristiques décrites de chacun des points de la ligne L comme centres. Pour que la ligne focale soit isochrone, il faut évidemment que ces surfaces d'onde caractéristiques, décrites des différents points de la ligne L comme centres, et dont chacune est tangente à l'onde S le long d'une courbe, correspondent au même temps. Réciproquement, si cette condition est remplie, les rayons vont aboutir aux différents points de la ligne L et emploient des temps égaux pour aller de l'onde S à la ligne L qui, par suite, est isochrone. Donc :

Théorème XVI. — *Pour que, des rayons réfléchis ou réfractés issus d'un même point et de même espèce se propageant dans un milieu quelconque, une ligne* L *soit pour ces rayons une ligne focale isochrone, il faut et il suffit que l'onde qui correspond à ces rayons soit dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles l'enveloppe des nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites des différents points de la ligne* L *comme centres et correspondant à un même temps. D'où il suit que l'onde dans une certaine position, soit réelle, soit virtuelle, doit se réduire à la ligne focale isochrone.*

Si, par exemple, le milieu est isotrope, l'onde est l'enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt la ligne focale isochrone et dont le rayon reste constant.

Lorsqu'il existe une ligne focale isochrone, chaque onde correspondant au système des rayons réfléchis ou réfractés présente un système continu de lignes aplanétiques. Pour trouver sur l'une de ces ondes la ligne aplanétique qui correspond à un point donné de la ligne focale, il suffit évidemment de décrire, de ce point comme centre, une surface d'onde caractéristique dont la nappe, de même nature que les rayons, soit tangente à l'onde; le contact entre les deux surfaces a lieu le long d'une ligne qui est la ligne aplanétique cherchée. Sur la surface réfléchissante ou réfringente il est également facile de trouver la ligne aplanétique qui correspond à un point donné A de la ligne focale isochrone. En effet, comme dans une de ses positions l'onde se réduit à cette ligne, on obtient les rayons qui convergent en A en menant les droites dont les directions sont conjuguées ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons, à celles des plans tangents à la ligne focale en A, c'est-à-dire de tous les plans qui passent par la droite tangente en A à cette ligne. Ces rayons forment une surface conique pouvant, dans des cas particuliers, se réduire à une surface plane et dont l'intersection avec la surface réfléchissante ou réfringente est la ligne aplanétique demandée.

Si le milieu est isotrope ou si le milieu est uniaxe et les rayons ordinaires, les rayons qui convergent en un même point A de la ligne focale isochrone doivent être perpendiculaires aux plans tangents en A à cette ligne focale, et, par suite, à la tangente menée à cette ligne par le point A. Ces rayons sont donc tous contenus dans un même plan normal en A à la ligne focale; d'où le théorème suivant :

Théorème XVII. — *Si, dans un milieu homogène isotrope ou dans un milieu homogène uniaxe, les rayons étant ordinaires, des rayons issus d'un même point et de même espèce donnent naissance à une ligne focale isochrone, ceux de ces rayons dont les directions convergent en un même point réel ou virtuel de cette ligne sont contenus dans un même plan normal à la ligne focale, et par suite les lignes aplanétiques, tant sur la surface réfléchissante ou réfringente que sur les ondes qui correspondent au système des rayons, sont planes.*

38. Quand il existe une ligne focale anisochrone, l'onde, considérée dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, est encore l'enveloppe des nappes, de même nature que les rayons, de surfaces d'onde caractéristiques du milieu décrites des différents points de cette ligne comme centres; mais ces surfaces d'onde caractéristiques ne correspondent plus à des temps égaux. Les lignes aplanétiques sur les ondes qui correspondent au système des rayons réfléchis ou réfractés, s'obtiennent dans ce cas par la même construction que dans le cas d'une ligne focale isochrone (**37**); cette construction est encore applicable lorsqu'il existe un nombre fini de foyers partiels isolés.

Quand la ligne focale est anisochrone, l'onde ne se réduit à cette ligne dans aucune de ses positions, soit réelles, soit virtuelles; elle passe donc successivement par les différents points de cette ligne. Considérons l'onde dans la position réelle ou virtuelle où elle passe par un point quelconque A de la ligne focale anisochrone : d'après le théorème XV, tous les rayons qui convergent en A arrivent en même temps en ce point. L'onde au point A doit donc être tangente à la fois à tous les plans conjugués aux rayons qui arrivent en A, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons; l'enveloppe de ces plans est en général une surface conique, mais cette surface peut se réduire à une ligne droite : c'est ce qui arrive, par exemple, si, le milieu étant isotrope, les rayons qui aboutissent en A sont contenus dans un même plan.

Il résulte de ce que nous venons de dire que l'onde présente en A ce qu'on appelle *un point singulier*; il n'y a d'exception à cette règle que dans un cas très-particulier : c'est celui où, le milieu étant biaxe, chacun des rayons qui convergent en A est parallèle à l'un des rayons vecteurs qui, dans la surface d'onde caractéristique du milieu, sont conjugués aux plans tangents singuliers. Tout ce que nous venons de dire s'applique évidemment au cas où l'onde passe par un foyer partiel isolé. Réciproquement, si l'onde, dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, présente un point singulier, on peut affirmer que ce point appartient à une ligne focale anisochrone, ou constitue un foyer partiel isolé; car, en ce point, l'onde est tangente à une infinité de plans ayant pour enveloppe une surface conique, ou, dans des cas particuliers, une ligne droite, et à ces plans sont conjugués une infinité de rayons formant une surface conique qui peut se réduire à une surface plane. Ici encore la règle générale présente une exception particulière : en effet, si, le milieu étant biaxe, la surface conique tangente à l'onde au point singulier a ses génératrices parallèles à celles du cône tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu en un de ses points singuliers, à tous les plans tangents à l'onde au point singulier est conjuguée une direction unique, qui est l'une des directions singulières du milieu; il ne passe alors en A qu'un rayon unique, mais ce rayon, d'après une remarque faite précédemment (23), est constitué par la superposition d'une infinité de rayons réfléchis ou réfractés provenant d'un cône de rayons incidents.

Les remarques précédentes se résument dans le théorème suivant :

Théorème XVIII. — *Toutes les fois que, dans un milieu homogène quelconque, l'onde correspondant à un système de rayons issus d'un même* *point et de même espèce passe par un foyer partiel réel ou virtuel ne faisant pas partie d'une ligne focale isochrone, elle présente en ce foyer un point singulier, à moins que, le milieu étant biaxe, le plan tangent à l'onde, mené par ce foyer, ne soit parallèle à l'un des plans tangents singuliers de la surface d'onde caractéristique du milieu. Réciproquement, toutes les fois que l'onde, dans une quelconque de ses positions réelles ou virtuelles, présente un point singulier, ce point est un foyer partiel n'appartenant pas à une ligne focale isochrone, à moins que, le milieu étant biaxe, le cône tangent à l'onde en ce point singulier n'ait ses génératrices parallèles à celles du cône tangent à la surface d'onde caractéristique du milieu en un de ses points singuliers.*

De ce théorème résulte une construction qui permet de trouver sur la surface réfléchissante ou réfringente la ligne aplanétique qui correspond à un point d'une ligne focale anisochrone ou à un foyer partiel isolé. En effet, sauf l'exception signalée plus haut, l'onde, lorsqu'elle passe par un tel point, y est tangente à un cône; si l'on mène par le point singulier de l'onde les droites dont les directions sont conjuguées, ordinairement ou extraordinairement suivant la nature des rayons, à celles des plans tangents à ce cône, ces droites forment une surface conique dont l'intersection avec la surface réfléchissante ou réfringente est la ligne aplanétique cherchée.

Si le milieu est isotrope, le cône formé par les rayons qui aboutissent au foyer partiel a ses génératrices perpendiculaires à celles du cône tangent à l'onde en ce foyer partiel, et alors le premier cône se réduit à une surface plane lorsque le second se réduit à une ligne droite.

39. Les remarques que nous venons de faire sur les relations entre l'existence des foyers ou des lignes focales et les affections présentées par les ondes, peuvent se résumer comme il suit :

1° Si l'onde qui correspond à un système de rayons réfléchis ou réfractés, issus d'un même point et de même espèce, se propageant dans un milieu homogène quelconque, ne se réduit, dans aucune des positions réelles et virtuelles qu'elle occupe successivement, à un point ou à une ligne, et que, dans aucune de ses positions, elle ne présente de point singulier, il n'y a ni foyer total, ni foyer partiel (à moins que, le milieu étant biaxe, une infinité de rayons incidents, formant une surface continue, ne donnent naissance à une infinité de faisceaux coniques de rayons réfléchis ou réfractés, qui, en s'entre-croisant, peuvent donner lieu à des foyers partiels sans que l'onde présente de point singulier).

2° Si l'onde, sans jamais se réduire ni à un point ni à une ligne, présente, dans une ou plusieurs positions isolées, un ou plusieurs points singuliers, ces points singuliers sont autant de foyers partiels isolés (toutefois, si le milieu est biaxe, les points singuliers de l'onde où le cône tangent à l'onde a ses génératrices parallèles à celles de l'un des cônes tangents à la surface d'onde caractéristique du milieu en ses points singuliers, sont la reproduction des points singuliers de cette surface d'onde caractéristique et n'accusent pas l'existence de foyers partiels).

3° Si l'onde, sans jamais se réduire ni à un point ni à une ligne, présente, dans une série continue de positions, un point singulier, la ligne décrite par ce point est une ligne focale anisochrone (sauf l'exception indiquée dans le cas précédent).

4° Si l'onde, dans une certaine position, soit réelle, soit virtuelle, se réduit à une ligne, cette ligne est une ligne focale isochrone.

5° Si l'onde, dans une certaine position, soit réelle, soit virtuelle, se réduit à un point, ce point est un foyer total.

VI. — *Propriété fondamentale des trajectoires lumineuses : le temps employé à les parcourir est en général un minimum ou un maximum.*

40. Quoique nous ne nous proposions pas d'exposer ici spécialement la théorie des surfaces aplanétiques, il est cependant indispensable, pour arriver à la démonstration simple et générale d'une propriété fondamentale des trajectoires lumineuses, d'entrer plus avant que nous ne l'avons fait jusqu'à présent dans l'étude de ces surfaces.

Supposons que tous les rayons réfléchis ou réfractés d'une certaine espèce qui correspondent à des rayons incidents émanés d'un point lumineux réel O, aillent converger en un même foyer réel O'. Désignons par T le temps employé par un rayon de même nature que les rayons incidents pour se propager dans le premier milieu du point O à un point quelconque M; par T' le temps employé par un rayon de même nature que les rayons réfléchis ou réfractés pour se propager, dans le second milieu s'il s'agit d'une réfraction, dans le premier milieu s'il s'agit d'une réflexion, du point O′ au même point M. Il résulte immédiatement du théorème XIV que, pour tous les points de la surface réfléchissante ou réfringente, la somme $T + T'$ est constante, et que, réciproquement, si cette somme est constante sur une surface réfléchissante ou réfringente, cette surface est aplanétique pour les positions O et O′ du point lumineux et du foyer. On voit donc, qu'étant données les positions du point lumineux et du foyer, supposés tous deux réels, et la nature des rayons incidents étant assignée ainsi que celle des rayons réfléchis ou réfractés, il existe une infinité de surfaces aplanétiques constituant un certain système. Sur chacune des surfaces de ce système la somme $T + T'$ a une valeur constante; mais cette somme varie quand on passe d'une de ces surfaces à une autre; d'où il suit que les surfaces aplanétiques faisant partie d'un même système ne peuvent jamais se couper et s'enveloppent complétement les unes les autres.

Considérons en premier lieu le cas de la réflexion : les surfaces aplanétiques qui correspondent à des positions données du point lumineux O et du foyer O′ supposés tous deux réels, sont alors fermées, et chacune d'elles comprend dans son intérieur les points O et O′. De plus, il est évident que la somme $T + T'$, constante sur chacune de ces surfaces, va en augmentant à mesure que l'on considère une surface de plus en plus éloignée des points O et O′, ou, en d'autres termes, quand on passe d'une surface aplanétique à une autre qui renferme la première dans son intérieur. Il résulte de là que, si l'on désigne par C la valeur particulière de la somme $T + T'$ sur l'une de ces surfaces aplanétiques, surface que nous nommerons S, pour tout point extérieur à la surface S, la somme $T + T'$ aura une valeur supérieure à C, et pour tout point intérieur à cette surface, cette somme aura une valeur inférieure à C. On voit encore que, si, en un point quelconque de la surface S, on mène un plan tangent à cette surface, la somme $T + T'$ aura, en tous les points de ce plan autres que le point de contact, une valeur supérieure à celle qu'elle prend en ce point de contact, c'est-à-dire une valeur supérieure à C; elle aura donc sur le plan, au point de contact, une valeur minimum.

Passons maintenant au cas de la réfraction. Les surfaces aplanétiques passent alors nécessairement entre les points O et O′. Supposons d'abord que, suivant la direction OO′, la vitesse dans le premier milieu d'un rayon de même nature que les rayons incidents, soit plus grande que la vitesse dans le second milieu d'un rayon de même nature que les rayons réfractés; la somme T + T′ va alors en croissant à mesure que la surface aplanétique rencontre la droite OO′ en un point plus voisin du point O. De plus, dans ce cas, les surfaces aplanétiques, du moins dans la partie de leur étendue qui sert réellement à la réfraction, tournent leur convexité vers le point O. Ceci posé, désignons par C la valeur de la somme T + T′ sur l'une de ces surfaces aplanétiques, surface que nous appellerons S, et soit M un point qui n'est assujetti qu'à la condition de se trouver sur la partie de l'une quelconque des surfaces aplanétiques du système qui sert réellement à la réfraction. On doit conclure de ce qui précède qu'au point M la somme T + T′ a une valeur supérieure à C si ce point se trouve à l'extérieur de la surface S, c'est-à-dire du même côté de cette surface que le point O, une valeur inférieure à C si ce point est situé à l'intérieur de la surface S, c'est-à-dire du même côté que le point O′.

Si, au contraire, suivant la direction OO′, la vitesse dans le premier milieu d'un rayon de même nature que les rayons incidents, est plus petite que la vitesse dans le second milieu d'un rayon de même nature que les rayons réfractés, la somme T + T′ va en croissant à mesure que la surface aplanétique rencontre la droite OO′ en un point plus voisin du point O′. Mais, comme alors les surfaces aplanétiques, du moins dans la partie de leur étendue qui sert réellement à la réfraction, tournent leur convexité vers le point O′, on voit que, comme dans le cas précédent, la somme T + T′ a une valeur supérieure à C au point M si ce point se trouve à l'extérieur de la surface S, c'est-à-dire ici du même côté de cette surface que le point O′, une valeur inférieure à C si ce point est situé à l'intérieur de cette surface, c'est-à-dire du même côté que le point O.

Dans l'un et l'autre cas, si l'on mène à l'une des surfaces aplanétiques un plan tangent en un point situé dans la partie de cette surface qui sert réellement à la réfraction, tous les points de ce plan autres que le point de contact étant extérieurs à la surface aplanétique, la somme T + T′ aura sur le plan au point de contact une valeur minimum. Les surfaces aplanétiques, soit par réflexion, soit par réfraction, étant toujours convexes, la proposition que nous venons d'énoncer, de même que la proposition analogue relative à la réflexion, ne souffre aucune exception.

41. Supposons maintenant que la lumière se propage d'un point O à un autre point O′ en subissant une réflexion ou une réfraction, ces deux points étant situés dans un milieu homogène quelconque s'il s'agit d'une réflexion, dans deux milieux homogènes quelconques s'il s'agit d'une réfraction, et la surface réfléchissante ou réfringente étant également quelconque. Appelons R le rayon incident, R′ le rayon réfléchi ou réfracté, I le point d'incidence, S la surface réfléchissante ou réfringente; désignons par T le temps que met, dans le premier milieu, un rayon de même nature que le rayon R pour se propager du point O à un point quelconque M, par T′ le temps qu'emploie, dans le premier ou dans le second milieu suivant qu'il s'agit d'une réflexion ou d'une réfraction, un rayon de même nature que le rayon R′ pour se propager du point O′ au même point M. Si nous considérons le point O comme un point lumineux réel et le point O′ comme un foyer réel, les rayons incidents étant de même nature que le rayon R, les rayons réfléchis ou réfractés de même nature que le rayon R′, il y aura, d'après ce que nous venons de voir, une infinité de surfaces aplanétiques pour ces positions du point lumineux et du foyer. Parmi ces surfaces aplanétiques, il s'en trouvera nécessairement une qui passera par le point d'incidence I : cette surface aplanétique, que nous désignerons par Σ, sera tangente en I à la surface réfléchissante ou réfringente S, car au point I la surface Σ doit, comme la surface S, réfléchir ou réfracter vers le point O′ un rayon provenant de O. Sur la surface aplanétique Σ la somme $T + T'$ est constante (40) : donc, puisque la surface S est tangente en I à la surface Σ, si, sur cette surface réfléchissante ou réfringente, on passe du point I à un point infiniment voisin, la variation de la somme $T + T'$ sera un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier; en d'autres termes, si, sur la surface S, on considère la somme $T + T'$ comme une fonction des coordonnées des points de cette surface, la différentielle de cette fonction sera nulle au point I.

Réciproquement, si, au point I, sur la surface S, la différentielle de la fonction $T + T'$ est nulle, cette fonction est constante sur la surface S dans une étendue infiniment petite à partir du point I; par suite, la surface S est tangente en I à l'une des surfaces aplanétiques pour les positions O et O′ du point lumineux et du foyer : donc le point I est tel qu'un rayon émané du point O, après s'être réfléchi ou réfracté en ce point, va passer par le point O′.

Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

THÉORÈME XIX. — *Étant donnés deux points* O *et* O′ *et une surface réfléchissante ou réfringente* S, *la nature des rayons incidents étant assignée, ainsi que celle des rayons réfléchis ou réfractés, pour qu'une trajectoire partant du point* O *et aboutissant au point* O′ *en touchant la surface* S *soit réellement suivie par la lumière, il faut et il suffit qu'en passant de cette trajectoire à une trajectoire infiniment voisine quelconque, la variation du temps employé par la lumière pour se propager du point* O *au point* O′ *soit un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier.*

42. Le théorème précédent est dans la théorie des ondes l'analogue de ce qu'est le principe de la moindre action dans la théorie de l'émission.

Il peut s'exprimer encore en disant que : pour qu'une trajectoire partant du point O et aboutissant au point O′ soit réellement suivie par la lumière, il faut et il suffit qu'au point I où cette trajectoire touche la surface réfléchissante ou réfringente, la différentielle de la somme $T + T'$ soit nulle, cette somme étant considérée comme une fonction des coordonnées des points de la surface S.

Ce théorème permet, étant données les coordonnées des points O et O′, l'équation de la surface réfléchissante ou réfringente, la nature des rayons incidents et celle des rayons réfléchis ou réfractés, de calculer les coordonnées des points où un rayon parti du point O doit toucher la surface S pour aller, après réflexion ou réfraction, passer par le point O′.

Désignons en effet par (a, b, c) les coordonnées du point O, par (a', b', c') celles du point O′. Soit

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface réfléchissante ou réfringente S,

$$f_1(x, y, z) = 0$$

l'équation de la nappe, de même nature que le rayon incident, de la surface d'onde caractéristique du premier milieu décrite de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps,

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la nappe, de même nature que le rayon réfléchi ou réfracté, de la surface d'onde caractéristique du premier ou du second milieu, suivant qu'il s'agit d'une réflexion ou d'une réfraction, décrite de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps. Le temps T employé par la lumière pour se propager du point O à un point quelconque de la surface S, dont les coordonnées sont (ξ, η, ζ), est donné par l'équation

$$(2) \qquad f_1\left(\frac{\xi - a}{T}, \frac{\eta - b}{T}, \frac{\zeta - c}{T}\right) = 0.$$

De même le temps T′ employé par la lumière pour se propager du point O′ au même point de la surface S est donné par l'équation

$$(3) \qquad f_2\left(\frac{\xi - a'}{T'}, \frac{\eta - b'}{T'}, \frac{\zeta - c'}{T'}\right) = 0,$$

les deux fonctions f_1 et f_2 étant identiques quand il s'agit d'une réflexion homologue.

Si des équations (2) et (3) on tire les valeurs de T et de T′, et qu'on les ajoute, on obtiendra une équation de la forme

$$T + T' = F(\xi, \eta, \zeta, a, b, c, a', b', c') = 0.$$

Entre cette équation et l'équation (1), on éliminera une des trois variables ξ, η, ζ, par exemple ζ, et on arrivera à une équation de la forme

$$T + T' = \mathcal{F}(\xi, \eta, a, b, c, a', b', c').$$

Pour les points cherchés de la surface S, on doit avoir, d'après le théorème XIX,

$$d(T + T') = 0,$$

équation qui, puisqu'il y a deux variables indépendantes, se décompose en deux autres :

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\xi} = 0,$$

et

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\eta} = 0.$$

Ces deux dernières équations jointes à celle de la surface déterminent les coordonnées des points cherchés.

43. Il est facile de voir, en se fondant sur les considérations qui nous ont déjà servi à démontrer le théorème XIX, que le temps employé par la lumière pour se propager d'un point à un autre, en subissant une réflexion ou une réfraction, est en général un maximum ou un minimum.

En effet, au point d'incidence I la surface réfléchissante ou réfringente S est tangente à une surface aplanétique Σ sur laquelle la somme $T + T'$ est constante (41) : si, au point I, le contact entre les deux surfaces S et Σ est simplement du premier ordre, comme cela a lieu en général, ou si ce contact est d'ordre impair, la surface S, dans le voisinage du point I, est intérieure ou extérieure à la surface Σ, car dans ce cas les deux surfaces ne peuvent se couper. Si la surface S est extérieure autour du point I à la surface aplanétique Σ, comme, d'après ce que nous avons vu précédemment (40), pour les points extérieurs à Σ, la somme $T + T'$ a une valeur plus grande que sur la surface Σ, cette somme a, sur la surface S, une valeur minimum en I. Si, au contraire, la surface S tout autour du point I est extérieure à la surface aplanétique Σ, la somme $T + T'$ a au point I une valeur maximum sur la surface S. Lorsque les deux surfaces S et Σ ont au point I un contact d'ordre pair, ce qui n'a lieu que dans des cas exceptionnels, ces deux surfaces se coupent tout en étant tangentes, et alors la valeur de la somme $T + T'$ sur la surface S n'est ni maximum ni minimum en I, bien que la variation de la somme $T + T'$, quand on passe du point I à un point infiniment voisin sur la surface S, soit encore un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, et que, dans ce cas, cette variation soit même au moins du troisième ordre. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XX. — *Lorsque la lumière se propage d'un point* O *à un point* O′ *en subissant une réflexion ou une réfraction, le temps employé par la lumière pour parcourir sa trajectoire est toujours un minimum ou un maximum, à moins qu'au point d'incidence la surface réfléchissante ou réfringente n'ait avec celle des surfaces aplanétiques relatives aux positions* O *et* O′ *du point lumineux et du foyer qui passe en ce point un contact d'ordre pair.*

Le temps est un minimum lorsque, tout autour du point d'incidence, la surface réfléchissante ou réfringente est extérieure à la surface aplanétique, un maximum lorsque, tout autour du point d'incidence, la surface réfléchissante ou réfringente est intérieure à la surface aplanétique.

On croit souvent que le temps employé par la lumière pour se propager d'un point à un autre en se réfléchissant ou en se réfractant est toujours un minimum. Le théorème précédent montre qu'il n'en est rien, et indique le caractère auquel on peut reconnaître si ce temps est maximum ou minimum : de plus, il apprend à reconnaître les cas exceptionnels dans lesquels ce temps n'est ni minimum ni maximum. Il est à remarquer que ces cas exceptionnels ne peuvent jamais se présenter lorsque la surface réfléchissante ou réfringente est convexe, c'est-à-dire située tout entière du même côté d'un quelconque des plans qui lui sont tangents.

L'erreur que nous venons de signaler provient de ce qu'on ne considère ordinairement que des surfaces réfléchissantes ou réfringentes planes. Lorsque la surface réfléchissante ou réfringente est plane, elle se trouve tout autour du point d'incidence extérieure à la surface aplanétique à laquelle elle est tangente en ce point, et le temps est, en effet, toujours un minimum.

44. Nous n'avons considéré jusqu'ici que le cas d'une réflexion ou d'une réfraction unique; mais le théorème XIX a une portée plus étendue et permet de résoudre le problème général qui consiste à *déterminer la trajectoire que doit suivre un rayon lumineux pour se propager d'un point donné à un autre point donné, en subissant un nombre quelconque de réflexions et de réfractions sur des surfaces données et en traversant un nombre quelconque de milieux homogènes également don-*

nés, la nature du rayon dans chacune des parties de sa trajectoire étant d'ailleurs assignée.

Désignons par a, b, c les coordonnées du point de départ, par a', b', c' celles du point d'arrivée. Soient

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \varphi_1(\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1) = 0, \\ \varphi_2(\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(\xi_n,\ \eta_n,\ \zeta_n) = 0, \end{cases}$$

les équations des surfaces réfléchissantes ou réfringentes que nous supposerons au nombre de n, écrites dans l'ordre où la trajectoire rencontre ces surfaces. Appelons R_1 la partie de la trajectoire comprise entre le point de départ et la première de ces surfaces, R_2 celle comprise entre la première et la seconde,..., R_{n+1} celle comprise entre la dernière surface et le point d'arrivée.

Soient ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2;...; ξ_n, η_n, ζ_n les coordonnées des points où la trajectoire rencontre la première, la seconde,..., la $n^{\text{ième}}$ surface : ce sont ces coordonnées qu'il s'agit de déterminer. Soient encore

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, y, z) = 0, \\ f_{n+1}(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

les équations des surfaces d'onde caractéristiques des milieux où se meuvent respectivement les rayons R_1, R_2,..., R_n, R_{n+1}, surfaces décrites de l'origine comme centre et correspondant à l'unité de temps, chacune de ces équations étant considérée comme ne représentant que la nappe de la surface d'onde caractéristique qui est de même nature que la portion correspondante de la trajectoire.

Appelons enfin T_1 le temps employé par la lumière pour se propager du point a, b, c au point ξ_1, η_1, ζ_1; T_2 le temps employé pour se propager du point ξ_1, η_1, ζ_1 au point ξ_2, η_2, ζ_2,...; T_{n+1} le temps employé pour se propager du point ξ_n, η_n, ζ_n au point a', b', c'.

D'après les équations (B), on aura

$$
(\mathrm{C})\qquad \left\{
\begin{aligned}
& f_1\left(\frac{\xi_1-a}{\mathrm{T}_1},\ \frac{\eta_1-b}{\mathrm{T}_1},\ \frac{\zeta_1-c}{\mathrm{T}_1}\right)=0,\\
& f_2\left(\frac{\xi_2-\xi_1}{\mathrm{T}_2},\ \frac{\eta_2-\eta_1}{\mathrm{T}_2},\ \frac{\zeta_2-\zeta_1}{\mathrm{T}_2}\right)=0,\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
& f_{n+1}\left(\frac{a'-\xi_n}{\mathrm{T}_{n+1}},\ \frac{b'-\eta_n}{\mathrm{T}_{n+1}},\ \frac{c'-\zeta_n}{\mathrm{T}_{n+1}}\right)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, entre chacune des équations (C) et l'équation correspondante du groupe (A), on élimine les variables $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}$, qu'on tire des équations résultantes les valeurs de $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_{n+1}$, et qu'enfin on ajoute ces valeurs deux à deux, on aura n équations de la forme

$$
(\mathrm{D})\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2=\mathfrak{F}_1(a,\ b,\ c,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2,\ \eta_2),\\
& \mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3=\mathfrak{F}_2(\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \xi_3,\ \eta_3),\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
& \mathrm{T}_n+\mathrm{T}_{n+1}=\mathfrak{F}_n(\xi_{n-1},\ \eta_{n-1},\ \xi_n,\ \eta_n,\ a',\ b',\ c').
\end{aligned}
\right.
$$

D'après le théorème XIX, on doit avoir, en considérant ξ_1 et η_1 comme seuls variables dans la première de ces équations; ξ_2 et η_2 comme seuls variables dans la seconde,..., ξ_n et η_n comme seuls variables dans la dernière,

$$
\begin{aligned}
& d(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)=0,\\
& d(\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_3)=0,\\
& \dots\dots\dots\dots,\\
& d(\mathrm{T}_n+\mathrm{T}_{n+1})=0,
\end{aligned}
$$

et, par suite,

$$
\begin{aligned}
& \frac{d\mathfrak{F}_1}{d\xi_1}=0, \qquad \frac{d\mathfrak{F}_1}{d\eta_1}=0,\\
& \frac{d\mathfrak{F}_2}{d\xi_2}=0, \qquad \frac{d\mathfrak{F}_2}{d\eta_2}=0,\\
& \dots\dots, \qquad \dots\dots,\\
& \frac{d\mathfrak{F}_n}{d\xi_n}=0, \qquad \frac{d\mathfrak{F}_n}{d\eta_n}=0.
\end{aligned}
$$

Ces équations, au nombre de $2n$, jointes aux n équations (A), déterminent les $3n$ coordonnées $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots; \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, et, par suite, la trajectoire cherchée.

En général, il y a une solution unique ou un nombre fini de solutions quand le problème est possible, ce qui n'a pas toujours lieu, comme il est facile de s'en assurer. Mais il peut arriver qu'il y ait un nombre infini de solutions correspondant à une courbe sur chacune des surfaces réfléchissantes ou réfringentes : le point d'arrivée est alors un foyer partiel pour un certain groupe de rayons formant une surface continue. Enfin, dans des cas très-particuliers, il peut se faire que les valeurs des inconnues soient complétement indéterminées, ce qui indique que tous les rayons émanant du point de départ après réflexion et réfraction sur les surfaces données vont concourir au point d'arrivée, ou, en d'autres termes, que les surfaces réfléchissantes et réfringentes constituent un système aplanétique par rapport aux deux points donnés.

45. Remarquons encore que, lorsque la lumière peut se propager d'un point à un autre, en subissant un nombre quelconque de réflexions et de réfractions sur des surfaces données, *par plusieurs trajectoires en nombre fini, les temps employés à parcourir ces trajectoires ne sont pas nécessairement égaux*. Mais, lorsque la lumière peut suivre une infinité de trajectoires pour aller du point de départ au point d'arrivée, qui est alors un foyer total ou un foyer partiel, les temps que met la lumière à parcourir ces trajectoires sont nécessairement égaux (34 et 35). En d'autres termes, deux trajectoires partant du même point pour aboutir au même point ne sont nécessairement parcourues en des temps égaux que s'il existe une suite continue de trajectoires également parcourues par la lumière et dont ces deux trajectoires fassent partie.