ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES MÉRAY

Extension aux équations simultanées des formules de Newton pour le calcul des sommes de puissances semblables des racines des équations entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 4 (1867), p. 159-193

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1867_1_4__159_0>

EXTENSION

AUX

ÉQUATIONS SIMULTANÉES DES FORMULES DE NEWTON

POUR

LE CALCUL DES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES DES ÉQUATIONS ENTIÈRES.

PAR M. CHARLES MÉRAY,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

1. La théorie des équations simultanées est encore extrêmement imparfaite : d'abord, il règne en général une grande obscurité sur les opérations qui impliquent plus d'une variable ou inconnue indépendante, puis, les géomètres demandent peut-être trop exclusivement à l'élimination les secrets de cette théorie. On ne peut nier, en effet, les défauts d'une méthode compliquée qui repose précisément sur la destruction préalable des fonctions à étudier et qui d'ailleurs n'atteint pas les équations transcendantes. Il est permis de croire que les efforts des géomètres seraient plus fructueux, s'ils s'attachaient moins à la perfectionner pour tout y réduire, qu'à transporter dans la doctrine des expressions à plusieurs variables ces grandes vérités qui dominent toutes les questions où il en entre une seule : la théorie ordinaire des dérivées et des intégrales, le principe de la résolution d'un polynôme entier en facteurs linéaires, le théorème de Cauchy pour le dénombrement des racines renfermées dans une enceinte donnée, etc.

Je tente ici un essai de ce genre. On sait que les fonctions symétriques des racines d'une équation entière se déduisent des sommes de puissances semblables que les formules de Newton permettent de calculer. De même, celles des solutions de plusieurs équations simultanées dépendent de fonctions symétriques plus simples analogues aux sommes de Newton : ce sont des sommes dont chaque terme est le produit des solutions d'un même système élevées respectivement à des puissances déterminées. Poisson a le premier donné une méthode pour les calculer; j'en propose une autre tirée de principes tout différents. Le procédé de Poisson exige la formation d'une équation finale dont chaque racine est une même fonction linéaire des solutions d'un système quelconque; on cherche ensuite les coefficients des puissances et produits des paramètres de la fonction linéaire dans les sommes des puissances semblables des racines de l'équation finale calculées au moyen des formules de Newton, puis convenablement ordonnées. Le mien consiste à établir entre certaines fonctions à plusieurs variables une identité propre, analogue à celle d'où l'on tire les formules de Newton, et à en déduire comme on le fait de celle-ci des équations linéaires dont les solutions sont précisément les sommes inconnues.

Je ne sais si, dans la pratique, la nouvelle méthode est préférable à l'ancienne; mais fût-elle la plus pénible, qu'elle me semblerait offrir encore un certain intérêt théorique. Elle rétablit en effet l'unité dans un point de l'analyse générale des équations, et fait soupçonner des analogies très-remarquables entre certaines expressions à plusieurs variables et celles que l'on rencontre à chaque pas quand on raisonne sur une seule.

2. Il suffira d'exposer la méthode dans le cas de deux équations à deux inconnues. Soient donc

$$(a)\qquad \begin{cases} (1) \quad f_1(x,y)=0, \\ (2) \quad f_2(x,y)=0. \end{cases}$$

les équations données de degrés m_1, m_2; je supposerai, sauf à examiner le cas contraire dans une autre occasion, que les polynômes homogènes formés dans chaque équation par l'ensemble des termes du degré le plus élevé (nous les nommerons pour abréger les *groupes principaux*), sont *disjoints*, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent s'évanouir simultanément qu'en faisant à la fois $x=0$, $y=0$. Cette dénomination paraît naturelle, car les coefficients de plusieurs fonctions homogènes en même nombre que les variables sont toujours liés par une ou plusieurs relations, quand les fonctions s'annulent à la fois pour un système de valeurs où toutes les variables ne sont pas nulles.

On sait alors par le théorème de Bezout que le système (a) offre précisément $m_1 m_2$ couples de solutions finies égales ou inégales; je rappelle brièvement la démonstration de ce point essentiel.

En vertu de l'hypothèse admise, l'un des groupes principaux, celui de l'équation (1) par exemple, contient un terme indépendant de x; car autrement ils s'évanouiraient tous deux en faisant x égal à zéro et y différent de zéro; donc le coefficient de y^{m_1} dans cette équation est une constante différente de zéro, et en la résolvant par rapport à y, après l'avoir ordonnée, on trouvera, pour toute valeur finie de x, m_1 racines finies,

$$(3) \qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m_1}.$$

Le produit

$$(4) \qquad f_2(x, \eta_1) \ldots f_2(x, \eta_{m_1})$$

est une fonction entière et symétrique de ces racines; il se réduit donc à une fonction entière de x et des quotients obtenus en divisant les coefficients des puissances inférieures de y dans l'équation (1) par celui de y^{m_1} : or ce coefficient est une constante; donc ces quotients sont des fonctions entières de x et le produit (4) en est lui-même une autre $F(x)$.

Maintenant, toute valeur de x appartenant à un couple de solutions des équations (a) vérifiera la suivante :

$$(5) \qquad F(x) = 0,$$

car elle rendra nul l'un au moins des facteurs du produit (4) sans rendre infinis les autres. Réciproquement, toute racine α de l'équation (5) fera partie d'un couple de solutions ; car cette valeur de x annulant le produit (4) réduira à zéro l'un de ses facteurs au moins; la valeur correspondante de y sera celle des racines (3) qui entre dans le facteur nul. Rien n'empêche qu'il y en ait plusieurs, car l'hypothèse $x = \alpha$ peut annuler plusieurs facteurs à la fois.

3. Avant d'aller plus loin, il importe de distinguer les couples *simples* des couples *multiples*. Soit (α, β) un couple de solutions des équations proposées; on a

$$f_1(\alpha, \beta) = 0;$$

donc le développement de $f_1(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$ ne contient pas de terme indépendant de ces différences considérées comme variables indépendantes, et on peut mettre cette fonction sous la forme

$$f_1(x, y) = p_1(x-\alpha) + q_1(y-\beta),$$

p_1, q_1 désignant des fonctions entières de $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$. On peut poser de même

$$f_2(x, y) = p_2(x-\alpha) + q_2(y-\beta)$$

et écrire les équations proposées comme il suit :

$$p_1(x-\alpha) + q_1(y-\beta) = 0,$$
$$p_2(x-\alpha) + q_2(y-\beta) = 0.$$

Soit à présent (α', β') un couple de solutions différent du premier, c'est-à-dire tel, que les différences $(\alpha'-\alpha)$, $(\beta'-\beta)$ ne soient pas toutes deux nulles; on aura évidemment, pour $x = \alpha'$, $y = \beta'$,

$$\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5 bis}$$

Cette équation, qui est entière par rapport à x, y, est donc vérifiée par tout couple autre que (α, β), mais il n'y a pas de raison pour qu'elle le soit par (α, β) lui-même. Quand elle l'est, ce couple de valeurs, qui satisfait déjà aux équations proposées, jouit encore d'une seconde propriété qui n'appartient en général qu'à ceux qui diffèrent de lui : on peut dire qu'il est *multiple;* dans le cas contraire, on le nommera *simple.*

On voit sans peine que, pour $x = \alpha$, $y = \beta$, on a

$$p_1 = \frac{df_1}{dx}, \quad q_1 = \frac{df_1}{dy}, \quad p_2 = \frac{df_2}{dx}, \quad q_2 = \frac{df_2}{dy},$$

et par conséquent

$$\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, *un couple donné sera simple ou multiple selon qu'il ne satisfera* *pas ou satisfera à l'équation*

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 0,$$

qui a pour premier membre le déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées.

L'analogie de ces définitions avec celles de la théorie des équations à une seule inconnue est évidente; le premier membre de l'équation (5 *bis*) joue le rôle du quotient de la division du premier membre d'une équation à une inconnue par la différence entre l'inconnue et une racine; celui de l'équation (6) correspond à la dérivée première de ce polynôme. Cette analogie se soutiendra dans la généralisation des formules de Newton.

4. On peut au surplus justifier encore ces définitions par les considérations suivantes. Quand les coefficients des équations (a) rendus variables deviennent infiniment voisins de leurs valeurs actuelles, il peut se faire que plusieurs couples distincts des nouvelles équations aient leurs éléments respectivement infiniment voisins de ceux d'un même couple des proposées. Les racines de ce couple-limite satisfont alors non-seulement aux équations données, mais encore à une série d'équations entières dont le nombre est inférieur d'une unité à celui des couples variables dont il est la limite commune. Or, ces équations comprennent toujours la relation (6).

En effet, soient (x', y'), $(x' + \Delta x', y' + \Delta y')$ deux des couples variables dont il s'agit : $\Delta x'$, $\Delta y'$ sont des quantités infiniment petites; soient encore $f'_1\ (x, y)$, $f'_2\ (x, y)$ ce que deviennent les premiers membres des équations proposées après la variation des coefficients. On aura

$$(7)\qquad \begin{cases} f'_1(x', y') = 0, & f'_1(x' + \Delta x', y' + \Delta y') = 0, \\ f'_2(x', y') = 0, & f'_2(x' + \Delta x', y' + \Delta y') = 0, \end{cases}$$

ou, en développant les premiers membres des dernières équations et ayant égard aux premières,

$$\frac{df'_1}{dx'}\Delta x' + \frac{df'_1}{dy'}\Delta y' + R_1 = 0,\quad \frac{df'_2}{dx'}\Delta x' + \frac{df'_2}{dy'}\Delta y' + R_2 = 0,$$

R_1, R_2 étant des sommes de termes proportionnels à des puissances et produits de $\Delta x'$, $\Delta y'$ dont les degrés, par rapport à ces quantités, surpassent le premier. On en déduit

$$\begin{vmatrix} \frac{df'_1}{dx'}, & \frac{df'_1}{dy'} \\ \frac{df'_2}{dx'}, & \frac{df'_2}{dy'} \end{vmatrix} + \left[\frac{R_1}{\Delta x'}\frac{df'_2}{dy'} - \frac{R_2}{\Delta x'}\frac{df'_1}{dy'}\right] = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{df'_1}{dx'}, & \frac{df'_1}{dy'} \\ \frac{df'_2}{dx'}, & \frac{df'_2}{dy'} \end{vmatrix} + \left[\frac{R_2}{\Delta y'}\frac{df'_1}{dx'} - \frac{R_1}{\Delta y'}\frac{df'_2}{dx'}\right] = 0.$$

Si maintenant le rapport $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ne croît pas indéfiniment, il résulte de la nature de R_1 et R_2 que le dernier terme de la première équation a zéro pour limite; si au contraire $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ est infini, $\frac{\Delta x'}{\Delta y'}$ est infiniment petit, et on pourra affirmer que le second terme de la dernière équation tend vers zéro. Donc, comme il fallait le prouver, on a, dans les deux cas,

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx}, & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx}, & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} = \lim. \begin{vmatrix} \frac{df'_1}{dx'}, & \frac{df'_1}{dy'} \\ \frac{df'_2}{dx'}, & \frac{df'_2}{dy'} \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc l'équation (6) n'est pas vérifiée, le couple (α, β) ne peut être considéré comme la limite commune de plusieurs couples de racines des équations (7), ce qu'on peut exprimer en disant, comme nous le faisons, qu'il est *simple* (*).

5. Dans ce qui suit, je supposerai que les équations proposées n'admettent que des couples de solutions simples, et, partant de cette

(*) Personne, que je sache, ne s'est encore occupé des propriétés relatives à la multiplicité des systèmes de racines des équations simultanées; je n'insiste pas davantage sur un point dont la discussion complète ne serait à sa place que dans une théorie générale des équations simultanées.

hypothèse, je vais démontrer qu'elles ont $m_1 m_2$ couples distincts de racines.

I. *Toute racine α de l'équation finale* (5) *fait partie d'autant de couples de solutions que son degré de multiplicité renferme d'unités.*

Supposons d'abord que, pour $x = \alpha$, aucune des quantités $\frac{df_1(x, \eta)}{d\eta}$ ne soit nulle, c'est-à-dire que l'équation (1) n'ait pas de racines égales. Quand α est une racine simple de l'équation (5), on a, pour $x = \alpha$,

$$F(x) = 0, \quad F'(x) \text{ non} = 0;$$

ou bien, en remplaçant $F(x)$ par le produit (4) et $\frac{d\eta}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation (1) différentiée,

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=m_1} \left(\frac{df_2}{dx} - \frac{df_2}{d\eta_i} \frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{d\eta_i}} \right) \frac{F(x)}{f_2(x, \eta_i)} \text{ non} = 0.$$

Soit maintenant h l'indice de η dans le facteur du produit (4) qui s'évanouit pour $x = \alpha$; $m_1 - 1$ termes de la somme (8) contiennent $f_2(x, \eta_h)$ et sont nuls; donc le terme restant,

$$(9) \qquad \left(\frac{df_2}{dx} - \frac{df_2}{d\eta_h} \frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{d\eta_h}} \right) \frac{F(x)}{f_2(x, \eta_h)},$$

ne peut l'être non plus que les quantités

$$f_2(x, \eta_1), \ldots, \quad f_2(x, \eta_{h-1}), \quad f_2(x, \eta_{h+1}), \ldots, \quad f_2(x, \eta_{m_1});$$

donc, enfin, la valeur β de η_h pour $x = \alpha$ est la seule qui, associée à α, fournisse un couple de solutions des équations proposées.

Quand α est une racine double, on a, pour $x = \alpha$,

$$F(x) = 0, \quad F'(x) = 0, \quad F''(x) \text{ non} = 0.$$

Ici les quantités (8) et (9) s'évanouissent. On en conclut immédiatement que, outre $f_2(x, \eta_h)$, un autre facteur du produit (4), $f_2(x, \eta_k)$, doit se réduire à zéro; car la quantité $\left(\frac{df_2}{dx} - \frac{df_2}{d\eta_h}\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{d\eta_h}}\right)$ prend la valeur

$$-\begin{vmatrix} \frac{df_1}{d\alpha}, & \frac{df_1}{d\beta} \\ \frac{df_2}{d\alpha}, & \frac{df_2}{d\beta} \end{vmatrix} : \frac{df_1}{d\beta},$$

qui ne peut être nulle en vertu de l'hypothèse; d'ailleurs, η_k prend pour la même raison une valeur distincte de β.

Mais la dérivée seconde,

$$\sum_{i=1}^{i=m_1} \frac{d^2 f_2(x, \eta_i)}{dx^2} \frac{F(x)}{f_2(x, \eta_i)} + \sum_{i=1}^{i=m_1} \sum_{j=1}^{j=m_1} \frac{df_2(x, \eta_i)}{dx} \frac{df_2(x, \eta_j)}{dx} \frac{F(x)}{f_2(x, \eta_i) f_2(x, \eta_j)},$$

ne peut devenir zéro. Or, tous les termes de la somme simple contiennent un facteur infiniment petit et aussi ceux de la somme double, sauf celui où η a les indices h et k; donc ce dernier ne peut s'évanouir, et, à part $f_2(x, \eta_h)$, $f_2(x, \eta_k)$, aucun facteur du produit (4) ne peut se réduire à zéro : ainsi, la solution α fait partie de deux couples seulement. On raisonnera de même pour une racine triple, etc.

Supposons, en second lieu, que quelques-unes des quantités $\frac{df_1(x, \eta)}{d\eta}$ s'évanouissent pour $x = \alpha$, l'équation (1) offre alors un ou plusieurs groupes de racines égales, et les fonctions $\eta_1, \dots, \eta_{m_1}$ prennent les valeurs des quantités inégales $\varphi, \chi, \dots$ dont le nombre est inférieur à m_1.

Nommons $p, q, \dots$ les nombres de celles respectivement égales à $\varphi, \chi, \dots$; pour une valeur de x infiniment voisine de α, les racines η, infiniment voisines de φ, se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires (*Recherches sur les fonctions algébriques*, par M. Puiseux, *Journal de M. Liouville*, 1re série, t. XV) tels, que les racines d'un même système sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives des diverses valeurs de $(x - \alpha)^{\frac{1}{s}}$, s étant le nombre des termes du système. Une fonction entière quelconque de x

et η, $f_2(x, \eta)$, par exemple, jouit aussi de la même propriété, et les développements des diverses valeurs obtenues pour cette fonction, en prenant successivement pour η les divers termes du système circulaire s, se formeront en remplaçant dans l'un d'eux $(x-\alpha)^{\frac{1}{s}}$ par les s valeurs de ce radical. D'où l'on conclut sans peine que le produit des s valeurs de $f_2(x, \eta)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-\alpha$.

Un autre système circulaire relatif à φ donnera un second produit analogue au premier, et ainsi de suite; de sorte que le produit final P de tous les produits élémentaires correspondant aux divers systèmes circulaires relatifs à φ, c'est-à-dire le produit de toutes les valeurs que donnent à $f_2(x, \eta)$ les p valeurs de η infiniment voisines de φ, est développable suivant les puissances entières de $(x-\alpha)$. Donc les dérivées totales des divers ordres de P conservent toutes des valeurs finies pour $x=\alpha$; de même pour Q, etc.

Je dis maintenant que si $f_2(\alpha, \varphi)$ est nul, la dérivée première de P ne l'est pas; en effet, (α, φ) est un couple de solutions des équations proposées, et, comme on a $\frac{df_1(x, \eta)}{d\eta}=0$ pour $x=\alpha$, on ne peut avoir en même temps $\frac{df_1}{dx}=0$, car autrement le déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées s'évanouirait, contrairement à l'hypothèse, pour $x=\alpha$, $y=\varphi$. Il en résulte (*voir* le Mémoire de M. Puiseux) que les p racines η, qui se réduisent à φ, font partie d'un même système circulaire de p termes, et que l'ordre des différences infiniment petites $\eta-\varphi$, comparées à $x-\alpha$, est $\frac{1}{p}\cdot$ On aura donc

$$\eta=\varphi+\mathrm{A}(x-\alpha)^{\frac{1}{p}}+\mathrm{T},$$

et par conséquent

$$f_2(x, \eta)=\mathrm{B}(x-\alpha)^{\frac{1}{p}}+\mathrm{U}.$$

T et U désignent des séries de termes proportionnels à des puissances de $(x-\alpha)^{\frac{1}{p}}$ supérieures à la première; A est une constante non $=0$ et

B une quantité égale à A $\left(\frac{df_2}{dy}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\varphi}}$, et par suite différente de zéro, car le déterminant des dérivées partielles, qui se réduit ici à $\left[\frac{df_1}{dx}\,\frac{df_2}{dy}\right]_{\substack{x=\alpha\\ y=\varphi}}$, ne peut s'évanouir. Il n'y a pas de terme constant, puisque $f_2(x,\eta)$ est nul pour $x=\alpha$.

En faisant donc le produit des p valeurs de $f_2(x,\eta)$, on trouvera

$$P = -(-1)^p B^p (x-\alpha) + V,$$

V étant une série de termes contenant des puissances entières de $x-\alpha$ supérieures à la première, et, par conséquent,

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{x=\alpha} = -(-1)^p B^p \text{ non } = 0\,(^*).$$

Ainsi le produit (4) se partage, dans le cas présent, en facteurs P, Q,... jouissant précisément des propriétés des facteurs élémentaires $f_2(x,\eta)$ qui ont servi de base à l'examen du premier cas. Les valeurs-limites de η, qui entrent dans l'un, diffèrent de toutes celles qui entrent dans les autres; leurs dérivées des divers ordres conservent des valeurs finies, et jamais leurs dérivées premières ne s'évanouissent en même temps qu'eux. En raisonnant donc comme ci-dessus, on arrivera au résultat qu'il s'agissait d'établir.

II. *Le degré de l'équation* (5), *et par conséquent la somme des degrés de multiplicité de ses diverses racines, est égal à* $m_1 m_2$.

Nous allons reconnaître en effet que, pour x infini, le rapport $\frac{F(x)}{x^{m_1 m_2}}$ converge vers une limite finie différente de zéro. Dans cette hypothèse, la quantité $\frac{\eta}{x}$ converge toujours vers une certaine limite ρ, car le coefficient de y^{m_1} dans l'équation (1) n'est pas nul; de plus, le groupe principal de cette équation s'évanouit pour $x=1$, $y=\rho$. Le rapport

---

(*) M. Puiseux a écarté de ses recherches les fonctions algébriques provenant d'équations non irréductibles; mais on peut aisément s'assurer que cette restriction n'altère pas l'exactitude de nos conclusions.

$\frac{f_2(x, \eta)}{x^{m_2}}$ converge évidemment vers le résultat de la substitution de 1 et ρ à x et y dans le groupe principal de l'équation (2); or cette limite ne peut être nulle, car autrement les deux groupes principaux s'évanouiraient en même temps pour les valeurs non toutes deux égales à 0 : $x=1$, $y=\rho$. Donc, ce rapport et les $m_1 - 1$ analogues ont des limites finies qui ne sont pas nulles non plus que leur produit.

6. Ces développements me paraissent nécessaires pour fixer le sens du théorème de Bezout, dont l'exposition ordinaire laisse évidemment beaucoup à désirer. Je passe à la démonstration d'un théorème indispensable à nos recherches, et d'ailleurs extrêmement important en lui-même. Il s'appuie sur le lemme suivant :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction entière n'admettant aucun facteur entier variable de degré inférieur au sien, ou dont les facteurs premiers sont tous différents; soit encore $\Phi(x, y)$ une autre fonction entière quelconque. Si toutes les solutions finies de l'équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

vérifient la suivante :

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{10}$$

on aura identiquement

$$\Phi(x, y) = Q\varphi(x, y), \tag{11}$$

où Q *est une autre fonction entière.*

Si $\varphi(x, y)$ est une fonction première, ordonnons-la par rapport à y et nommons A le coefficient de la plus haute puissance de cette variable, qui est généralement un polynôme en x. L'équation

$$\frac{\varphi(x, y)}{A} = 0, \tag{12}$$

considérée comme liant l'inconnue y au paramètre x, est évidemment irréductible. Son premier terme a pour coefficient l'unité, et ses racines, qui sont nécessairement finies quand on n'a pas $A = 0$, vérifient toutes l'équation (10). Donc le premier membre de cette dernière est divisible par celui de l'équation (12), et le quotient Q' est une fonction entière par rapport à y et aussi par rapport à x; au moins les coefficients de y ne peuvent-ils contenir des fractions ayant d'autres dénominateurs que A ou des facteurs de A. On a donc

$$\Phi(x, y) = \frac{Q'}{A}\varphi(x, y), \tag{13}$$

pour toutes les valeurs de y et pour toutes celles de x qui ne réduisent pas A à zéro. Nommons a une racine de

$$A = 0, \tag{14}$$

b une valeur de y qui ne vérifie pas l'équation

$$\varphi(a, y) = 0,$$

et après avoir fait $y = b$ dans (13), faisons converger x vers a. Le premier membre a pour limite $\Phi(a, b)$; le dernier facteur du second tend vers la limite différente de zéro $\varphi(a, b)$, donc $\frac{Q'}{A}$ converge vers une limite finie. Comme la quantité b peut être choisie d'une infinité de manières, chacun des coefficients des puissances de y dans $\frac{Q'}{A}$ converge aussi vers une limite finie, et il en est de même relativement à toute autre racine de l'équation (14). D'où l'on conclut sans peine la possibilité d'effectuer dans $\frac{Q'}{A}$ des réductions propres à faire disparaître tous les dénominateurs. C'est ce qu'il fallait établir.

Quand $\varphi(x, y)$ est un produit de facteurs premiers différents φ_1 $\varphi_2 \ldots$, on ne peut avoir $\varphi_1 = 0$ sans avoir en même temps $\varphi = 0$, et, par suite, $\Phi = 0$; donc on aura, par ce qui précède,

$$\Phi = Q_1 \varphi_1. \tag{15}$$

Les solutions finies de l'équation

$$\varphi_2 = 0$$

ne peuvent toutes annuler φ_1, sans quoi φ_1 serait divisible par φ_2, et par conséquent cette fonction serait ou composée, ou égale à φ_2, contrairement à ce que nous avons supposé. Il en résulte que les solutions de l'équation précédente qui n'annulent pas φ_1 réduisent à zéro Φ, et même, en vertu de l'équation (15), Q_1; mais cette fonction est continue, donc elle s'évanouit même pour les valeurs des variables qui annulent φ_1 et φ_2 à la fois, et on aura, comme nous l'avons prouvé tout à l'heure,

$$Q_1 = Q_2\,\varphi_2,$$

puis, de même,

$$Q_2 = Q_3\,\varphi_3,$$
$$\dots\dots\dots,$$

d'où l'on tire en définitive

$$\Phi = Q\,\varphi_1\,\varphi_2\dots = Q\,\varphi,$$

Q_2, Q_3,..., Q étant toutes des fonctions entières.

7. Théorème fondamental. — *Si les équations données*

$$(a) \qquad \begin{cases} (1) & f_1(x, y) = 0, \\ (2) & f_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

sont soumises aux conditions ci-dessus posées, et qui consistent en ce que 1° *leurs groupes principaux sont disjoints;* 2° *leurs couples de solutions sont tous simples, toute fonction entière* $F(x, y)$ *des variables indépendantes* x, y *qui s'évanouit pour tous leurs couples de solutions est liée à leurs premiers membres par la relation*

$$(16) \qquad F = P_1 f_1 + P_2 f_2,$$

où P_1, P_2 *sont des fonctions entières.*

Et si μ, μ_1, μ_2 *désignent les degrés des trois fonctions* F, P_1, P_2, *on peut supposer en même temps ou*

$$(17) \qquad \mu_1 = \mu - m_1, \qquad \mu_2 \gtreqless \mu - m_2,$$

ou

$$(18) \qquad \mu_1 \gtreqless \mu - m_1, \qquad \mu_2 = \mu - m_2.$$

Comme nous l'avons reconnu (n° 2), l'équation (1) peut être supposée du degré m_1 par rapport à y et ne fournir que des racines finies quand on la résout par rapport à cette inconnue, en considérant l'autre comme une variable indépendante. Nommons η une quelconque des racines; le rapport

$$\frac{F(x, \eta)}{f_2(x, \eta)}, \tag{19}$$

étant une fonction rationnelle d'une racine de l'équation (1) et du paramètre x, est équivalent à une autre fonction rationnelle $\Phi_2(x, \eta)$ des mêmes quantités, mais entière par rapport à η, et d'un degré inférieur au moins d'une unité à m_1 degré de η dans l'équation (1). (*Voir*, pour la démonstration bien connue de cette proposition d'analyse algébrique, le *Cours d'Algèbre supérieure*, par M. J.-A. Serret, 2e édition, p. 38 et suiv.).

Comme η reste finie pour toutes les valeurs finies de x, la fonction Φ_2 jouit de la même propriété, sauf peut-être pour des valeurs correspondantes de x, η appartenant à un même couple de solutions (α, β) des équations simultanées (a), et qui réduisent à zéro le dénominateur f_2. Mais on peut s'assurer que le rapport (19) conserve dans ce cas même une valeur finie; il suffit d'observer que son numérateur F s'évanouit lui-même par hypothèse, et de chercher ensuite, à l'aide des procédés ordinaires du calcul différentiel, la limite vers laquelle il converge quand x tend vers α et η vers β.

Si $\left(\frac{df_1}{dy}\right)_{\substack{x=\alpha \\ x=\beta}}$ n'est pas nulle, les dérivées totales des deux termes par rapport à x prennent pour $x = \alpha$ les valeurs finies

$$\begin{vmatrix} \frac{dF(\alpha, \beta)}{d\alpha} & \frac{dF(\alpha, \beta)}{d\beta} \\ \frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha} & \frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta} \end{vmatrix} : \frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{df_2(\alpha, \beta)}{d\alpha} & \frac{df_2(\alpha, \beta)}{d\beta} \\ \frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha} & \frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta} \end{vmatrix} : \frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta},$$

et la dernière ne peut être nulle, car elle est proportionnelle au déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées qui n'admettent que des couples de solutions simples (n° 3).

Donc, la valeur cherchée de l'expression (19) se réduit au rapport de ces dérivées, et par suite à une quantité finie.

Quand $\dfrac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta}$ est nulle, on arrive au même résultat en changeant de variables. Nommons p, q, r, s quatre constantes dont le déterminant $(ps - qr)$ ne soit pas nul, et posons

$$\begin{aligned} x &= px' + q\eta', \quad \eta = rx' + s\eta'; \\ \alpha &= p\alpha' + q\beta', \quad \beta = r\alpha' + s\beta'; \end{aligned}$$

α', β' sont des quantités finies vérifiant les équations simultanées

$$(a') \qquad \begin{cases} f_1(px' + qy', rx' + sy') = f'_1(x', y') = 0, \\ f_2(px' + qy', rx' + sy') = f'_2(x', y') = 0; \end{cases}$$

les variables x', η', dont la seconde est fonction de la première, sont liées par l'équation

$$f'_1(x', \eta') = 0,$$

et le rapport (19) devient

$$\frac{F'(x', \eta')}{f'_2(x', \eta')}.$$

Nous avons à chercher sa valeur pour $x' = \alpha'$, $\eta' = \beta'$; on trouvera aisément

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{df'_1}{dx'} & \dfrac{df'_1}{dy'} \\ \dfrac{df'_2}{dx'} & \dfrac{df'_2}{dy'} \end{matrix}\right|_{\substack{x'=\alpha' \\ y'=\beta'}} = (ps - qr) \left|\begin{matrix} \dfrac{df_1}{dx} & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx} & \dfrac{df_2}{dy} \end{matrix}\right|_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}} \text{non} = 0$$

et

$$\frac{df'_2(x', \eta')}{dx'} = \left|\begin{matrix} \dfrac{df'_2}{dx'} & \dfrac{df'_2}{dy'} \\ \dfrac{df'_1}{dx'} & \dfrac{df'_1}{dy'} \end{matrix}\right| : \frac{df'_1}{dy'}.$$

Donc, l'hypothèse $x' = \alpha'$ rendra comme ci-dessus la dérivée du dénominateur du nouveau rapport égale à une quantité finie différente de zéro, si l'on a

$$\left(\frac{df'_1}{dy'}\right)_{\substack{x'=\alpha' \\ y'=\beta'}} \text{non} = 0;$$

C'est ce qui a toujours lieu quand on prend q non $=0$, comme il est permis de le faire, car

$$\frac{df'_1(\alpha', \beta')}{d\beta'} = q\,\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha} + s\,\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\beta} = q\,\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha},$$

et $\frac{df_1(\alpha, \beta)}{d\alpha}$ ne peut s'évanouir, sans quoi le déterminant des dérivées partielles s'évanouirait lui-même, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, la fonction $\Phi_2(x, \eta)$ conserve une valeur finie pour toute valeur finie de x; à présent, il est facile de prouver qu'elle est aussi entière par rapport à cette variable. En l'ordonnant suivant les puissances de η, on obtiendra

$$\Phi_2(x, \eta) = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \ldots + A_{m_1-1}\eta^{m_1-1},$$

A_0, $A_1, \ldots, A_{m_1-1}$ étant des fonctions rationnelles de x; et, en remplaçant η successivement par les m_1 racines de l'équation (1), on trouvera les m_1 équations linéaires

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_2(x, \eta_1) = A_0 + A_1\eta_1 + \ldots + A_{m_1-1}\eta_1^{m_1-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_2(x, \eta_{m_1}) = A_0 + A_1\eta_{m_1} + \ldots + A_{m_1-1}\eta_{m_1}^{m_1-1}, \end{array}\right.$$

d'où nous allons tirer les valeurs des quantités A, qui correspondent à une même valeur de x.

Les formules de Cramer donnent

$$A_j = \frac{\Sigma k_{i,j}\,\Phi_2(x, \eta_i)}{\Delta},$$

où k désigne une fonction entière des quantités η, et Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \ldots & \eta_1^{m_1-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 \ldots & \eta_2^{m_1-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \eta_{m_1} & \eta_{m_1}^2 \ldots & \eta_{m_1}^{m_1-1} \end{vmatrix}.$$

Le numérateur de A_j est toujours fini, puisque les valeurs de η et de $\Phi_2(x, \eta)$ le sont elles-mêmes. Le dénominateur ne peut être nul que si quelques-unes des quantités η sont numériquement égales pour la valeur de x considérée. En effet, on déduit successivement des propriétés élémentaires des déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \ldots & \eta_1^{m_1-1} \\ 0 & \eta_2-\eta_1 & \eta_2^2-\eta_1^2 \ldots & \eta_2^{m_1-1}-\eta_1^{m_1-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \eta_{m_1}-\eta_1 & \eta_{m_1}^2-\eta_1^2 \ldots & \eta_{m_1}^{m_1-1}-\eta_1^{m_1-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\eta_2-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_1) \begin{vmatrix} 1 & \eta_2+\eta_1 & \eta_2^2+\eta_2\eta_1+\eta_1^2 \ldots & \eta_2^{m_1-2}+\eta_2^{m_1-3}\eta_1+\ldots+\eta_1^{m_1-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \eta_{m_1}+\eta_1 & \eta_{m_1}^2+\eta_{m_1}\eta_1+\eta_1^2 \ldots & \eta_{m_1}^{m_1-2}+\eta_{m_1}^{m_1-3}\eta_1+\ldots+\eta_1^{m_1-2} \end{vmatrix}$$

$$= (\eta_2-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_1) \begin{vmatrix} 1 & \eta_2 & \eta_2^2 \ldots & \eta_2^{m_1-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \eta_{m_1} & \eta_{m_1}^2 \ldots & \eta_{m_1}^{m_1-2} \end{vmatrix},$$

et, par suite,

$$\Delta = (\eta_2-\eta_1)(\eta_3-\eta_1)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_1)(\eta_3-\eta_2)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_2)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_{m_1-1}).$$

Donc, ce cas excepté, la valeur de A_j est nécessairement finie pour toute valeur finie de x; cette fonction de x est donc entière, puisque nous savons d'autre part qu'elle est rationnelle.

Quand plusieurs des quantités $\eta_1, \ldots, \eta_{m_1}$ deviennent égales, quelques-unes des équations (20) deviennent identiques, et le système entier ne suffit plus à la détermination des valeurs de $A_0, \ldots, A_{m_1}$. Mais il existe alors entre ces quantités d'autres équations linéaires qui se déduisent des équations devenues inutiles par des différentiations relatives à η, et qui, jointes à celles que l'on doit conserver, donnent un déterminant non $= 0$, dont la considération conduit au même résultat. Que l'on ait par exemple $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_k$, $\eta_1, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_{m_1}$ étant toutes inégales; on aura évidemment non-seulement

$$\Phi_2(x, \eta_1) = A_0 + A_1\eta_1 + \ldots + A_{m_1-1}\eta_1^{m_1-1},$$

mais encore les $k-1$ équations

$$\frac{d\Phi_2(x, \eta_1)}{d\eta_1} = A_1 + A_2 2\eta_1 + \ldots + A_{m_1-1}(m_1-1)\eta_1^{m_1-2},$$

$$\frac{d^2\Phi_2(x, \eta_1)}{d\eta_1^2} = A_2 2 + \ldots + A_{m_1-1}(m_1-1)(m_1-2)\eta_1^{m_1-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{k-1}\Phi_2(x, \eta_1)}{d\eta_1^{k-1}} = \ldots + A_{m_1-1}(m_1-1)\ldots(m_1-k+1)\eta_1^{m_1-k},$$

qu'on devra substituer dans le système (20) aux $k-1$ qui suivent la première. Le déterminant Δ' du nouveau système est donc égal à

$$\frac{d^{k-1}}{d\eta_k^{k-1}}\,\frac{d^{k-2}}{d\eta_{k-1}^{k-2}}\cdots\frac{d}{d\eta_2}\Delta,$$

pourvu que les différentiations soient commencées par la droite, et qu'après chacune d'elles la variable η, à laquelle elle se rapporte, soit remplacée par η_1. On trouve, par un calcul très-simple,

$$\begin{aligned}\Delta' = 1.\overline{1.2}.\overline{1.2.3}\ldots\overline{1.2\ldots k-1}\,&[(\eta_{k+1}-\eta_1)(\eta_{k+2}-\eta_1)\ldots(\eta_{m_1}-\eta_1)]^k\\ &\times(\eta_{k+2}-\eta_{k+1})\ldots(\eta_{m_1}-\eta_{k+1})\ldots(\eta_{m_1}-\eta_{m_1-1});\end{aligned}$$

Δ' n'est donc pas nul.

En raisonnant de même quand il y a plusieurs groupes de quantités égales dans les racines η, on arrive à un déterminant proportionnel à un produit de puissances de différences de quantités inégales, et partant non $=0$. Ainsi, dans tous les cas, les quantités $A_0,\ldots,A_{m_1-1}$ sont finies en même temps que x, et $\Phi_2(x,\eta)$ est une fonction entière aussi bien par rapport à x que par rapport à η.

Considérons maintenant la fonction entière

$$(21) \qquad F(x,y)-\Phi_2(x,y)f_2(x,y);$$

elle s'évanouit quand on remplace y par une des racines η, c'est-à-dire pour tous les couples de solutions finies de l'équation (1); d'ailleurs, le premier membre de cette équation ne peut contenir plus d'une fois le même facteur premier ; car, si on avait

$$f_1 = H^2 K,$$

H, K étant deux fonctions entières, on aurait aussi

$$g_1 = h^2 k,$$

g_1, h, k désignant les groupes principaux de ces trois polynômes. Comme g_1 et le groupe principal de f_2 ne peuvent s'évanouir ensemble que pour $x=y=0$, il en serait de même pour h^2 et ce même groupe, c'est-à-dire que les groupes principaux de f_2, H^2 seraient disjoints, et les équations simultanées

$$H^2=0,\quad f_2=0$$

auraient au moins (nos 2 et 5, II) un couple de solutions finies (α, β), qui appartiendrait aussi aux équations (a). Mais on trouverait pour $x=\alpha, y=\beta$,

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 2\mathrm{HK} \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{H}}{dx} & \frac{d\mathrm{H}}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} + \mathrm{H}^2 \begin{vmatrix} \frac{d\mathrm{K}}{dx} & \frac{d\mathrm{K}}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 0,$$

et, contrairement à l'hypothèse, les équations proposées admettraient au moins un couple de racines multiples. Donc, en vertu du lemme ci-dessus démontré, la fonction (21), divisée par $f_1(x, y)$, donne un certain quotient entier $\Phi_1(x, y)$, et l'on a

$$\mathrm{F} = \Phi_1 f_1 + \Phi_2 f_2; \tag{22}$$

c'est le premier point qu'il fallait établir.

Appelons μ'_1, μ'_2 les degrés de Φ_1, Φ_2, et, comme nous l'avons fait, μ celui de F; si les sommes $\mu'_1 + m_1$, $\mu'_2 + m_2$ sont inégales, la plus grande est nécessairement égale à μ, car elle mesure le degré du second membre de l'équation (22), et par conséquent celui du premier. On a donc, soit

$$\mu'_1 = \mu - m_1, \quad \mu'_2 < \mu - m_2,$$

soit

$$\mu'_1 < \mu - m_1, \quad \mu'_2 = \mu - m_2.$$

Si au contraire ces sommes sont égales et si leur valeur commune ne surpasse pas μ, on a évidemment

$$\mu'_1 = \mu - m_1, \quad \mu'_2 = \mu - m_2;$$

mais cette valeur commune peut surpasser μ, car rien n'empêche que dans la réduction du second membre de (22) à un polynôme ordonné suivant les puissances des variables, les termes de degrés supérieurs à μ ne se détruisent mutuellement. Soient alors φ_1, φ_2 les groupes principaux de Φ_1, Φ_2 et g_1, g_2 ceux de f_1, f_2; l'ensemble des termes de degré $\mu'_1 + m_1$ ou $\mu'_2 + m_2$ dans le second membre de (22) développé sera $\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2$; mais cette quantité est identiquement nulle, car le degré du second membre ne peut surpasser celui du premier. De la relation

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 = 0$$

on tire

$$\varphi_1 = -\frac{\varphi_2 g_2}{g_1}.$$

Les polynômes homogènes g_1, g_2 sont décomposables en facteurs du premier degré, et il est visible qu'aucun facteur $rx+sy$ de g_1 ne peut diviser g_2, car en appelant k une quantité différente de zéro, les valeurs

$$x = ks, \quad y = -kr,$$

qui ne peuvent être toutes deux égales à zéro, annulant $rx+sy$, annuleraient aussi à la fois g_1 et g_2, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc g_1, premier à g_2, divise φ_2, et l'on a

$$\varphi_2 = \theta g_1, \tag{23}$$

et, par conséquent,

$$\varphi_1 = -\theta g_2, \tag{24}$$

θ désignant un polynôme homogène de degré $\mu'_2 - m_1 = \mu'_1 - m_2$. Ajoutons membre à membre l'équation (22) et l'identité

$$0 = \theta f_2 . f_1 - \theta f_1 . f_2,$$

il viendra

$$F = (\Phi_1 + \theta f_2) f_1 + (\Phi_2 - \theta f_1) f_2,$$

et les fonctions qui multiplient f_1, f_2 ne sont plus que des degrés $\mu'_1 - 1$, $\mu'_2 - 1$, au plus, car leurs termes de degrés μ'_1, μ'_2 se détruisent réciproquement en vertu des relations (23), (24).

En raisonnant comme tout à l'heure ou en employant cette méthode de réduction selon le cas, on arrivera évidemment toujours à trouver, pour les multiplicateurs de f_1, f_2 dans la formule (22), des fonctions entières P_1, P_2 dont les degrés μ_1, μ_2 vérifient l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités (17), (18), car la plus grande des sommes $\mu_1 + m_1$, $\mu_2 + m_2$ ne peut s'abaisser au-dessous de μ (*).

(*) Il est aisé d'obtenir les solutions entières de l'équation indéterminée

$$f_1 \Phi_1 + f_2 \Phi_2 = F$$

8. Occupons-nous à présent des sommes des puissances semblables des solutions des équations (a). Nous avons vu (n° 3) qu'en appelant

---

entre les fonctions inconnues Φ_1, Φ_2. Comme on a

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 = F,$$

on aura aussi

$$f_1(\Phi_1 - P_1) + f_2(\Phi_2 - P_2) = 0;$$

d'où

$$\Phi_1 - P_1 = -\frac{f_2(\Phi_2 - P_2)}{f_1}.$$

Or f_1 et f_2 ne peuvent avoir aucun facteur entier commun, car autrement leurs groupes principaux ne seraient pas disjoints; donc

$$\Phi_2 = P_2 + \Theta f_1,$$

et par suite

$$\Phi_1 = P_1 - \Theta f_2;$$

Θ désignant une fonction entière.

Les fonctions données par ces formules sont évidemment les plus générales qui vérifient l'équation indéterminée, si l'on prend pour Θ une fonction entière arbitraire.

Quand Θ est un polynôme de degré fixe à coefficients variables, l'équation

$$\Phi_1 = 0$$

représente une courbe variable de degré déterminé passant par les points communs aux deux courbes

$$P_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

de même l'équation

$$\Phi_2 = 0$$

correspond à un faisceau de courbes ayant pour sommets les points d'intersection des courbes

$$P_2 = 0, \quad f_1 = 0,$$

et le lieu des intersections des éléments correspondants des faisceaux (Φ_1), (Φ_2) est la courbe

$$F = 0.$$

Aussi, *pour obtenir un mode de génération d'une courbe algébrique par les intersections mutuelles de deux faisceaux de courbes variables, il suffit de connaître deux courbes fixes dont tous les points d'intersection appartiennent à la proposée.* Cette remarque peut être fort utile en géométrie; en particulier elle conduit tout naturellement aux nouvelles générations trouvées par M. Chasles pour les courbes du troisième et du quatrième degré.

Il est bon d'observer en passant que les limites inférieures des degrés de P_1, P_2, que nous avons trouvées tout à l'heure, n'existeraient pas nécessairement si f_1, f_2 n'avaient pas leurs groupes principaux disjoints. En prenant, par exemple, pour Θ une fonction d'un degré suffisamment élevé, on peut rendre les degrés de Φ_1, Φ_2 bien supérieurs à μ, et F sera décomposée

(α, β) un couple de solutions et posant

$$f_1 = p_1(x-\alpha) + q_1(y-\beta),$$
$$f_2 = p_2(x-\alpha) + q_2(y-\beta),$$

---

en la somme des produits de Φ_1, Φ_2 par des fonctions entières f_1, f_2 dont les degrés ne peuvent être abaissés au-dessous des différences entre celui de F et ceux de Φ_1, Φ_2 puisqu'elles sont négatives. Il est évident que les groupes principaux de Φ_1, Φ_2 ne sont pas disjoints.

Cette proposition, que je démontre ici pour en faire un usage fort restreint, a lieu pour des fonctions entières à un nombre quelconque de variables; on l'établirait sans peine en suivant notre méthode. Je n'ose pas encore m'en attribuer la découverte, bien que je ne l'aie pas encore vue énoncée, encore moins démontrée généralement. Elle me paraît être d'une importance capitale dans la doctrine des expressions à plusieurs variables ou inconnues simultanées, où elle joue le même rôle que la suivante dans la théorie des équations à une seule inconnue : *Quand une équation entière admet toutes les racines d'une autre équation qui n'en a point de multiples, son premier membre est divisible par celui de cette autre.*

J'en citerai les applications suivantes, qui se présentent d'elles-mêmes :

1° *Si deux courbes algébriques de degré m, m_1 ont $m_1 m_2$ points d'intersection sur une courbe de degré m_2, les $m_1(m-m_2)$ autres sont sur une même autre courbe de degré $m-m_2$.* En effet, les $m_1 m_2$ points d'intersection des courbes (m_1), (m_2) sont tous sur la courbe (m); donc, en appelant f, f_1, f_2, les premiers membres des équations des courbes proposées, on a

$$f = p_1 f_1 + p_2 f_2,$$

où p_1, p_2 sont des polynômes entiers. Donc, les points communs aux courbes f_1, f qui n'appartiennent pas à f_2, il y en a $m_1(m-m_2)$, sont situés sur la courbe $p_2 = 0$, dont le degré, comme nous l'avons reconnu, est généralement égal à $m-m_2$.

Exemple. — *Quand deux courbes du troisième degré ont six points d'intersection sur une conique, les trois autres sont en ligne droite.* On établit ordinairement cette proposition par une méthode toute différente.

2° Le premier membre F de l'équation de degré $m_1 m_2$ qui a pour racines les valeurs d'une même inconnue dans les couples de solution des équations (a) peut évidemment être considéré comme une fonction des variables x, y (bien qu'elle n'en contienne qu'une seule) qui s'évanouit pour tous les couples de solutions des équations proposées. On a donc, en vertu de notre théorème fondamental,

$$F = p_1 f_1 + p_2 f_2$$

p_1 et p_2 étant des fonctions entières. Donc, *on peut toujours éliminer une des variables en ajoutant membre à membre les équations proposées multipliées par des polynômes entiers convenablement choisis.*

Quand les équations simultanées ne satisfont pas aux conditions posées, le théorème fondamental a toujours lieu, mais avec des modifications dans l'énoncé que je n'examinerai pas en ce moment.

où p_1, q_1, p_2, q_2 sont des fonctions entières de x, y et aussi de α, β, le déterminant

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}$$

jouit de la double propriété :

1° De s'évanouir quand on prend pour x, y les éléments de tout couple de solutions autre que (α, β);

2° De prendre la même valeur que le déterminant

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

pour $x = \alpha$, $y = \beta$. Il en résulte que si on calcule les $m_1 m_2$ déterminants semblables à (25) en considérant successivement les $m_1 m_2$ couples de solutions des équations proposées, leur somme prend la même valeur que l'expression (26) chaque fois que x, y reçoivent les valeurs d'un couple de solutions. Donc la différence

$$\sum \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

s'évanouit pour toutes les valeurs de x, y propres à vérifier les équations proposées, et en vertu du théorème fondamental on a, quelles que soient x, y,

$$(27) \qquad \sum \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2,$$

φ_1, φ_2 étant deux fonctions entières des variables. C'est l'identité d'où nous allons tirer les formules de Newton pour les équations simultanées.

Il résulte du mode de formation de p_1, q_1 que ces quantités sont des fonctions entières de $(x - \alpha)$, $(y - \beta)$ de degré $m_1 - 1$, et si on développe les puissances et produits de ces différences, elles deviendront des fonctions entières de x, y, α, β de degré $m_1 - 1$ par rapport à x, y, et aussi par rapport à α, β; de même, p_2 et q_2 se transforment en des fonctions entières de degré $m_2 - 1$ par rapport à x, y et α, β. Donc les déterminants semblables à (25) sont du degré $m_1 + m_2 - 2 = \mu$ par rapport, soit à x, y, soit à α, β, et leur somme est une fonction de degré μ en x, y dont les coefficients sont des fonctions linéaires des sommes symétriques

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_0 = m_1 m_2, \\ \sum \alpha, \sum \beta, \\ \sum \alpha^2, \sum \alpha\beta, \sum \beta^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum \alpha^\mu, \sum \alpha^{\mu-1}\beta, \dots, \sum \alpha\beta^{\mu-1}, \sum \beta^\mu, \end{array}\right.$$

dont le nombre est

$$1 + 2 + 3 + \dots + \mu + 1 = \frac{(\mu + 2)(\mu + 1)}{1.2}.$$

Le déterminant des dérivées partielles étant lui-même du degré μ, le premier membre de l'équation (27) est aussi du même degré, et, comme on l'a vu (n° 7), on pourra supposer ou que le degré de φ_1 est égal à $\mu - m_1$, et celui de $\varphi_2 \mathrel{\substack{=\\<}} \mu - m_2$, ou que le premier est $< \mu - m_1$ et le second $= \mu - m_2$. On pourra donc toujours représenter φ_1, φ_2 par des fonctions entières des degrés $\mu - m_1 = m_2 - 2$, $\mu - m_2 = m_1 - 2$ à coefficients indéterminés dont quelques-uns seront pris égaux à zéro, si l'un des degrés de φ_1 et φ_2 est au-dessous de sa valeur naturelle.

En ordonnant les deux membres de l'équation (27) par rapport aux puissances et produits de x, y, et égalant les coefficients des termes semblables, on obtiendra $\frac{(\mu+2)(\mu+1)}{1.2}$ équations qui contiennent linéairement les sommes inconnues (28) et les coefficients également inconnus des fonctions φ_1, φ_2.

Le nombre des coefficients de φ_1 est

$$1 + 2 + \dots + m_2 - 1 = \frac{m_2(m_2 - 1)}{1.2},$$

celui des coefficients de φ_2 est pareillement $\frac{m_1(m_1-1)}{1.2}$, et par suite le nombre total des inconnues s'élève à

$$\frac{(\mu+2)(\mu+1)}{1.2}+\frac{m_1(m_1-1)}{1.2}+\frac{m_2(m_2-1)}{1.2}.$$

Les équations linéaires dont il s'agit et que nous désignerons, pour abréger, par le signe (p, q), ne suffisent donc pas pour déterminer les sommes cherchées, puisque leur nombre est inférieur à celui de toutes les quantités inconnues.

Mais on remarquera qu'en faisant $x=\alpha, y=\beta$ dans l'équation (1), puis les multipliant successivement par les $\frac{m_2(m_2-1)}{1.2}$ quantités

$$\begin{array}{c} 1 \\ \alpha,\quad \beta, \\ \alpha^2,\quad \alpha\beta,\quad \beta^2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha^{m_2-2},\quad \alpha^{m_2-3}\beta\ldots,\quad \beta^{m_2-2}, \end{array}$$

et faisant la somme des résultats obtenus en remplaçant α, β par les $m_1 m_2$ couples de solutions, on obtient $\frac{m_2(m_2-1)}{1.2}$ nouvelles équations linéaires (s_1) entre les sommes (28); que, pareillement, on peut déduire de l'équation (2) $\frac{m_1(m_1-1)}{1.2}$ autres équations linéaires (s_2) entre les mêmes inconnues; par conséquent on a toujours, outre les équations (p, q), les deux systèmes (s_1), (s_2) qui complètent le nombre d'équations nécessaire au calcul de toutes les inconnues. D'ailleurs, les quantités connues de ces équations sont des fonctions entières des coefficients des équations proposées. *C'est donc l'ensemble des relations* (p, q), (s_1), (s_2) *qui représente les formules de Newton pour les équations simultanées binaires, car elles ramènent le calcul des sommes des puissances semblables des solutions à la résolution de simples équations linéaires.*

9. Les remarques suivantes éclairciront encore cette analyse :

1° Les fonctions entières p_1, q_1 ne sont pas déterminées d'une manière absolue, car elles ne sont assujetties qu'à vérifier l'équation

$$\varpi_1(x-\alpha)+\chi_1(y-\beta)=f_1,$$

d'où l'on tire (*voir* la première note du n° 7)

$$\varpi_1=p_1+\theta_1(y-\beta),\quad \chi_1=q_1-\theta_1(x-\alpha),$$

θ_1 étant une fonction entière quelconque. De même, les valeurs les plus générales de p_2, q_2 sont

$$\varpi_2=p_2-\theta_2(y-\beta),\quad \chi_2=q_2+\theta_2(x-\alpha).$$

D'après cela, la forme la plus générale du déterminant (25) sera

$$\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}+\theta_1[p_2(x-\alpha)+q_2(y-\beta)]+\theta_2[p_1(x-\alpha)+q_1(y-\beta)]$$
$$=\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}+\theta_2 f_1+\theta_1 f_2,$$

et son introduction dans l'équation (27) ne change rien à nos conclusions; on trouvera seulement d'autres valeurs pour les coefficients des fonctions φ_1, φ_2.

Mais voici un résultat important : si on choisit θ_2, θ_1 de telle sorte que l'on ait

$$\sum\theta_2=\varphi_1,\quad \sum\theta_1=\varphi_2,$$

l'identité (27) devient

$$(29)\qquad \sum\begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx}, & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx}, & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix};$$

elle offre alors l'analogie la plus frappante avec l'identité de Newton

$$\sum\frac{F(x)}{x-a}=F'(x).$$

Malheureusement il paraît difficile de déterminer *à priori* ce qu'il y a d'arbitraire dans les fonctions p_1, q_1, p_2, q_2, de manière à ramener l'identité (27) à la forme (29). On peut même se demander si, pour une même équation, cette détermination est indépendante des coefficients de l'autre, c'est-à-dire si f_1 étant donnée, par exemple, p_1, q_1 auront les mêmes valeurs quelle que soit f_2, ce qui ne serait pas sans importance.

2° Pour calculer p_1, q_1, il n'est pas nécessaire d'employer le procédé (n° 3), qui exige l'application de la formule de Taylor, puis le développement ultérieur des puissances et produits de $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$. On peut former ces fonctions par une sorte de division algébrique à deux diviseurs, qui peut être considérée comme l'extension de cette opération élémentaire aux expressions binaires. Voici la disposition du calcul :

1er diviseur.	Dividende f_1.	2me diviseur.
$x-\alpha$	$t_{m_1}+t_{m_1-1}+t_{m_1-2}+\ldots$	$y-\beta$
1er quotient.	Dividendes partiels.	2me quotient.
$u_{m_1-1}+u_{m_1-2}+\ldots$	$\alpha u_{m_1-1}+\beta v_{m_1-1}+t_{m_1-1}$	$v_{m_1-1}+v_{m_1-2}+\ldots$
	$\alpha u_{m_1-2}+\beta v_{m_1-2}+t_{m_1-2}$	
	$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	

t_{m_1}, t_{m_1-1}, $t_{m_2-2}\ldots$ représentent les groupes homogènes de degrés m_1, m_1-1, $m_1-2,\ldots$, dont f_1 est la somme. On *divise* celui de degré le plus élevé par x, y, c'est-à-dire que l'on cherche deux *quotients* u_{m_1-1}, v_{m_1-1} tels que l'on ait

$$x\,u_{m_1-1}+y\,v_{m_1-1}=t_{m_1}.$$

On multiplie ces quotients par α, β en changeant les signes. On écrit la somme des produits au-dessous du *dividende*, et on abaisse le groupe de degré m_1-1 ; on obtient ainsi un second dividende partiel, et ainsi de suite. Le *reste* a toujours la même valeur que $f_1(\alpha, \beta)$ et s'évanouit par conséquent : les *quotients* sont des valeurs de p_1, q_1.

Les divisions partielles peuvent évidemment être opérées d'une infinité de manières dont les combinaisons fournissent toutes les valeurs possibles de p_1, q_1 ; la plus simple en apparence consiste, en vertu de la propriété des fonctions homogènes, à prendre chaque quotient partiel égal à la dérivée par rapport à x ou y du dividende correspondant, divisée par le degré de celui-ci; l'algorithme est ainsi beaucoup simplifié.

On procédera de même pour obtenir p_2, q_2, et plus généralement pour trouver deux fonctions qui, multipliées respectivement par deux autres données, donnent deux produits dont la somme reconstitue une fonction donnée, pourvu toutefois que cette sorte de division soit possible en vertu de notre théorème fondamental.

En prenant les premiers quotients proportionnels aux dérivées des dividendes partiels correspondants, on trouve, pour le premier groupe du déterminant (25) ordonné :

$$\frac{1}{m_1 m_2}\begin{vmatrix} \dfrac{dt_{m_1}}{dx} & \dfrac{dt_{m_1}}{dy} \\ \dfrac{dt'_{m_2}}{dx} & \dfrac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix},$$

et pour celui de la somme de tous les déterminants semblables :

$$\frac{N}{m_1 m_2}\begin{vmatrix} \dfrac{dt_{m_1}}{dx} & \dfrac{dt_{m_1}}{dy} \\ \dfrac{dt'_{m_2}}{dx} & \dfrac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix};$$

t'_{m_2} désigne le groupe principal de l'équation (2) et N le nombre des couples de racines du système proposé. D'autre part, le premier groupe du déterminant des dérivées partielles des premiers membres des équations proposées est :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dt_{m_1}}{dx} & \dfrac{dt_{m_1}}{dy} \\ \dfrac{dt'_{m_2}}{dx} & \dfrac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix}.$$

Maintenant, en égalant les groupes de degré μ dans les deux membres de la relation (27), et désignant par g_{m_2-2}, g'_{m_1-2} les groupes principaux de φ_1, φ_2, on obtient

$$(30)\qquad \left(\frac{N}{m_1 m_2} - 1\right)\begin{vmatrix} \dfrac{dt_{m_1}}{dx} & \dfrac{dt_{m_1}}{dy} \\ \dfrac{dt'_{m_2}}{dx} & \dfrac{dt'_{m_2}}{dy} \end{vmatrix} = t_{m_1} g_{m_2-2} + t'_{m_2} g'_{m_1-2}.$$

Posons

$$y = rx;$$

r étant une racine de l'équation en $\frac{y}{x}$ de degré m_1,

$$\frac{t_{m_1}}{x_{m_1}} = 0\,;$$

la relation (30) devient

$$-m_2\left(\frac{N}{m_1 m_2} - 1\right)\frac{1}{x}\frac{dt_{m_1}}{dy} = g'_{m_1-2},$$

et, par conséquent, après la division des deux membres par x^{m_1-2}, une équation en r de degré $m_1 - 1$ seulement; comme r est une racine quelconque d'une équation de degré m_1, il faut nécessairement que cette dernière équation soit identique, et, par suite, que le coefficient de r^{m_1-1}

$$-(N - m_1 m_2)\tau,$$

τ désignant le coefficient de y^{m_1} dans t_1, soit nul. Or, on peut supposer (n° 2) que τ n'est pas nul; donc

$$N = m_1 m_2,$$

ce qui fournit une nouvelle confirmation du théorème de Bezout. On trouvera ensuite que tous les coefficients de g'_{m_1-2} s'évanouissent de même pour ceux de g_{m_2-2}. Il semblerait, d'après cela, qu'il suffit d'effectuer la division binaire en prenant les quotients simultanés proportionnels aux dérivées partielles du dividende correspondant pour obtenir la relation (27) sous la forme (29); mais il n'en est rien : on peut s'en assurer par l'examen des cas particuliers les plus faciles, par exemple celui de deux équations, l'une du troisième, l'autre du premier degré.

3° La résolution des équations (p, q), (s_1), (s_2) serait extrêmement pénible, pour ne pas dire impossible, si chacune d'elles contenait toutes les inconnues. Mais les choses se passent à peu près comme dans les formules ordinaires de Newton. Les sommes d'un même degré se déterminent ensemble, indépendamment de celles de degrés plus élevés.

L'identification des groupes de degré μ dans les deux membres de l'équation (27) donne $\mu + 1 = m_1 + m_2 - 1$ équations où les inconnues sont $\sum_0 = N$ et les $m_2 - 1 + m_1 - 1 = \mu$ coefficients des groupes principaux de φ_1, φ_2; ce sont celles d'où nous venons de tirer la valeur de N. L'identification des groupes de degré $\mu - 1$ donne $\mu = m_1 + m_2 - 2$ équations où les inconnues sont $\sum\alpha$, $\sum\beta$ et les $m_2 - 2 + m_1 - 2 = \mu - 2$ coefficients des groupes qui suivent les principaux dans φ_1, φ_2; ces équations contiennent aussi N et les coefficients des groupes principaux de φ_1, φ_2; mais ces quantités sont connues par la résolution des premières. De même pour les groupes de degré $\mu - 2$, et ainsi de suite. Il arrivera bien entendu un moment où on devra faire intervenir successivement des groupes d'équations prises dans les systèmes (s_1), (s_2).

On remarquera que les sommes de degré ω dépendent simplement des coefficients des équations proposées qui affectent des termes de degrés égaux ou supérieurs à $m_1 - \omega$ dans la première, à $m_2 - \omega$ dans la seconde, absolument comme pour les équations à une seule inconnue.

4° Le système total des équations (p, q), (s_1), (s_2) se décompose donc en $\mu + 1$ autres beaucoup plus simples, qu'il faut résoudre dans un ordre déterminé. On remarquera que les coefficients des inconnues, dans chacun des systèmes secondaires, ne dépendent que de ceux des groupes principaux des équations proposées.

Pour rendre notre analyse tout à fait rigoureuse, il faudrait démontrer que chaque système secondaire est possible et déterminé. Le premier point est évident, le second revient à prouver que le déterminant des coefficients des quantités inconnues n'est pas nul; je n'ai pas encore pu l'établir d'une manière générale. On trouvera sans aucun doute que tous les systèmes secondaires ont un déterminant commun égal au premier membre de l'équation finale résultant de l'élimination de x, y entre les équations homogènes

$$t_{m_1} = 0, \quad t'_{m_2} = 0, \tag{31}$$

qui ne peut être nul, puisque ces équations n'admettent par hypothèse d'autres solutions que $x = y = 0$. Cette induction est au moins rendue fort plausible par l'examen des cas particuliers les plus faciles.

On peut observer encore que la nullité du déterminant d'un système secondaire entraînerait, à cause de la compatibilité évidente des équations qui composent celui-ci, la nullité de tous les numérateurs des inconnues calculées par les formules de Cramer; or, ces numérateurs contiennent beaucoup de quantités qui n'entrent pas dans le dénominateur commun, et, par conséquent, il est difficile d'admettre qu'ils puissent s'évanouir, quelles que soient ces quantités.

5° Après avoir obtenu par ce qui précède les sommes de degrés égaux ou inférieurs à μ, on trouvera successivement celles de degrés supérieurs par un procédé analogue à celui qu'on emploie quand il s'agit d'une équation à une seule inconnue. Veut-on, par exemple, les sommes $\sum \alpha^{\mu+1}$, $\sum \alpha^{\mu}\beta \ldots$, $\sum \beta^{\mu+1}$? On fera $x=\alpha$, $y=\beta$ dans les proposées, on les multipliera successivement, la première par les monômes de degré $\mu-m_1+1$, $\alpha^{\mu-m_1+1}$, $\alpha^{\mu-m_1}\beta\ldots$, $\beta^{\mu-m_1+1}$, et on sommera les résultats obtenus, en considérant tour à tour tous les couples de solutions; de même pour la seconde, multipliée successivement par les monômes de degré $\mu-m_2+1$. On aura ainsi $\mu-m_1+2+\mu-m_2+2$ ou $\mu+2$ équations linéaires d'où l'on tirera les $\mu+2$ sommes inconnues en fonction des coefficients des équations proposées et des sommes de degrés inférieurs que la méthode précédente aurait fait connaître, et ainsi de suite.

Quand le degré des sommes inconnues surpasse $\mu+1$, on a évidemment par ce procédé plus d'équations qu'il n'en faut; mais on reconnaît aisément qu'on peut toujours en prendre un nombre suffisant pour obtenir un déterminant égal au premier membre de l'équation finale résultant de l'élimination de x, y entre les équations (31); il se présente même sous la forme que lui donne la méthode dialytique de M. Sylvester. Cette remarque confirme l'induction que nous faisions tout à l'heure.

10. La méthode que nous venons d'exposer exige, il ne faut pas l'oublier : 1° que les groupes principaux des équations proposées soient disjoints; 2° qu'elles n'aient pas de couples-racines multiples. La première condition est de rigueur, car sans elle le théorème fondamental ne peut exister avec l'énoncé dont nous nous sommes servi; je ne puis, pour le moment, traiter ce cas particulier avec toute la généralité qu'il comporte. Mais on voit aisément, par la méthode des limites, que nos formules subsistant pour des équations dont les couples-racines diffèrent aussi peu qu'on le veut les uns des autres, on peut supposer ces différences infiniment petites, ce qui entraîne leur validité pour le cas même où il existe des couples multiples.

11. Appliquons la méthode à un système de deux équations du second degré, en posant

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x^2 + 2b_1 xy + c_1 y^2 + d_1 x + e_1 y + h_1, \\ f_2 &= a_2 x^2 + 2b_2 xy + c_2 y^2 + d^2 x + e_2 y + h_2; \end{aligned}$$

la division binaire du n° 9, effectuée par la méthode des dérivées partielles, donne ici

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 x + b_1 y + a_1\alpha + b_1\beta + d_1, & q_1 &= b_1 x + c_1 y + b_1\alpha + c_1\beta + e_1, \\ p_2 &= a_2 x + b_2 y + a_2\alpha + b_2\beta + d_2, & q_2 &= b_2 x + c_2 y + b_2\alpha + c_2\beta + e_2, \end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \sum \begin{vmatrix} p_1, & q_1 \\ p_2, & q_2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y, & b_1 x + c_1 y \\ a_2 x + b_2 y, & b_2 x + c_2 y \end{vmatrix} & \\ + \Big[2(a_1 b_2 - a_2 b_1)\sum\alpha + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\sum\beta + 4(a_1 e_2 - a_2 e_1) & \\ + 4(d_1 b_2 - d_2 b_1)\Big] x & \\ + \Big[(a_1 c_2 - a_2 c_1)\sum\alpha + 2(b_1 c_2 - b_2 c_1)\sum\beta + 4(b_1 e_2 - b_2 e_1) & \\ + 4(d_1 c_2 - d_2 c_1)\Big] y & \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\sum\alpha^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\sum\alpha\beta + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\sum\beta^2 & \\ + [(a_1 e_2 - a_2 e_1) + (d_1 b_2 - d_2 b_1)]\sum\alpha & \\ + [(b_1 e_2 - b_2 e_1) + (d_1 c_2 - d_2 c_1)]\sum\beta + 4(d_1 e_2 - d_2 e_1). & \end{aligned}$$

On trouvera, d'autre part,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx} & \dfrac{df_1}{dy} \\ \dfrac{df_2}{dx} & \dfrac{df_2}{dy} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y, & b_1 x + c_1 y \\ a_2 x + b_2 y, & b_2 x + c_2 y \end{vmatrix} + 2[(a_1 e_2 - a_2 e_1) + (d_1 b_2 - d_2 b_1)] x & \\ + 2[(b_1 e_2 - b_2 e_1) + (d_1 c_2 - d_2 c_1)] y + (d_1 e_2 - d_2 e_1). & \end{aligned}$$

Il faut maintenant porter ces expressions dans l'identité (27); μ est ici égal à 2, par conséquent φ_1, φ_2 sont des constantes, mais elles sont nulles, puisque les groupes principaux des deux parties du premier membre se détruisent. L'identité (27) prend donc la forme (29); en égalant les coefficients des mêmes puissances des variables, on trouve:

$$(p, q)\left\{\begin{aligned}
&2(a_1 b_2 - a_2 b_1)\sum\alpha + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\sum\beta = -2[(a_1 e_2 - a_2 e_1) + (d_1 b_2 - d_2 b_1)],\\
&(a_1 c_2 - a_2 c_1)\sum\alpha + 2(b_1 c_2 - b_2 c_1)\sum\beta = -2[(b_1 e_2 - b_2 e_1) + (d_1 c_2 - d_2 c_1)],\\
&(a_1 b_2 - a_2 b_1)\sum\alpha^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\sum\alpha\beta + (b_1 c_2 - b_2 c_1 \sum\beta^2\\
&\quad = -[(a_1 e_2 - a_2 e_1) + (d_1 b_2 - d_2 b_1)]\sum\alpha\\
&\qquad - [(b_1 e_2 - b_2 e_1) + (d_1 c_2 - d_2 c_1)\sum\beta - 3(d_1 e_2 - d_2 e_1).
\end{aligned}\right.$$

Ce sont les équations que nous avons nommées (p, q); $m_1 - 2$, $m_2 - 2$ sont tous deux nuls; par conséquent les équations (s_1) comprendront simplement la relation obtenue en égalant à zéro la somme des résultats de la substitution des quatre couples racines à x, y dans f_1, et pareillement les équations (s_2) se réduiront à une seule. Les voici :

$$(s_1) \qquad a_1\sum\alpha^2 + 2b_1\sum\alpha\beta + c_1\sum\beta^2 = -d_1\sum\alpha - e_1\sum\beta - 4h_1,$$

$$(s_2) \qquad a_2\sum\alpha_2 + 2b_2\sum\alpha\beta + c_2\sum\beta^2 = -d_2\sum\alpha - e_2\sum\beta - 4h_2.$$

Des deux premières équations (p, q) on tire $\sum\alpha$, $\sum\beta$ en fonction de a_1, b_1, c_1, d_1, e_1; a_2, b_2, c_2, d_2, e_2; ces valeurs, substituées dans la troisième et dans les deux précédentes, permettront de calculer $\sum\alpha^2$, $\sum\alpha\beta$, $\sum\beta^2$, qui contiendront en outre les derniers coefficients h_1, h_2.

On remarquera que ces deux systèmes secondaires ont bien pour déterminant commun le premier membre de la relation qui exprimerait que les groupes principaux des équations proposées sont tous deux nuls sans que les inconnues le soient à la fois.

12. Notre théorie s'applique d'elle-même aux équations entières à un nombre quelconque d'inconnues, pourvu que leurs groupes principaux soient *disjoints*, c'est-à-dire ne puissent s'évanouir qu'en rendant à la fois toutes les inconnues égales à zéro.

Le théorème fondamental s'énonce comme il suit :

Si une fonction entière à i variables indépendantes s'évanouit pour tous les systèmes de solutions de i équations entières à i inconnues (en supposant que ces systèmes sont tous *simples*, c'est-à-dire n'annulent pas le déterminant des i^i dérivées partielles des premiers membres), *on peut la mettre sous forme d'une somme de produits des premiers membres des équations données par certaines fonctions entières dont les degrés égalent, ou du moins ne surpassent pas, les différences entre le degré de la fonction donnée et ceux des premiers membres des équations proposées.*

La démonstration se fait à peu près comme celle que nous avons donnée. On démontrera ensuite, comme nous l'avons fait, qu'en mettant chaque premier membre sous la forme

$$p(x-\alpha)+q(y-\beta)+r(z-\gamma)+\ldots,$$

la différence entre la somme des déterminants des i^i quantités

$$\begin{array}{l} p_1, \quad q_1, \quad r_1 \ldots, \\ p_2 \ldots, \\ \ldots\ldots \end{array}$$

et le déterminant des dérivées partielles s'évanouit pour tous les systèmes de solutions des équations proposées. On tirera une identité analogue à (27), qu'on pourra réduire aussi à la forme (29). On écrira les équations analogues à (p, q), puis les i groupes d'équations semblables à (s_1), (s_2), et on aura tous les éléments nécessaires pour calculer les sommes des puissances semblables jusqu'à celles de degré $\mu = \sum m - i$ inclusivement. Toutes les observations que nous avons faites pour un système binaire sont applicables au cas général.

L'une d'elles conduit au résultat suivant :

Les sommes des puissances semblables des racines d'un système d'équations entières et simultanées, et par conséquent les fonctions symétriques *et entières quelconques sont des fonctions rationnelles des coefficients des équations proposées. Ces fonctions sont fractionnaires par rapport aux coefficients des groupes principaux, mais nécessairement entières, par rapport à ceux de tous les autres.*

Et si l'on admet notre induction (n° 9, 4°) généralisée, *les sommes ne contiennent d'autre dénominateur que le premier membre de l'équation résultant de l'élimination des inconnues entre les équations qui exprimeraient que tous les groupes principaux sont nuls sans que les inconnues le soient à la fois; si donc les coefficients des équations proposées sont des nombres entiers, et si ce premier membre se réduit à l'unité, toutes les sommes ont elles-mêmes pour valeurs des nombres entiers.*

Octobre 1865.