ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Sur les surfaces orthogonales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 97-141

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__97_0>

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES,

PAR M. G. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME REMARQUABLE DE COORDONNÉES ORTHOGONALES.

§ I. — *Définition de ce système.*

1. Le système de coordonnées orthogonales que nous étudions dans cette première partie de notre travail est formé des surfaces dont l'équation en coordonnées rectilignes est

$$(1)\qquad (x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+by^2+cz^2+d^2+\frac{4d^2-a^2}{a+\lambda}x^2+\frac{4d^2-b^2}{b+\lambda}y^2+\frac{4d^2-c^2}{c+\lambda}z^2=0,$$

ou bien

$$(x^2+y^2+z^2)^2+\frac{4d^2+a\lambda}{a+\lambda}x^2+\frac{4d^2+b\lambda}{b+\lambda}y^2+\frac{4d^2+c\lambda}{c+\lambda}z^2+d^2=0.$$

Si on considère a, b, c, d comme des constantes et λ comme un paramètre variable, cette équation représente un système de surfaces.

Il y a trois surfaces du système passant en un point donné de l'espace. En effet, si l'on exprime que l'équation (1) est vérifiée par les coordonnées d'un point déterminé, le paramètre λ sera déterminé par une équation du troisième degré. Il y aura donc trois surfaces passant par un point quelconque de l'espace, et comme l'équation en λ a ses trois racines réelles, ces trois surfaces seront réelles.

Donnons à λ dans l'équation (1) deux valeurs différentes, nous aurons deux surfaces. J'ai montré dans un travail antérieur (*), et l'on vérifie bien facilement,

(*) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, t. II.

que ces deux surfaces se coupent à angle droit. Donc les trois surfaces qui passent en un point quelconque de l'espace s'y coupent à angle droit.

Supposons $a > b > c$. L'équation en λ qui détermine les surfaces passant par un point donné aura ses trois racines réelles comprises, la première entre $-a$ et $-b$; la deuxième entre $-b$ et $-c$, et la troisième entre $-c$ et $+\infty$, ou entre $-a$ et $-\infty$. On peut donc diviser les surfaces du système en trois classes correspondant : la première, aux valeurs de λ comprises entre $-a$ et $-b$; la deuxième, aux valeurs de λ comprises entre $-b$ et $-c$; la dernière, aux valeurs de λ non comprises dans ces deux intervalles. Il passe une surface de chaque classe, et une seule, par tout point de l'espace, et deux surfaces de classe différente se coupent à angle droit suivant une ligne réelle.

2. Le système précédent a donc la plus grande analogie avec le système orthogonal formé des surfaces du second degré, qu'on divise de même en trois classes formées : la première, des ellipsoïdes, et les deux autres d'hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes.

Cette analogie s'explique facilement. En faisant $d = \infty$ dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} + \frac{1}{4} = 0;$$

c'est le système orthogonal formé des surfaces du second ordre. Ainsi, notre système du quatrième ordre comprend, comme cas particulier, le système des surfaces homofocales du second degré, et, comme lui, il est formé de trois classes de surfaces comprises dans la même équation. C'est un système orthogonal à la fois *triple et un*. *Tous* les autres systèmes orthogonaux *connus* sont formés de trois séries de surfaces différentes. Si les trois systèmes sont algébriques, les surfaces ne sont pas du même degré comme dans les systèmes découverts et étudiés par M. J.-A. Serret (*). Quelquefois même l'un des systèmes est algébrique et les autres sont transcendants. La propriété que nous signalons met donc à part les deux systèmes orthogonaux formés des surfaces du quatrième et du deuxième ordre.

A tout système orthogonal correspond un système de coordonnées orthogonales. Les surfaces du second degré ont conduit aux coordonnées elliptiques. Le système que nous étudions conduit à de nouvelles coordonnées orthogonales. Ce sont ces coordonnées que nous allons étudier; elles comprennent, comme cas particulier, les coordonnées elliptiques.

(*) Mémoire sur les surfaces orthogonales. *Journal de Mathématiques*, t. XII.

§ II. — *Formules fondamentales dans l'étude du système orthogonal.*

3. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'espace; l'équation que déterminera λ sera

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + by^2 + cz^2 + d^2 \\ + \frac{4d^2 - a^2}{a + \lambda}x^2 + \frac{4d^2 - b^2}{b + \lambda}y^2 + \frac{4d^2 - c^2}{c + \lambda}z^2 = 0.$$

Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2 les trois racines de cette équation en λ. Nous allons d'abord chercher l'expression de x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2.

Posons

$$(2) \qquad M = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + ax^2 + by^2 + cz^2 + d^2;$$

on a, d'après les principes de l'Algèbre élémentaire,

$$(3) \qquad F(x, y, z) = \frac{M(\lambda - \rho)(\lambda - \rho_1)(\lambda - \rho_2)}{(a + \lambda)(b + \lambda)(c + \lambda)}.$$

Dans cette formule nous pouvons regarder $x, y, z, \rho, \rho_1, \rho_2$ comme des constantes et λ comme la seule variable; si nous décomposons le second membre en fractions simples, nous trouvons

$$F(x, y, z) = M - \sum \frac{M(a + \rho)(a + \rho_1)(a + \rho_2)}{(a - b)(a - c)} \frac{1}{a + \lambda}.$$

Égalons les coefficients de $\frac{1}{a + \lambda}$ dans les deux membres, nous obtenons

$$(4) \qquad (a^2 - 4d^2)x^2 = \frac{M(a + \rho)(a + \rho_1)(a + \rho_2)}{(a - b)(a - c)};$$

on aurait des formules semblables qui donneraient y^2, z^2. Donc, pour avoir x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, il n'y a plus qu'à trouver l'expression de M en fonction des mêmes quantités.

4. Cherchons cette expression de M en ρ, ρ_1, ρ_2. Si dans l'équation (2) on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de M et de ρ, ρ_1, ρ_2, on obtient une équation du second degré qui fait connaître l'inconnue M.

On a d'abord

$$x^2 + y^2 + z^2 = M \sum \frac{(a + \rho)(a + \rho_1)(a + \rho_2)}{(a^2 - 4d^2)(a - b)(a - c)}.$$

La somme contenue dans le second membre se compose de trois termes qui se déduiront du premier par la permutation circulaire des lettres a, b, c; mais on peut simplifier ce second membre. Pour cela, il n'y a qu'à considérer la fraction

$$\frac{(x+\rho)(x+\rho_1)(x+\rho_2)}{(x^2-4d^2)(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Si on la décompose en fractions simples de la forme $\frac{A}{x+h}$, la somme des numérateurs sera nulle; écrivant cette identité, on a

$$\sum\frac{(a+\rho)(a+\rho_1)(a+\rho_2)}{(a^2-4d^2)(a-b)(a-c)}=-\frac{(\rho+2d)(\rho_1+2d)(\rho_2+2d)}{4d(2d-a)(2d-b)(2d-c)}+\frac{(2d-\rho)(2d-\rho_1)(2d-\rho_2)}{4d(2d+a)(2d+b)(2d+c)}.$$

Soit, pour abréger,

$$m=\frac{(\rho+2d)(\rho_1+2d)(\rho_2+2d)}{4d(2d-a)(2d-b)(2d-c)},\quad n=\frac{(2d-\rho)(2d-\rho_1)(2d-\rho_2)}{4d(2d+a)(2d+b)(2d+c)},$$

on a

$$x^2+y^2+z^2=M(n-m). \tag{5}$$

On trouve par des considérations semblables

$$ax^2+by^2+cz^2=M[(1-2d(m+n)], \tag{6}$$

et par suite l'équation que déterminera M sera

$$M^2(n-m)^2+M(1-2dm-2dn)+d^2=M, \tag{7}$$

d'où l'on déduit

$$M=\frac{4d^2}{(\sqrt{4dm}\pm\sqrt{4dn})^2}$$

5. M a deux valeurs; ce fait peut être expliqué : à un système de valeurs ρ, ρ_1, ρ_2 correspondent deux points. En effet, toute droite partant du centre coupe une quelconque des surfaces en deux points, dont le produit des distances à l'origine est égal à d^2 (*). Les surfaces qui ont un point commun passent aussi par un autre point réciproque du premier. Les deux valeurs de M correspondent à ces deux points.

6. Nous allons maintenant établir quelques formules qui nous conduiront à

(*) La transformation par rayons vecteurs réciproques ne fait donc que changer l'une des nappes de la surface dans l'autre. M. Moutard a proposé d'appeler *anallagmatiques* les surfaces qui ne changent pas par cette transformation.

l'expression de la distance de deux points infiniment voisins dans le système des coordonnées curvilignes. Soit

$$F(x, y, z, \lambda) = 0$$

l'équation de l'une des surfaces du système. On a

$$\frac{dF}{dx} = (x^2 + y^2 + z^2)\,4x + \frac{a\lambda + 4d^2}{a + \lambda}\,2x,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{S}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 = 4(x^2+y^2+z^2)^3 + 4(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{S}\,\frac{a\lambda + 4d^2}{a+\lambda}\,x^2 + \mathrm{S}\left(\frac{a\lambda+4d^2}{a+\lambda}\right)^2 x^2 \\
&= \mathrm{S}\left[\left(\frac{a\lambda+4d^2}{a+\lambda}\right)^2 - 4d^2\right] x^2 = (\lambda^2 - 4d^2)\,\mathrm{S}\,\frac{a^2 - 4d^2}{(a+\lambda)^2}\,x^2 \\
&= (\lambda^2 - 4d^2)\,\frac{dF}{d\lambda};
\end{aligned}$$

ainsi on a

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{S}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 = (\lambda^2 - 4d^2)\,\frac{dF}{d\lambda}. \tag{8}$$

Cette équation nous sera utile. On en déduit en effet

$$\mathrm{S}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)^2}\,\mathrm{S}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 = \frac{4(\lambda^2 - 4d^2)}{\frac{dF}{d\lambda}}. \tag{9}$$

Posons

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{H}^2\,d\rho^2 + \mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + \mathrm{H}_2^2\,d\rho_2^2; \tag{10}$$

d'après les formules relatives aux surfaces orthogonales, on a

$$\frac{1}{\mathrm{H}^2} = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \left[\frac{4(\lambda^2 - 4d^2)}{\frac{dF}{d\lambda}}\right]_{\lambda=\rho}, \tag{11}$$

mais, pour $\lambda = \rho$, l'équation (3) nous donne

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_\rho = \frac{\mathrm{M}(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{(\rho + a)(\rho + b)(\rho + c)};$$

il suffit de différentier par rapport au seul facteur $\lambda - \rho$ qui s'annule pour $\lambda = \rho$. La formule (11) nous donne maintenant sans difficulté la valeur de H; nous aurons de même les valeurs de H_1, H_2 et nous obtiendrons la formule

$$(12)\quad \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= M\left[\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{\psi(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho)}{\psi(\rho_1)}d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{\psi(\rho_2)}d\rho_2^2\right], \end{aligned}$$

$$\psi(\rho) = 4(\rho+a)(\rho+b)(\rho+c)(\rho^2-4d^2).$$

7. On voit que l'expression de ds^2 a la plus grande analogie avec celle qu'on obtient avec les coordonnées elliptiques. Mais la présence du facteur M qui, dans le cas des coordonnées elliptiques, est remplacé par une constante, ne permet pas d'étendre au nouveau système de coordonnées bien des méthodes, par exemple celles qui conduisent aux lignes géodésiques dans les surfaces du second degré.

Les coordonnées elliptiques sont employées avec succès dans bien des questions, parce qu'elles dérivent de surfaces isothermes, et, d'après le beau théorème de M. Lamé, les surfaces du second degré sont les seules qui puissent former à la fois un système orthogonal et isotherme.

8. Dans son Mémoire sur les surfaces isothermes et orthogonales, M. Bertrand a donné les conditions pour qu'un système de surfaces orthogonales soit isotherme. La première condition, c'est que les lignes de courbure de chacune des surfaces du système puissent la découper en carrés infiniment petits. Cette condition, qui n'a pas lieu pour tous les systèmes orthogonaux, est satisfaite pour celui que nous étudions.

En effet, si l'on fait $\rho_2 =$ const., on aura

$$ds^2 = M(\rho-\rho_1)\left[\frac{d\rho^2(\rho-\rho_2)}{\psi(\rho)} + \frac{d\rho_1^2(\rho_2-\rho_1)}{\psi(\rho_1)}\right].$$

Posons

$$d\rho\sqrt{\frac{\rho-\rho_2}{\psi(\rho)}} = du, \quad d\rho\sqrt{\frac{\rho_2-\rho_1}{\psi(\rho)}} = dv,$$

on aura

$$ds^2 = M'(du^2 + dv^2),$$

et cette forme de ds^2 met en évidence la propriété que nous voulons établir.

Ainsi la première des deux conditions d'isothermie est vérifiée par notre système. Je montrerai dans la dernière Partie de ce Mémoire que ce système *est le seul qui vérifie cette première condition*. En d'autres termes, c'est le seul pour lequel chaque surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. On aura ainsi un complément du beau résultat de M. Lamé.

§ III. — *Applications.* — *Détermination d'un système particulier de lignes géodésiques sur les surfaces du système.*

9. Le système de coordonnées curvilignes que nous venons d'étudier servira en premier lieu dans l'étude intéressante des surfaces qui le constituent.

Nous avons vu que sur ces surfaces le ds^2 prend la forme

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

On peut donc intégrer ici l'équation

$$ds^2 = 0 = \lambda(du^2 + dv^2);$$

on a

$$u + v\sqrt{-1} = C, \quad u - v\sqrt{-1} = C'.$$

Ces deux équations déterminent sur la surface un double système de lignes imaginaires. Ces lignes peuvent être regardées comme des lignes géodésiques; en chaque point leur plan osculateur est normal à la surface.

En effet, les tangentes aux courbes que nous considérons sont parallèles aux génératrices du cône,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

et les plans osculateurs de ces courbes sont les plans tangents au cône suivant les arêtes correspondantes. Pour avoir les directions des tangentes en un point O de la surface, il faut couper le cône par un plan parallèle au plan tangent en O. Ce plan coupera le cône suivant deux génératrices imaginaires qui seront les directions cherchées. Les plans tangents au cône suivant ces deux génératrices sont normaux au plan de section, car ils vont passer par le diamètre conjugué à ce plan qui est toujours la perpendiculaire au plan. Donc, sur la surface, le plan osculateur passe par la normale.

Ainsi, en intégrant l'équation

$$ds^2 = 0,$$

on aura une intégrale particulière, avec une constante arbitraire de l'équation des lignes géodésiques. Mais on ne sait pas intégrer sur toutes les surfaces l'équation

$$ds^2 = 0,$$

ce qui revient à dire qu'on ne sait pas ramener sur une surface quelconque ds^2 à la forme

$$ds^2 = \lambda\, dx\, dy.$$

Dans les surfaces que nous étudions on a

$$ds^2 = \mathrm{M}(\rho - \rho_1)\left[\frac{\rho - \rho_2}{\psi(\rho)}\,d\rho^2 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\psi(\rho_1)}\,d\rho_1^2\right];$$

si l'on fait $ds^2 = 0$, il vient

$$\frac{\rho - \rho_2}{\psi(\rho)}\,d\rho^2 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\psi(\rho_1)}\,d\rho_1^2 = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\rho - \rho_2}{\psi(\rho)}}\,d\rho \pm \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\psi(\rho_1)}}\,d\rho_1 = 0,$$

$$\int\sqrt{\frac{\rho - \rho_2}{\psi(\rho)}}\,d\rho \pm \int\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\psi(\rho_1)}}\,d\rho_1 = \mathrm{C}.$$

§ IV. — *Nouveaux systèmes de surfaces orthogonales.*

10. Considérons d'une manière générale tous les systèmes de coordonnées orthogonales qui conduisent à l'expression suivante de ds^2,

$$(13)\qquad ds^2 = \mathrm{M}\left[\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{\varphi(\rho)}\,d\rho^2 + \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{\psi(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}{\chi(\rho_2)}\,d\rho_2^2\right].$$

Cette forme comprend comme cas particulier la forme (12); les raisonnements que nous allons faire s'appliqueront dans tous les cas au moins au système orthogonal des surfaces du quatrième ordre.

On peut étendre à tous ces systèmes les considérations dont M. William Roberts a fait usage pour les coordonnées elliptiques (*), et déterminer ainsi de nouveaux systèmes orthogonaux.

Soient deux surfaces dont on donne les équations différentielles,

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}\,d\rho + \mathrm{Q}\,d\rho_1 + \mathrm{R}\,d\rho_2 = 0, \\ \mathrm{P}'\,d\rho + \mathrm{Q}'\,d\rho_1 + \mathrm{R}'\,d\rho_2 = 0. \end{cases}$$

Les normales à ces surfaces font avec les normales aux trois surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$\mathrm{P}\sqrt{\frac{\varphi(\rho)}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}},\quad \mathrm{Q}\sqrt{\frac{\psi(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}},\quad \mathrm{R}\sqrt{\frac{\chi(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}},$$

pour la première surface, et à

$$\mathrm{P}'\sqrt{\frac{\varphi(\rho)}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}},\quad \mathrm{Q}'\sqrt{\frac{\psi(\rho)}{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}},\quad \mathrm{R}'\sqrt{\frac{\chi(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}},$$

(*) *Journal de Crelle*, t. LXII.

pour la seconde. Par suite, la condition d'orthogonalité des deux surfaces est

$$\text{(15)}\qquad \frac{\mathrm{PP'}\varphi(\rho)}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}+\frac{\mathrm{QQ'}\psi(\rho_1)}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}+\frac{\mathrm{RR'}\chi(\rho_2)}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}=0.$$

Cette condition est satisfaite pour deux quelconques des trois surfaces qui ont pour équations :

$$\text{(16)}\qquad \left\{\begin{aligned}
&\int\frac{d\rho\sqrt{(\rho-h')(\rho-h'')}}{\sqrt{(\rho-h)\varphi(\rho)}}+\int\frac{d\rho_1\sqrt{(\rho_1-h')(\rho_1-h'')}}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}}+\int\frac{d\rho_2\sqrt{(\rho_2-h')(\rho_2-h'')}}{\sqrt{(\rho_2-h)\chi(\rho_2)}}=\alpha,\\
&\int\frac{d\rho\sqrt{(\rho-h)(\rho-h'')}}{\sqrt{(\rho-h')\varphi(\rho)}}+\int\frac{d\rho_1\sqrt{(\rho_1-h)(\rho_1-h'')}}{\sqrt{(\rho_1-h')\psi(\rho_1)}}+\int\frac{d\rho_2\sqrt{(\rho_2-h)(\rho_2-h'')}}{\sqrt{(\rho_2-h')\chi(\rho_2)}}=\beta,\\
&\int\frac{d\rho\sqrt{(\rho-h)(\rho-h')}}{\sqrt{(\rho-h'')\varphi(\rho)}}+\int\frac{d\rho_1\sqrt{(\rho_1-h)(\rho_1-h')}}{\sqrt{(\rho_1-h'')\psi(\rho_1)}}+\int\frac{d\rho_2\sqrt{(\rho_2-h)(\rho_2-h')}}{\sqrt{(\rho_2-h'')\chi(\rho_2)}}=\gamma.
\end{aligned}\right.$$

Prenons par exemple les deux premières; la condition d'orthogonalité devient

$$\frac{\rho-h}{(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_1)}+\frac{\rho_1-h}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}+\frac{\rho_2-h}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}=0,$$

et elle est identiquement satisfaite quel que soit h.

Si l'on considère α, β, γ comme des paramètres variables, les équations (16) représentent un système orthogonal. h, h', h'' sont trois constantes arbitraires; elles doivent être inégales pour que nos trois systèmes orthogonaux ne se réduisent pas à deux. On peut même leur donner des valeurs infinies, à la condition de remplacer les binômes comme $\rho-h$, ρ_1-h, ρ_2-h, par une constante quelconque.

On peut écrire d'une manière abrégée les équations des trois surfaces du système (16). En effet, si l'on pose

$$\text{(17)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\Theta=\int\frac{d\rho\sqrt{(\rho-h)(\rho-h')(\rho-h'')}}{\sqrt{\varphi(\rho)}}&+\int\frac{d\rho_1\sqrt{(\rho_1-h)(\rho_1-h')(\rho_1-h'')}}{\sqrt{\psi(\rho_1)}}\\
&+\int\frac{d\rho_2\sqrt{(\rho_2-h)(\rho_2-h')(\rho_2-h'')}}{\sqrt{\chi(\rho_2)}},
\end{aligned}\right.$$

les équations (16) peuvent s'écrire

$$\text{(18)}\qquad \frac{d\Theta}{dh}=\alpha,\quad \frac{d\Theta}{dh'}=\beta,\quad \frac{d\Theta}{dh''}=\gamma.$$

11. Dans le système des surfaces du quatrième ordre, on a

$$\varphi(x)=\psi(x)=\chi(x)=4(x^2-4d^2)(x+a)(x+b)(x+c).$$

On pourra disposer de h, h', h'' de différentes manières, par exemple, faire

$$h = -a, \quad h' = -b, \quad h'' = -c;$$

dans ce cas les intégrations indiquées dans les équations (16) pourront être effectuées, mais je n'insiste pas sur ces cas particuliers, qui ne présentent ni grande difficulté, ni grand intérêt, et j'arrive à une conséquence plus importante.

§ V. — *Lignes géodésiques des surfaces du second degré. — Intégration des équations abéliennes par les coordonnées elliptiques.*

12. Considérons le cas des coordonnées elliptiques. M est constant. Faisons $h = \infty$, c'est-à-dire, dans les équations (16), remplaçons par l'unité les binômes $(\rho - h)$, $(\rho_1 - h)$, $(\rho_2 - h)$. Nous aurons le système triple orthogonal

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{\sqrt{(\rho-h')(\rho-h'')}}{\sqrt{\varphi(\rho)}}\,d\rho + \int \frac{\sqrt{(\rho_1-h')(\rho_1-h'')}}{\sqrt{\varphi(\rho_1)}}\,d\rho_1 + \int \frac{\sqrt{(\rho_2-h')(\rho_2-h'')}}{\sqrt{\varphi(\rho_2)}}\,d\rho_2 = \alpha,\\ &\int \sqrt{\frac{\rho-h'}{\rho-h''}}\frac{d\rho}{\sqrt{\varphi(\rho)}} + \int \sqrt{\frac{\rho_1-h'}{\rho_1-h''}}\frac{d\rho_1}{\sqrt{\varphi(\rho_1)}} + \int \sqrt{\frac{\rho_2-h'}{\rho_2-h''}}\frac{d\rho_2}{\sqrt{\varphi(\rho_2)}} = \beta,\\ &\int \sqrt{\frac{\rho-h''}{\rho-h'}}\frac{d\rho}{\sqrt{\varphi(\rho)}} + \int \sqrt{\frac{\rho_1-h''}{\rho_1-h'}}\frac{d\rho_1}{\sqrt{\varphi(\rho_1)}} + \int \sqrt{\frac{\rho_2-h''}{\rho_2-h'}}\frac{d\rho_2}{\sqrt{\varphi(\rho_2)}} = \gamma. \end{aligned}\right.$$

D'après les formules bien connues relatives aux systèmes orthogonaux, on a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \\ &\quad = \frac{\varphi(\rho)}{(\rho_1-\rho)(\rho_2-\rho)}\left(\frac{dU}{d\rho}\right)^2 + \frac{\varphi(\rho_1)}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}\left(\frac{dU}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{\varphi(\rho_2)}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}\left(\frac{dU}{d\rho_2}\right)^2. \end{aligned}$$

Appliquons cette formule au premier de nos systèmes, nous aurons

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = \frac{(\rho-h')(\rho-h'')}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} + \frac{(\rho_1-h')(\rho_1-h'')}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho)} + \frac{(\rho_2-h')(\rho_2-h'')}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)} = 1.$$

Le premier de nos systèmes est donc formé de surfaces parallèles, et, par suite, les deux autres systèmes sont formés des surfaces développables qui coupent les surfaces parallèles suivant leurs lignes de courbure. Ces surfaces développables se coupent suivant des droites tangentes aux deux surfaces

$$\rho = h', \quad \rho = h''.$$

En effet, prenons la deuxième des équations (19) : cette équation représente, nous venons de le voir, une surface développable. Pour $\rho = h''$, la direction du plan tangent est déterminée par l'équation

$$d\rho = 0.$$

Ainsi cette surface est tangente à la surface

$$\rho = h''.$$

Les génératrices rectilignes sont donc tangentes aux deux surfaces

$$\rho = h', \quad \rho = h'',$$

et par suite les arêtes de rebroussement des deux systèmes de surfaces développables sont sur les surfaces

$$\rho = h', \quad \rho = h''.$$

Il résulte de ce qui précède deux conséquences.

D'abord les deux dernières équations (19), qu'on peut écrire

$$(19\ bis)\left\{\begin{aligned}&\int\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho-h')(\rho-h'')\varphi(\rho)}}+\int\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h')(\rho_1-h'')\varphi(\rho_1)}}+\int\frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h')(\rho_2-h'')\varphi(\rho_2)}}=\frac{\beta-\gamma}{h''-h'},\\&\int\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{(\rho-h')(\rho-h'')\varphi(\rho)}}+\int\frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h')(\rho_1-h'')\varphi(\rho_1)}}+\int\frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h')(\rho_2-h'')\varphi(\rho_2)}}=\frac{\beta h''-\gamma h'}{h''-h'},\end{aligned}\right.$$

représentent une droite. Or, ces équations sont les équations abéliennes à trois variables. Ainsi on peut intégrer par la géométrie les équations abéliennes (*). En second lieu, les arêtes de rebroussement sont les lignes géodésiques des surfaces du second degré. Par exemple, sur la surface

$$\rho = h',$$

l'équation d'une ligne géodésique est

$$\int\sqrt{\frac{\rho_1-h'}{(\rho_1-h'')\varphi(\rho_1)}}\,d\rho_1+\int\sqrt{\frac{\rho_2-h'}{(\rho_2-h'')\varphi(\rho_2)}}\,d\rho_2=\lambda,$$

h'' et λ étant deux constantes arbitraires.

§ VI. — *Intégration des équations abéliennes par le système des surfaces du quatrième ordre.*

13. Revenons aux systèmes les plus généraux compris dans la forme (13), et

(*) M. Liouville a employé la Mécanique dans son beau Mémoire *sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*. Mais dans une Note sur un théorème de M. Chasles (*Journal de Mathématiques*, 1851), il annonce qu'on peut se dispenser de recourir à la Mécanique et promet un article qui, je crois, n'a pas été publié.

soient les deux équations différentielles

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\varphi(\rho)}}+\frac{\rho_1\,d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}}+\frac{\rho_2\,d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\chi(\rho_2)}}=0,\\ &\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\varphi(\rho)}}+\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}}+\frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\chi(\rho_2)}}=0.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations représentent une ligne; leurs intégrales générales s'expriment de la manière suivante :

$$\int\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\varphi(\rho)}}+\int\frac{\rho_1\,d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}}+\int\frac{\rho_2\,d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\chi(\rho_2)}}=\text{const.},$$

$$\int\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\varphi(\rho)}}+\int\frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}}+\int\frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\chi(\rho_2)}}=\text{const.}$$

Mais ces intégrales contiennent des transcendantes qu'on ne peut pas exprimer en termes finis. Ainsi, dans le cas des surfaces du quatrième ordre, les polynômes sous les radicaux sont du sixième degré, et les équations (20) sont les équations abéliennes les plus générales à trois variables. Nous allons donner un moyen de trouver les intégrales des équations (20) en termes finis, et l'on aura ainsi une nouvelle démonstration géométrique du théorème d'Abel pour les équations à trois variables.

On déduit des équations (20)

$$\frac{\dfrac{d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\varphi(\rho)}}}{\rho_1-\rho_2}=\frac{\dfrac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}}}{\rho_2-\rho}=\frac{\dfrac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\chi(\rho_2)}}}{\rho-\rho_1}.$$

Si l'on appelle $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ les projections de l'élément de courbe sur les normales aux trois surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, on aura

$$d\sigma=\sqrt{\mathrm{M}}\,\frac{d\rho\sqrt{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}}{\sqrt{\varphi(\rho)}},\ \ldots,$$

ce qui donne

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{(\rho-h)(\rho_1-\rho_2)}}=\frac{d\sigma_1}{\sqrt{(\rho_1-h)(\rho_2-\rho)}}=\frac{d\sigma_2}{\sqrt{(\rho_2-h)(\rho-\rho_1)}},$$

et par suite

$$(21)\qquad d\sigma^2+d\sigma_1^2+d\sigma_2^2=0.$$

Cette dernière équation nous montre que les tangentes à la courbe cherchée sont parallèles aux génératrices du cône

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

D'ailleurs, si nous retranchons membre à membre les deux équations (20), après avoir multiplié la seconde par h, nous aurons

$$(22)\qquad \frac{\sqrt{\rho - h}}{\sqrt{\varphi(\rho)}}\,d\rho + \frac{\sqrt{\rho_1 - h}}{\sqrt{\psi(\rho_1)}}\,d\rho_1 + \frac{\sqrt{\rho_2 - h}}{\sqrt{\chi(\rho_2)}}\,d\rho_2 = 0,$$

ou, en intégrant,

$$\int\sqrt{\frac{\rho - h}{\varphi(\rho)}}\,d\rho + \int\sqrt{\frac{\rho_1 - h}{\psi(\rho_1)}}\,d\rho_1 + \int\sqrt{\frac{\rho_2 - h}{\chi(\rho_2)}}\,d\rho_2 = \mu.$$

Cette équation représente une surface sur laquelle doit se trouver notre courbe. Cette surface est développable, car on a

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = 0,$$

et les génératrices de cette surface développable sont parallèles à celles du cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La courbe devra se trouver sur cette surface et être tangente aux génératrices; ce sera donc ou bien une génératrice ou bien l'arête de rebroussement de la surface.

Les génératrices répondent à la solution générale des équations (20); les arêtes de rebroussement, aux solutions singulières. Pour définir complétement les surfaces développables μ, il suffit de remarquer qu'elles ont leur arête de rebroussement sur la surface

$$\rho = h.$$

Les droites sont tangentes à cette surface; leur équation ne contiendra donc que deux constantes arbitraires.

14. Nous sommes conduits par ce qui précède à chercher les systèmes orthogonaux compris dans la forme (13); car ces systèmes nous en donneront d'autres immédiatement, et, de plus, ils pourront nous conduire à l'intégration d'équations analogues aux équations abéliennes. J'entreprendrai cette recherche dans la troisième Partie de ce Mémoire; il résultera de cette recherche que le système des surfaces du quatrième ordre est le seul qui soit compris dans la forme (13).

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHES SUR LES SURFACES ORTHOGONALES EN GÉNÉRAL.

---

§ VII. — *Réduction du problème à la résolution d'une équation aux dérivées partielles à trois variables indépendantes.*

15. M. Ossian Bonnet a montré le premier, dans une communication faite en 1862 à l'Académie des Sciences, que le problème de la détermination des systèmes orthogonaux se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre; en sorte que le problème serait immédiatement résolu, si on pouvait obtenir l'intégrale générale de cette équation. Ce résultat a une grande importance, parce qu'il indique et précise l'ordre de difficulté du problème. C'est ainsi que l'on a fait un grand pas dans la recherche des surfaces applicables les unes sur les autres, quand on a montré que le problème se réduit à l'intégration d'une équation du second ordre.

Je me propose d'établir ici le résultat dû à M. Bonnet, en suivant une marche différente de la sienne.

Je commencerai par rappeler le célèbre théorème de M. Charles Dupin, qui a été le point de départ des recherches sur les surfaces orthogonales. On l'énonce ordinairement ainsi :

Quand on a trois systèmes de surfaces se coupant à angle droit, deux surfaces quelconques appartenant à deux systèmes différents se coupent suivant leurs lignes de courbure.

Ce théorème est contenu dans le suivant :

Pour que deux systèmes formés de surfaces orthogonales soient orthogonaux à un troisième système, il faut et il suffit que les lignes d'intersection des surfaces appartenant aux deux systèmes soient des lignes de courbure des surfaces.

Pour énoncer ce théorème d'une manière complète, il faut ajouter au théorème de M. Dupin le théorème suivant :

Quand deux systèmes de surfaces orthogonales se coupent suivant les lignes de courbure de ces surfaces, il existe un troisième système orthogonal aux deux premiers.

Considérons trois systèmes orthogonaux dont les équations en coordonnées rectangulaires soient

$$\alpha = \varphi(x, y, z), \quad \beta = \varphi_1(x, y, z), \quad \gamma = \varphi_2(x, y, z);$$

on doit avoir identiquement

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=0,\\
&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dz}=0,\\
&\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dy}+\frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dz}=0.
\end{aligned}\right.$$

Des deux dernières équations on déduit

$$(24)\quad \frac{\dfrac{d\gamma}{dx}}{\dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{d\beta}{dz}-\dfrac{d\alpha}{dz}\dfrac{d\beta}{dy}}=\frac{\dfrac{d\gamma}{dy}}{\dfrac{d\alpha}{dz}\dfrac{d\beta}{dx}-\dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{d\beta}{dz}}=\frac{\dfrac{d\gamma}{dz}}{\dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{d\beta}{dy}-\dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{d\beta}{dx}},$$

et, par suite, l'équation

$$(25)\quad \left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dy}\right)dx+\left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dz}\right)dy+\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right)dz=0$$

est intégrable.

Réciproquement, si l'équation (25) est intégrable, on pourra trouver un système orthogonal

$$\gamma=\varphi_2(x,y,z),$$

satisfaisant aux équations (24), c'est-à-dire orthogonal aux deux systèmes (α), (β).

Écrivons la condition d'intégrabilité; nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{d\gamma}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}-\frac{d\beta}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx^2}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}-\frac{d\beta}{dz}\frac{d^2\alpha}{dx\,dz}\right)\\
+&\frac{d\gamma}{dy}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dy\,dz}-\frac{d\beta}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d^2\alpha}{dy^2}-\frac{d\beta}{dz}\frac{d^2\alpha}{dy\,dz}\right)\\
+&\frac{d\gamma}{dz}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dy\,dz}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dz^2}-\frac{d\beta}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx\,dz}-\frac{d\beta}{dy}\frac{d^2\alpha}{dy\,dz}-\frac{d\beta}{dz}\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)=0,
\end{aligned}$$

équation à laquelle il faut joindre

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=0.$$

Si l'on différentie cette dernière équation par rapport à x, y, z, on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}=-\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}+\frac{d\beta}{dz}\frac{d^2\alpha}{dx\,dz}\right),\\
&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\ \beta}{dy\,dz}=-\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d\beta}{dz}\frac{d^2\alpha}{dy\,dz}\right),\\
&\frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dz^2}=-\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx\,dz}+\frac{d\beta}{dy}\frac{d^2\alpha}{dy\,dz}+\frac{d\beta}{dz}\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right).
\end{aligned}$$

Ces trois équations permettent de simplifier la condition d'intégrabilité, et de l'écrire, en remplaçant $\frac{d\gamma}{dx}, \frac{d\gamma}{dy}, \frac{d\gamma}{dz}$ par les quantités proportionnelles :

$$\text{Dét.}\begin{vmatrix} \frac{d\alpha}{dx} & \frac{d\alpha}{dy} & \frac{d\alpha}{dz} \\ \frac{d\beta}{dx} & \frac{d\beta}{dy} & \frac{d\beta}{dz} \\ \frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}, & \frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx\,dy}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dy\,dz}, & \frac{d\alpha}{dx}\frac{d^2\beta}{dx\,dz}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d^2\beta}{dy\,dz}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d^2\beta}{dz^2} \end{vmatrix}=0.$$

Soient δx, δy, δz les accroissements que prennent x, y, z lorsqu'on se déplace infiniment peu dans la direction de la surface α; on a

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\frac{d\alpha}{dx}}{\delta x}=\dfrac{\frac{d\alpha}{dy}}{\delta y}=\dfrac{\frac{d\alpha}{dz}}{\delta z}, \\ \dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{d^2\beta}{dx^2}+\dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{d^2\beta}{dx\,dy}+\dfrac{d\alpha}{dz}\dfrac{d^2\beta}{dx\,dz}=\dfrac{\frac{d\alpha}{dx}}{\delta x}\,\delta.\dfrac{d\beta}{dx}, \end{cases}$$

et la condition d'intégrabilité devient

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} \delta x, & \delta y, & \delta z \\ \frac{d\beta}{dx}, & \frac{d\beta}{dy}, & \frac{d\beta}{dz} \\ \delta\frac{d\beta}{dx}, & \delta\frac{d\beta}{dy}, & \delta\frac{d\beta}{dz} \end{vmatrix}=0.$$

Sous cette forme, nous reconnaissons immédiatement que la direction δx, δy, δz, qui est celle de la normale à la surface α, est celle d'une des lignes de courbure de la surface β. Donc la ligne d'intersection des deux surfaces est tangente à l'autre ligne de courbure de la surface (β), et par suite les deux surfaces se coupent suivant une ligne de courbure. Ainsi la condition d'intégrabilité exprime que les deux surfaces se coupent suivant une ligne de courbure, et, comme cette condition est nécessaire et suffisante, il en résulte le théorème énoncé.

16. Passons maintenant à notre objet principal et cherchons les conditions auxquelles doit satisfaire un système $\alpha=\varphi(x,y,z)$, pour que ce système fasse partie d'un système triple orthogonal.

Déterminons en chaque point les directions des lignes de courbure.

On a deux équations de la forme

$$(28)\qquad \frac{dx}{L}=\frac{dy}{M}=\frac{dz}{N}\quad \text{et}\quad \frac{\delta x}{L'}=\frac{\delta y}{M'}=\frac{\delta z}{N'}.$$

Dans ces équations, L, M, N, L′, M′, N′ représentent des fonctions des dérivées premières et secondes de α, fonctions qu'il serait pénible de calculer. Les tangentes aux lignes de courbure doivent être les normales aux deux systèmes conjugués du premier. Donc les équations

$$
\begin{aligned}
L\,dx + M\,dy + N\,dz &= 0,\\
L'dx + M'dy + N'dz &= 0
\end{aligned}
$$

doivent être intégrables. Je dis que si la première l'est, la seconde le sera aussi. En effet, si la première équation est intégrable, on aura un système de surfaces

$$\beta = \int \lambda(L\,dx + M\,dy + N\,dz) \tag{29}$$

orthogonal au système α et ayant ses normales tangentes aux lignes de courbure des surfaces (α). La condition d'intégrabilité (27) sera donc satisfaite, et l'on aura le troisième système orthogonal par la formule

$$\gamma = \int \lambda'(L'dx + M'dy + N'dz); \tag{30}$$

ainsi, la condition unique à laquelle doit satisfaire α, c'est que la première équation

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0$$

soit intégrable, ce qui donne

$$L\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right) + M\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}\right) + N\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) = 0, \tag{31}$$

équation unique aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire α. Cette équation est du troisième ordre; elle est linéaire évidemment par rapport aux dérivées du troisième ordre. D'après ce qui précède, on voit que toute solution de cette équation donnera un système orthogonal.

Cette équation aux dérivées partielles, nous ne la formerons pas dans le cas général; elle est très-compliquée et paraît très-difficile à intégrer. Remarquons seulement qu'on en connaît deux solutions avec une fonction arbitraire de deux variables. La première solution est donnée par le système des surfaces parallèles à une surface donnée; la deuxième par le système qu'on obtient en transformant par rayons vecteurs réciproques un système de surfaces parallèles. Mais il est évident que ces solutions ne constituent pas l'intégrale générale de l'équation. Quoiqu'elles contiennent des fonctions arbitraires, ce sont peut-être des solutions singulières. En dehors de ces solutions on ne connaît pas d'intégrale complète de l'équation. Le système des surfaces du quatrième ordre contient quatre constantes; en rapportant à des axes quelconques on en introduit six, et en transformant par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant quelconque, trois nouvelles, ce qui fait en tout treize constantes : or l'intégrale complète devrait en contenir dix-neuf.

Ainsi, le problème de la recherche des surfaces orthogonales dépend d'une équation du troisième ordre à trois variables. Il paraît donc beaucoup plus difficile que la plupart des problèmes de Géométrie, qui dépendent d'une équation du second ordre à deux variables.

§ VIII. — *Méthode générale de recherche des systèmes orthogonaux.*

17. Cette méthode est fondée sur les équations que M. Lamé a données dans son ouvrage *sur les Coordonnées curvilignes* (*). Soit l'expression de ds^2

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2. \tag{32}$$

Les fonctions H, H_1, H_2 satisfont à six équations différentielles qui sont :

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\rho_1\, d\rho_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho_1}, \\ \frac{d^2 H_1}{d\rho\, d\rho_2} &= \frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\frac{dH_2}{d\rho} + \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\frac{dH}{d\rho_2}, \\ \frac{d^2 H_2}{d\rho\, d\rho_1} &= \frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\frac{dH_1}{d\rho}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}\right) + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\right) + \frac{1}{H_2^2}\frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_1}{d\rho_2} = 0, \\ &\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{dH_2}{d\rho_1}\frac{dH}{d\rho_1} = 0, \\ &\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\right) + \frac{1}{H^2}\frac{dH_2}{d\rho}\frac{dH_1}{d\rho} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous allons reprendre rapidement la démonstration de ces six équations, et nous prouverons en même temps qu'elles sont à la fois nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire que si l'on a trouvé des valeurs de H, H_1, H_2 satisfaisant à ces six équations, on obtiendra nécessairement un système orthogonal.

Pour cela, nous commencerons par transformer les équations précédentes, et au lieu des quantités H, H_1, H_2, nous prendrons pour inconnues les six quantités données par la formule

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{dH_j}{d\rho_i} \tag{35}$$

où i est différent de j.

(*) *Leçons sur les Coordonnées curvilignes et leurs diverses applications.* In-8° avec figures dans le texte : 1859. Chez Gauthier-Villars, libraire. Prix : 5 francs.

On pourra remplacer les six équations (33), (34) [*voir* LAMÉ, p. 76] par les neuf équations

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\beta_{01}}{d\rho_2} = \beta_{02}\beta_{21}, \quad && \frac{d\beta_{10}}{d\rho_2} = \beta_{12}\beta_{20}, \\ &\frac{d\beta_{12}}{d\rho} = \beta_{10}\beta_{02}, && \frac{d\beta_{21}}{d\rho} = \beta_{20}\beta_{01}, \\ &\frac{d\beta_{20}}{d\rho_1} = \beta_{21}\beta_{10}, && \frac{d\beta_{02}}{d\rho_1} = \beta_{01}\beta_{12}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\beta_{10}}{d\rho_1} + \frac{d\beta_{01}}{d\rho} + \beta_{20}\beta_{21} = 0, \\ &\frac{d\beta_{21}}{d\rho_2} + \frac{d\beta_{12}}{d\rho_1} + \beta_{01}\beta_{02} = 0, \\ &\frac{d\beta_{02}}{d\rho} + \frac{d\beta_{20}}{d\rho_2} + \beta_{12}\beta_{10} = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous avons six inconnues au lieu de trois; mais il y a trois équations de plus.

Pour démontrer ces équations, désignons par U, U_1, U_2 les cosinus des angles que font avec l'axe des u (*) les normales aux trois surfaces ρ, ρ_1, ρ_2; l'expression

$$HU\,d\rho + H_1U_1\,d\rho_1 + H_2U_2\,d\rho_2$$

doit être une différentielle exacte, puisqu'elle est égale à du.

De plus on a

$$U^2 + U_1^2 + U_2^2 = 1;$$

différentiant cette équation et exprimant les conditions d'intégrabilité, nous trouverons (*voir* LAMÉ, p. 74)

$$(38)\quad \frac{dU}{d\rho_1} = U_1\beta_{01}, \quad \frac{dU}{d\rho_2} = U_2\beta_{02}, \quad \frac{dU}{d\rho} = -U_1\beta_{10} - U_2\beta_{20}.$$

On aurait de même d'autres équations qui donneraient les dérivées partielles des fonctions U_1, U_2. Cela posé, différentions la première des équations (38) par rapport à ρ_2, la deuxième par rapport à ρ_1 : on aura deux valeurs de $\frac{d^2U}{d\rho_1\,d\rho_2}$ qui devront être égales, ce qui donne

$$U_1\left(\frac{d\beta_{01}}{d\rho_2} - \beta_{02}\beta_{21}\right) = U_2\left(\frac{d\beta_{02}}{d\rho_1} - \beta_{01}\beta_{12}\right).$$

(*) u désigne, suivant les notations de M. Lamé, une quelconque des trois lettres x, y, z.

Cette équation doit avoir lieu pour trois valeurs différentes du rapport $\frac{U_1}{U_2}$; on aura donc

$$\frac{d\beta_{01}}{d\rho_2} - \beta_{02}\beta_{21} = 0, \quad \frac{d\beta_{02}}{d\rho_1} - \beta_{01}\beta_{12} = 0.$$

Par des permutations d'indices on aura les six équations (36) qui se trouvent ainsi démontrées.

Pour trouver les équations (37), on n'aura qu'à exprimer que les deux valeurs de $\frac{d^2 U}{d\rho\, d\rho_2}$ que l'on obtient en différentiant la seconde des équations (38) par rapport à ρ et la troisième par rapport à ρ_2, sont égales.

Réciproquement, si les neuf équations (36) et (37) sont satisfaites, les équations (38) et les six autres équations analogues donneront des valeurs de U, U_1, U_2. Ces fonctions seront déterminées lorsqu'on connaîtra leurs valeurs initiales, car les neuf équations fourniront les dérivées premières, et les équations obtenues par la différentiation les autres dérivées. Ainsi, quand on aura trouvé H, H_1, H_2, on pourra toujours obtenir des fonctions U, U_1, U_2, satisfaisant aux équations (38) et aux six équations analogues.

Prenons trois systèmes de valeurs

$$U,\ U_1,\ U_2;\quad V,\ V_1,\ V_2;\quad W,\ W_1,\ W_2.$$

Soit l'expression

$$UV + U_1V_1 + U_2V_2;$$

si l'on différentie cette expression par rapport à une quelconque des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2, on trouve, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs tirées des équations (38), un résultat identiquement nul. On a donc

$$UV + U_1V_1 + U_2V_2 = \text{const.},$$

et si l'on a choisi convenablement les valeurs initiales, on aura

$$UV + U_1V_1 + U_2V_2 = 0.$$

De même,

$$VW + V_1W_1 + V_2W_2 = 0,$$
$$UW + U_1W_1 + U_2W_2 = 0.$$

Donc on pourra constituer un système orthogonal, et en intégrant les expressions telles que

$$HU\, d\rho + H_1U_1\, d\rho_1 + H_2U_2\, d\rho_2,$$

on aura les coordonnées u exprimées en ρ, ρ_1, ρ_2. Ainsi, à tout système de valeurs de H, H_1, H_2 satisfaisant aux six équations (33), (34) il correspond bien un système orthogonal.

En résumé, le problème attaqué par cette voie comprend deux parties distinctes :

La détermination de trois quantités H, H_1, H_2 par six équations simultanées, et la détermination des cosinus U.

En général, on ne peut pas trouver trois fonctions satisfaisant à six équations. Il semblait donc que le problème ne pouvait avoir qu'un nombre limité de solutions. On voit combien est important le résultat dû à M. Bonnet.

Avant de connaître les recherches de M. Bonnet, j'avais essayé d'intégrer les six équations en H. Je n'ai pas réussi, mais j'ai été conduit à quelques résultats qui nous seront utiles plus tard et que je vais exposer.

§ IX. — *Intégration des équations en* H, H_1, H_2.

18. Occupons-nous d'abord de la détermination des quantités que nous avons désignées par β_{ij}.

Les équations (36) s'intègrent sans difficulté ; on en déduit en effet

$$\frac{d}{d\rho_2}(\beta_{10}\beta_{01}) = \beta_{10}\frac{d\beta_{01}}{d\rho_2} + \beta_{01}\frac{d\beta_{10}}{d\rho_2} = \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} + \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02}$$
$$= \frac{d}{d\rho}(\beta_{12}\beta_{21}) = \frac{d}{d\rho_1}(\beta_{20}\beta_{02}).$$

Ainsi on a

$$\frac{d}{d\rho}(\beta_{12}\beta_{21}) = \frac{d}{d\rho_1}(\beta_{20}\beta_{02}) = \frac{d}{d\rho_2}(\beta_{10}\beta_{01}) = \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} + \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02}. \tag{39}$$

On peut poser, en introduisant une fonction auxiliaire V,

$$\beta_{01}\beta_{10} = \frac{d^2V}{d\rho\, d\rho_1} = a_2, \quad \beta_{12}\beta_{21} = \frac{d^2V}{d\rho_1\, d\rho_2} = a, \quad \beta_{20}\beta_{02} = \frac{d^2V}{d\rho\, d\rho_2} = a_1, \tag{40}$$

$$\frac{da}{d\rho} = \frac{da_1}{d\rho_1} = \frac{da_2}{d\rho_2} = b = \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} + \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02}. \tag{41}$$

Pour la commodité du calcul, nous emploierons les notations suivantes :

$$\beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} = m, \quad \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02} = n; \tag{42}$$

on aura

$$m + n = b, \quad mn = aa_1a_2. \tag{43}$$

Donc m et n peuvent être considérés comme connus lorsque la fonction V l'est.

La première des équations (36) donne

$$\frac{d\beta_{10}}{d\rho_2} = \beta_{12}\beta_{20} = \frac{m}{\beta_{01}} = \frac{m}{a_2}\beta_{10},$$

ou

$$(44) \qquad \frac{1}{\beta_{10}}\frac{d\beta_{10}}{d\rho_2} = \frac{m}{a_2}.$$

On déduit de là par l'intégration

$$(45) \qquad \beta_{10} = e^{\int \frac{m}{a_2} d\rho_2 + A_2},$$

et de même

$$(46) \qquad \beta_{01} = e^{\int \frac{n}{a_2} d\rho_2 + B_2}.$$

A_2 et B_2 désignent des fonctions de ρ et de ρ_1 ne dépendant pas de ρ_2; elles doivent être choisies de telle manière que le produit $\beta_{01}\beta_{10}$ soit égal à a_2. Une seule est donc arbitraire.

Ainsi, toutes les quantités β s'expriment en fonction de V. Le problème revient à déterminer cette unique fonction, et les fonctions de deux variables telles que A_2. On a

$$(47) \qquad \beta_{10} = e^{\int \frac{m}{a_2} d\rho_2 + A_2}, \quad \beta_{21} = e^{\int \frac{m}{a} d\rho + A}, \quad \beta_{02} = e^{\int \frac{m}{a_1} d\rho_1 + A_1}.$$

Écrivons que ces quantités β satisfont à la seconde des équations (42). Nous aurons

$$(48) \qquad e^{\int \frac{m}{a} d\rho + \int \frac{m}{a_1} d\rho_1 + \int \frac{m}{a_2} d\rho_2 + A + A_1 + A_2} = n.$$

Prenons les logarithmes des deux nombres et les dérivées successives par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2, nous obtenons

$$(49) \qquad \frac{d}{d\rho\, d\rho_1}\left(\frac{m}{a_2}\right) + \frac{d^2}{d\rho\, d\rho_2}\left(\frac{m}{a_1}\right) + \frac{d^2}{d\rho_1\, d\rho_2}\left(\frac{m}{a}\right) = \frac{d^3 \mathrm{L} n}{d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2},$$

équation du sixième ordre à laquelle devra satisfaire la fonction V.

Le problème paraît bien simplifié; il semble que l'on n'aura plus qu'à substituer les expressions des β dans les équations (37), et l'on aura alors quatre équations simultanées auxquelles devra satisfaire la seule fonction V; mais je vais montrer que généralement, si les équations (36) sont vérifiées, les équations (37) se réduisent à une seule.

19. Désignons en effet par u, u_1, u_2 les trois premiers membres des équations (37). Si les équations (36) sont vérifiées, on a identiquement

$$(50) \qquad \frac{du_2}{d\rho_2} = \beta_{20} u + \beta_{21} u_1, \quad \frac{du_1}{d\rho_1} = \beta_{12} u_2 + \beta_{10} u, \quad \frac{du}{d\rho} = \beta_{01} u_1 + \beta_{02} u_2;$$

On peut transformer ces équations et les écrire

$$(51)\qquad \frac{d}{d\rho_1}(u_1\beta_{20})=\frac{d}{d\rho_2}(u_2\beta_{10}),\quad \frac{d}{d\rho_2}(u_2\beta_{01})=\frac{d}{d\rho}(u\,\beta_{21}),\quad \frac{d}{d\rho}(u\,\beta_{12})=\frac{d}{d\rho_1}(u_1\beta_{02}).$$

Si une des trois quantités u, u_1, u_2, u_2 par exemple, est nulle, les équations (51) nous donnent

$$(52)\qquad u_1\beta_{20}=\mathrm{A}_1,\quad u\,\beta_{21}=\mathrm{A},$$

A, A_1 désignant des fonctions qui ne contiennent pas, la première ρ, la seconde ρ_1. Portant ces valeurs de u, u_1 dans la troisième équation (51), nous avons

$$\frac{d}{d\rho}\left(\mathrm{A}\frac{\beta_{12}}{\beta_{21}}\right)=\frac{d}{d\rho_1}\left(\mathrm{A}_1\frac{\beta_{02}}{\beta_{20}}\right),\quad \frac{\mathrm{A}(m-n)}{\beta_{21}^2}=\frac{\mathrm{A}_1(m-n)}{\beta_{20}^2}.$$

Cette équation est vérifiée,

$$1^\circ \text{ si }\quad m=n,$$

$$2^\circ \text{ si }\quad \frac{\mathrm{A}}{\beta_{21}^2}=\frac{\mathrm{A}_1}{\beta_{20}^2};$$

mais en général ces deux cas n'auront pas lieu. Il faut donc que l'on ait $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{A}_1=0$, ce qui entraîne $u=0$, $u_1=0$. Par suite, les équations (37) se réduisent à une seule, excepté dans les deux cas particuliers que nous venons d'indiquer.

Ainsi la fonction V doit satisfaire au moins à deux équations aux dérivées partielles. Si nous ne savions pas que le problème se ramène à une seule équation, nous poursuivrions les calculs malgré leur difficulté; car dans les équations (37), la fonction V entre sous les signes d'intégration. Mais il est peu intéressant de développer ces calculs, maintenant que nous savons que le problème ne peut se résoudre par des différentiations et des éliminations.

20. Quand on aura déterminé la fonction V et les quantités β, on aura à déterminer les fonctions H, H_1, H_2. La formule (35) nous donne

$$\mathrm{H}_1=\frac{1}{\beta_{10}}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1},\quad \mathrm{H}_2=\frac{1}{\beta_{20}}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2},$$

et, en portant ces valeurs de H_1, H_2 dans les autres équations que renferme la formule (35), on aura

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{H}}{d\rho\,d\rho_1}-\dfrac{1}{\beta_{10}}\dfrac{d\beta_{10}}{d\rho}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}-\mathrm{H}a_2=0,\\[2ex] \dfrac{d^2\mathrm{H}}{d\rho\,d\rho_2}-\dfrac{1}{\beta_{20}}\dfrac{d\beta_{20}}{d\rho}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}-\mathrm{H}a_1=0,\\[2ex] \dfrac{d^2\mathrm{H}}{d\rho_1\,d\rho_2}-\dfrac{m}{a_2}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_1}-\dfrac{n}{a_1}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\rho_2}=0.\end{cases}$$

Il nous reste à indiquer comment on déterminera les cosinus U. On aura

$$U_1 = \frac{1}{\beta_{01}} \frac{dU}{d\rho_1}, \quad U_2 = \frac{1}{\beta_{02}} \frac{dU}{d\rho_2}; \tag{38 bis}$$

ces équations donneront U_1, U_2. On déterminera U par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dU}{d\rho} + \frac{\beta_{10}}{\beta_{01}} \frac{dU}{d\rho_1} + \frac{\beta_{20}}{\beta_{02}} \frac{dU}{d\rho_2} = 0, \\ &U^2 + \left(\frac{dU}{d\rho_1}\right)^2 \frac{1}{\beta_{01}^2} + \left(\frac{dU}{d\rho_2}\right)^2 \frac{1}{\beta_{02}^2} = 1. \end{aligned}\right. \tag{38 ter}$$

21. Les quantités β_{ij} ont la relation la plus directe avec les courbures des surfaces. En effet, désignons, à l'exemple de M. Lamé, les six rayons de courbure par la lettre r avec l'accent j et l'indice i, l'indice i étant celui de la surface et l'accent j représentant l'indice de l'arc; on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\beta_{01} = -\frac{H_1}{r'}, \quad \beta_{02} = -\frac{H_2}{r''}, \\ &\beta_{12} = -\frac{H_2}{r''_1}, \quad \beta_{10} = -\frac{H}{r_1}, \\ &\beta_{20} = -\frac{H}{r_2}, \quad \beta_{21} = -\frac{H_1}{r'_2}. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

(*Voir* Lamé, p. 80.)

On pourra donc, dans cette méthode, introduire facilement toutes les conditions relatives aux courbures des surfaces.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE EXPOSÉE DANS LA DEUXIÈME PARTIE.

§ X. — *Détermination d'une classe particulière de systèmes orthogonaux.*

22. Au n° 19, nous avons été conduit à examiner le cas où l'on a

$$m - n = 0, \quad m = n = \frac{b}{2},$$

ou bien

$$b^2 - 4aa_1a_2 = 0. \tag{55}$$

Alors la fonction V satisfait, non plus à une équation du sixième ordre, mais à une équation du troisième ordre, l'équation (55).

Dans ce cas, on a

$$\beta_{01} = e^{\int \frac{m}{a_2} d\rho_2 + A_2} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{b}{a_2} d\rho_2 + A_2} = \frac{1}{B_2}\sqrt{a_2};$$

de même,

$$\beta_{12} = \frac{1}{B}\sqrt{a}, \quad \beta_{20} = \frac{1}{B_1}\sqrt{a_1}.$$

Dans ces équations, comme dans tout ce qui suivra, les grandes lettres B, B_1, B_2 désignent des fonctions quelconques qui ne contiennent pas la variable ayant même indice. Ainsi B_i, A_i ne contiennent pas ρ_i.

Les quantités β doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{b}{2} = m = \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20};$$

on aura donc

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{BB_1B_2}\sqrt{aa_1a_2},$$

ce qui donne

$$BB_1B_2 = 1. \tag{56}$$

Si l'on donne une valeur quelconque à ρ, B n'est pas changé, B_1 devient une fonction de ρ_2, B_2 devient une fonction de ρ_1. Donc B est de la forme

$$B = \frac{\beta(\rho_1)}{\gamma(\rho_2)};$$

de même,

$$B_1 = \frac{\gamma(\rho_2)}{\alpha(\rho)}, \quad B_2 = \frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho_1)}.$$

Avec ces valeurs de B, B_1, B_2, les expressions des β deviennent

$$\tag{57} \left\{ \begin{aligned} \beta_{01} &= \frac{\beta(\rho_1)}{\alpha(\rho)}\sqrt{a_2}, & \beta_{10} &= \frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho_1)}\sqrt{a_2}, \\ \beta_{12} &= \frac{\gamma(\rho_2)}{\beta(\rho_1)}\sqrt{a}, & \beta_{21} &= \frac{\beta(\rho_1)}{\gamma(\rho_2)}\sqrt{a}, \\ \beta_{20} &= \frac{\alpha(\rho)}{\gamma(\rho_2)}\sqrt{a_1}, & \beta_{02} &= \frac{\gamma(\rho_2)}{\alpha(\rho)}\sqrt{a_1}. \end{aligned} \right.$$

Exprimons que ces valeurs des β satisfont aux équations (40); nous aurons, par exemple, en substituant dans la première,

$$\frac{d}{d\rho}[a_2\alpha^2(\rho)] + \frac{d}{d\rho_1}[a_2\beta^2(\rho_1)] + b\gamma^2(\rho_2) = 0,$$

ou

$$\frac{d^2}{d\rho\, d\rho_1}\left[\alpha^2(\rho)\frac{dV}{d\rho}+\beta^2(\rho_1)\frac{dV}{d\rho_1}+\gamma^2(\rho_2)\frac{dV}{d\rho_2}\right]=0.$$

Les deux autres équations (40) donneront de même

$$\frac{d^2}{d\rho_1\, d\rho_2}\left[\alpha^2(\rho)\frac{dV}{d\rho}+\beta^2(\rho_1)\frac{dV}{d\rho_1}+\gamma^2(\rho_2)\frac{dV}{d\rho_2}\right]=0,$$

$$\frac{d^2}{d\rho\, d\rho_2}\left[\alpha^2(\rho)\frac{dV}{d\rho}+\beta^2(\rho_1)\frac{dV}{d\rho_1}+\gamma^2(\rho_2)\frac{dV}{d\rho_2}\right]=0;$$

on aura donc

$$\alpha^2(\rho)\frac{dV}{d\rho}+\beta^2(\rho_1)\frac{dV}{d\rho_1}+\gamma^2(\rho_2)\frac{dV}{d\rho_2}=A(\rho)+B(\rho_1)+C(\rho_2).$$

On peut poser

$$\alpha^2(\rho)=\beta^2(\rho_1)=\gamma^2(\rho_2)=1;$$

car, si cela n'avait pas lieu, on remplacerait ρ, ρ_1, ρ_2 par des fonctions convenables; on poserait

$$\frac{d\rho}{\alpha^2(\rho)}=d\rho', \ldots .$$

Ainsi la fonction V doit satisfaire à l'équation

$$\frac{dV}{d\rho}+\frac{dV}{d\rho_1}+\frac{dV}{d\rho_2}=A(\rho)+B(\rho_1)+C(\rho_2),$$

dont l'intégrale est

$$V=\int A(\rho)\,d\rho+\int B(\rho_1)\,d\rho_1+\int C(\rho_2)\,d\rho_2+F(\rho-\rho_1,\ \rho-\rho_2).$$

On peut prendre

(58) $$V=F(\rho-\rho_1,\ \rho-\rho_2);$$

car la fonction V n'entre dans les β que par ses dérivées secondes prises par rapport à deux variables différentes.

On aura

(59) $$\beta_{01}=\beta_{10}=\sqrt{\frac{d^2V}{d\rho\, d\rho_1}},\quad \beta_{12}=\beta_{21}=\sqrt{\frac{d^2V}{d\rho_1\, d\rho_2}},\quad \beta_{20}=\beta_{02}=\sqrt{\frac{d^2V}{d\rho\, d\rho_2}}.$$

Rappelons-nous que V doit satisfaire à l'équation (55).

Posons

$$\rho-\rho_1=x,\quad \rho-\rho_2=y;$$

alors

$$\frac{dV}{d\rho}=\frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dy},\quad \frac{dV}{d\rho_1}=-\frac{dV}{dx},\quad \frac{dV}{d\rho_2}=-\frac{dV}{dy},\ldots .$$

L'équation (55) deviendra

$$(60)\qquad \left(\frac{d^3V}{dx\,dy^2}+\frac{d^3V}{dx^2dy}\right)^2=4\frac{d^2V}{dx\,dy}\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}+\frac{d^2V}{dy^2}\right).$$

Toute solution de cette équation nous donnera un système orthogonal; on aura les β par les équations (59), les H par les équations (53), et les U par les équations (38). Les équations en U deviennent, dans le cas que nous étudions,

$$\frac{dU}{d\rho}+\frac{dU}{d\rho_1}+\frac{dU}{d\rho_2}=0;\qquad 1-U^2=\frac{1}{\beta_{01}^2}\left(\frac{dU}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{\beta_{02}^2}\left(\frac{dU}{d\rho_2}\right)^2.$$

La première de ces deux équations nous montre que toutes les quantités U seront fonctions de $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$,

$$U=\mathcal{F}(\rho-\rho_1,\quad \rho-\rho_2).$$

23. Nous allons insister sur cette remarque, parce qu'elle nous donnera une propriété géométrique du système. En tous les points de l'espace pour lesquels $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$ conserveront la même valeur (ces points forment une courbe), les normales aux trois surfaces conserveront la même direction : ceci n'a pas lieu en général. Si l'on cherche le lieu des points où les normales aux surfaces ρ, par exemple, ont une direction donnée, en ces points les normales aux surfaces ρ_1 n'auront pas une direction fixe.

La propriété que nous venons de constater revient à celle-ci :

Les transformées sphériques des lignes de courbure de toutes les surfaces d'un même système sont les mêmes.

C'est ce qui arrive, par exemple, pour les surfaces parallèles, pour les surfaces de révolution ayant même axe et des méridiens orthogonaux, etc.

Les coefficients des équations (53) qui donnent H ne contiennent que les β qui sont fonctions de $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$: on pourra donc déterminer des valeurs de H, H_1, H_2, fonctions seulement de $\rho-\rho_1$, $\rho-\rho_2$. L'expression de ds^2 sur la surface $\rho=C$ sera

$$ds^2=F(\rho-\rho_1,\rho-\rho_2)\,d\rho_1^2+F_1(\rho-\rho_1,\rho-\rho_2)\,d\rho_2^2=F(x,y)\,dx^2+F_1(x,y)\,dy^2,$$

en posant

$$\rho-\rho_1=x,\quad \rho-\rho_2=y.$$

Donc toutes les surfaces d'un même système sont applicables l'une sur l'autre, et, comme les normales aux points correspondants sont parallèles, les surfaces sont toutes égales, et l'on peut amener l'une d'elles à coïncider avec toutes les autres par une simple translation. Ainsi on obtient *des systèmes orthogonaux engendrés par des surfaces restant invariables de forme et se déplaçant parallèlement à elles-mêmes.*

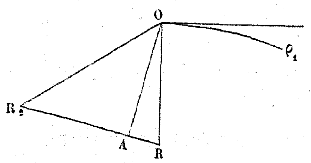
Par exemple, prenons deux cônes circulaires droits ayant même axe et se coupant à angle droit. Si nous déplaçons ces deux cônes en faisant glisser leurs sommets sur l'axe commun, nous engendrerons deux systèmes de cônes se coupant à angle droit. Le troisième système sera formé de plans passant par l'axe.

Mais ce système des cônes circulaires droits n'est qu'un cas particulier, puisque l'équation (60) en V peut s'intégrer avec trois fonctions arbitraires d'une seule variable.

§ XI. — *Systèmes orthogonaux pour lesquels les lignes de courbure sont planes.*

24. D'après le théorème de Joachimsthal, si la ligne de courbure ρ_1 est plane, le plan de cette ligne de courbure fera un angle constant avec la surface ρ, par exemple.

Soit $O\rho_1$ la ligne de courbure ρ_1; soient OR, OR_2 les normales aux deux surfaces qui se coupent suivant la ligne ρ_1; soient R, R_2 les centres de courbure de ces



deux surfaces correspondant à la ligne ρ_1. Abaissons du point O une perpendiculaire OA sur la ligne R_2R; OA représentera en grandeur et en direction le rayon de courbure de la courbe ρ_1. L'angle du plan de cette courbe avec la surface ρ sera donc

$$R_2OA = R_2RO.$$

Donc, en tous les points de la ligne ρ_1, le triangle rectangle ORR_2 restera semblable à lui-même; on aura

$$\frac{OR}{OR_2} = \frac{r'}{r'_2} = \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$(61) \qquad \frac{1}{r'} = \frac{1}{r'_2} A_1;$$

A_1 désignant suivant nos conventions une fonction qui ne contient pas ρ_1, sera constante pour tous les points d'une ligne ρ_1.

Remplaçons r' et r'_2 par leurs valeurs tirées des équations (54), l'équation précédente devient

$$(62) \qquad \beta_{01} = \beta_{21} A_1.$$

Or, on a

$$\beta_{01}\beta_{12}\beta_{20}=m;$$

remplaçons dans cette équation β_{01} par sa valeur, nous aurons

$$m=A_1\beta_{12}\beta_{21}\beta_{20}=aA_1\beta_{20},\quad \beta_{20}=\frac{m}{aA_1},$$

et, par suite,

$$\frac{d\beta_{20}}{d\rho_1}=\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{m}{a}\right)=\beta_{20}\frac{n}{a_1}=\frac{a_2}{A_2},$$

(63)
$$\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{m}{a}\right)=a_2=\frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_1};$$

de même,

(64)
$$\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{n}{a_2}\right)=a=\frac{d^2V}{d\rho_1\,d\rho_2}.$$

Ces deux équations (63), (64) expriment les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction V. On peut les intégrer une fois, et l'on obtient

$$\frac{m}{a}=\frac{dV}{d\rho_1}-B_1,\quad \frac{n}{a_2}=\frac{dV}{d\rho_2}-C_1,$$

et en faisant le produit,

(65)
$$\frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_2}=\frac{mn}{aa_2}=\left(\frac{dV}{d\rho}-B_1\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-C_1\right);$$

cette équation (65) comprend les deux équations du troisième ordre (63), (64). Quand on aura la fonction V, on calculera les β et les H.

25. Lorsque les lignes de courbure des trois systèmes doivent être planes, on a trois équations pareilles à l'équation (65),

(66)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_2}&=\left(\frac{dV}{d\rho}-B_1\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-C_1\right),\\
\frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_1}&=\left(\frac{dV}{d\rho_1}-B_2\right)\left(\frac{dV}{d\rho}-C_2\right),\\
\frac{d^2V}{d\rho_1\,d\rho_2}&=\left(\frac{dV}{d\rho_2}-B\right)\left(\frac{dV}{d\rho_1}-C\right).
\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations doivent être compatibles; il faut donc qu'elles donnent la même valeur pour $\frac{d^3V}{d\rho\,d\rho_1\,d\rho_2}$. En déduisant cette valeur des trois équations, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d^3V}{d\rho\,d\rho_1\,d\rho_2}&=\left(\frac{dV}{d\rho}-B_1\right)\left(\frac{dV}{d\rho_1}-C\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-B\right)+\left(\frac{dV}{d\rho_2}-C_1\right)\left(\frac{dV}{d\rho_1}-B_2\right)\left(\frac{dV}{d\rho}-C_2\right),\\
&=\left(\frac{dV}{d\rho}-B_1\right)\left(\frac{dV}{d\rho_1}-B_2\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-C_1\right)+\left(\frac{dV}{d\rho}-C_2\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-B\right)\left(\frac{dV}{d\rho_1}-C\right),\\
&=\left(\frac{dV}{d\rho_1}-B_2\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-B\right)\left(\frac{dV}{d\rho}-C_2\right)+\left(\frac{dV}{d\rho_1}-C\right)\left(\frac{dV}{d\rho}-B_1\right)\left(\frac{dV}{d\rho_2}-C_1\right).
\end{aligned}$$

On voit que ces trois expressions deviendront égales, si l'on a

$$C = B_2, \quad C_1 = B, \quad C_2 = B_1;$$

c'est le cas que nous examinerons (*).

Comme C ne dépend pas de ρ, B_2 ne dépendra ni de ρ ni de ρ_2; on aura donc

$$C = B_2 = \varpi_1(\rho_1), \quad C_1 = B = \varpi_2(\rho_2), \quad C_2 = B_1 = \varpi(\rho).$$

En outre, comme V n'entre dans les calculs que par ses dérivées secondes prises par rapport à deux variables différentes, on pourra remplacer V par

$$V + \int \varpi(\rho)\,d\rho + \int \varpi_1(\rho_1)\,d\rho_1 + \int \varpi_2(\rho_2)\,d\rho_2,$$

et les équations (66) deviendront,

$$\frac{d^2V}{d\rho_1\,d\rho_2} = \frac{dV}{d\rho_1}\frac{dV}{d\rho_2}, \quad \frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_1} = \frac{dV}{d\rho}\frac{dV}{d\rho_1}, \quad \frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_2} = \frac{dV}{d\rho}\frac{dV}{d\rho_2}.$$

L'intégrale de ces équations est

$$V = -L[F(\rho) + \varphi(\rho_1) + \psi(\rho_2)],$$

qu'on peut réduire à l'expression plus simple,

$$(67) \qquad V = -L(\rho + \rho_1 + \rho_2) = -Lx, \quad x = (\rho + \rho_1 + \rho_2).$$

26. Une fois trouvée la fonction V, les β s'obtiennent sans difficulté,

$$\beta_{02} = -\frac{A_1}{x}, \quad \beta_{20} = -\frac{1}{xA_1}, \quad \beta_{10} = -\frac{A_2}{x}, \quad \beta_{01} = -\frac{1}{xA_2}, \quad \beta_{21} = -\frac{A}{x}, \quad \beta_{12} = -\frac{1}{xA},$$

et comme on doit avoir $m = \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20}$, il vient

$$-\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{x^3 A A_1 A_2}, \quad A A_1 A_2 = 1.$$

Nous avons déjà résolu au n° 22 une équation semblable. On doit avoir

$$A = \frac{r_2}{r_1}, \quad A_1 = \frac{r}{r_2}, \quad A_2 = \frac{r_1}{r},$$

r, r_1, r_2 désignant des fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2. Les valeurs des β ainsi trouvées satis-

(*) Ce cas est le seul pour lequel les équations (37) puissent être vérifiées, et par conséquent on aura tous les systèmes dans lesquels les lignes de courbure sont planes.

font aux équations (36). Écrivons maintenant qu'elles satisfont aux équations (37), nous aurons

$$(r r' + r_1 r'_1) x = r^2 + r_1^2 + r_2^2,$$

et deux autres équations semblables,

$$(r_1 r'_1 + r_2 r'_2) x = r^2 + r_1^2 + r_2^2, \quad (r_2 r'_2 + r r') x = r^2 + r_1^2 + r_2^2,$$

d'où l'on déduit

$$r r' = r_1 r'_1 = r_2 r'_2 = \frac{c}{2},$$

$$r = c\sqrt{\rho}, \quad r' = c\sqrt{\rho'}, \quad r'' = c\sqrt{\rho''},$$

et par suite les valeurs des β sont données par la formule

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\rho_i}{\rho_j}}.$$

Les β obtenus, nous avons à déterminer les H, ce qui se fait sans difficulté par les formules (53), et l'on obtient

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} H &= -\frac{R'}{\sqrt{\rho}} + \frac{R + R_1 + R_2}{x\sqrt{\rho}}, \\ H_1 &= -\frac{R'_1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{R + R_1 + R_2}{x\sqrt{\rho_1}}, \\ H_2 &= -\frac{R'_2}{\sqrt{\rho_2}} + \frac{R + R_1 + R_2}{x\sqrt{\rho_2}}, \end{aligned}\right.$$

R, R_1, R_2 désignant trois fonctions arbitraires de ρ, de ρ_1, de ρ_2.

27. Pour terminer le problème, il faut avoir les expressions des coordonnées x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. Pour cela, nous allons d'abord calculer les quantités que nous avons désignées par U.

On a, d'après les équations (35),

$$(69)\qquad \beta_{ij} = \frac{1}{U_j}\frac{dU_i}{d\rho_j}.$$

Or, dans le cas que nous étudions,

$$(70)\qquad \beta_{ij} = \beta_{ji}\frac{\rho_i}{\rho_j}.$$

L'équation (69) peut donc s'écrire

$$(71)\qquad \beta_{ji} = \frac{\rho_j}{U_j}\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{U_i}{\rho_i}\right).$$

Par définition,

$$\beta_{ji} = \frac{1}{H_j}\frac{dH_i}{d\rho_j};$$

on voit donc que les équations en H_i et en $\frac{U_i}{\rho_i}$ sont exactement les mêmes; donc les intégrales générales des deux systèmes d'équations seront les mêmes, et l'on aura

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{U}{\rho} &= -\frac{S'}{\sqrt{\rho}} + \frac{S+S_1+S_2}{x\sqrt{\rho}},\\ \frac{U'_2}{\rho_1} &= -\frac{S'_1}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{S+S_1+S_2}{x\sqrt{\rho_1}},\\ \frac{U_2}{\rho_2} &= -\frac{S'_2}{\sqrt{\rho_2}} + \frac{S+S_1+S_2}{x\sqrt{\rho_2}}. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir ces intégrales, nous n'avons qu'à remplacer dans les équations (68) les fonctions arbitraires R, R_1, R_2 par trois autres fonctions S, S_1, S_2.

Mais on doit avoir entre les fonctions U, U_1, U_2 une nouvelle relation

$$U^2 + U_1^2 + U_2^2 = 1;$$

cette relation détermine les fonctions S, S_1, S_2, et l'on trouve

$$S = -C\rho + 2A\sqrt{\rho},\quad S_1 = -C\rho_1 + 2A_1\sqrt{\rho_1},\quad S_2 = -C\rho_2 + 2A_2\sqrt{\rho_2},$$

avec la condition

$$A^2 + A_1^2 + A_2^2 = 1.$$

On a donc

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{2\sqrt{\rho}}{x}\left(A\sqrt{\rho} + A_1\sqrt{\rho_1} + A_2\sqrt{\rho_2}\right) - A,\\ U_1 &= \frac{2\sqrt{\rho_1}}{x}\left(A\sqrt{\rho} + A_1\sqrt{\rho_1} + A_2\sqrt{\rho_2}\right) - A_1,\\ U_2 &= \frac{2\sqrt{\rho_2}}{x}\left(A\sqrt{\rho} + A_1\sqrt{\rho_1} + A_2\sqrt{\rho_2}\right) - A_2; \end{aligned}\right.$$

U, U_1, U_2 désignent, on se le rappelle, les cosinus des angles que font les normales aux trois surfaces avec l'un quelconque des axes. Il faudra donc prendre pour les constantes A, A_1, A_2 trois systèmes de valeurs et exprimer les conditions de perpendicularité.

Soient (A, A_1, A_2) (B, B_1, B_2) (C, C_1, C_2) les trois systèmes de constantes. Les relations qui doivent exister sont

$$\begin{aligned} A^2 + A_1^2 + A_2^2 &= 1, & AB + A_1B_1 + A_2B_2 &= 0,\\ B^2 + B_1^2 + B_2^2 &= 1, & AC + A_1C_1 + A_2C_2 &= 0,\\ C^2 + C_1^2 + C_2^2 &= 1, & BC + B_1C_1 + B_2C_2 &= 0. \end{aligned}$$

En choisissant convenablement les axes, on pourra prendre

$$A = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,\quad B = 0,\ B_1 = 1,\ B_2 = 0,\quad C = 0,\ C_1 = 0,\ C_2 = 1,$$

et l'on obtiendra les formules

$$(74)\quad \begin{cases} X = \dfrac{2\rho}{x} - 1, & X_1 = \dfrac{2\sqrt{\rho\rho_1}}{x}, & X_2 = \dfrac{2\sqrt{\rho\rho_2}}{x}, \\ Y = \dfrac{2\sqrt{\rho\rho_1}}{x}, & Y_1 = \dfrac{2\rho_1}{x} - 1, & Y_2 = \dfrac{2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{x}, \\ Z = \dfrac{2\sqrt{\rho\rho_2}}{x}, & Z_1 = \dfrac{2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{x}, & Z_2 = \dfrac{2\rho_2}{x} - 1. \end{cases}$$

En intégrant les différentielles telles que

$$XH\,d\rho + X_1H_1\,d\rho_1 + X_2H_2\,d\rho_2,$$

on trouve

$$(75)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2}\, 2\sqrt{\rho} + \displaystyle\int \frac{R'\,d\rho}{\sqrt{\rho}}, \\ y = -\dfrac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2}\, 2\sqrt{\rho_1} + \displaystyle\int \frac{R'_1\,d\rho_1}{\sqrt{\rho_1}}, \\ z = -\dfrac{R + R_1 + R_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2}\, 2\sqrt{\rho_2} + \displaystyle\int \frac{R'_2\,d\rho_2}{\sqrt{\rho_2}}. \end{cases}$$

Telles sont les équations générales de notre système orthogonal.

Par exemple, si l'on fait

$$R = R_1 = R_2 = -\frac{1}{6},$$

on aura

$$x = \frac{\sqrt{\rho}}{\rho + \rho_1 + \rho_2}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho_1}}{\rho + \rho_1 + \rho_2}, \quad z = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho + \rho_1 + \rho_2}:$$

ce sont les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

28. Si l'on se reporte à l'équation qui donne la fonction V,

$$V = -L(\rho + \rho_1 + \rho_2),$$

on voit que cette fonction satisfait à l'équation (55)

$$b^2 - 4\,aa_1\,a_2 = 0.$$

Donc le cas que nous venons d'examiner nous donne *un exemple des systèmes orthogonaux étudiés au n° 22*. Toutes les surfaces d'un même système ont la même représentation sphérique. En effet, les formules (74) ne contiennent que les rapports des trois coordonnées.

Si l'on prend pour les fonctions R, R_1, R_2,

$$R = A\sqrt{\rho}, \quad R_1 = B\sqrt{\rho_1}, \quad R_2 = C\sqrt{\rho_2},$$

les équations (75) deviennent

$$(76)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{(A\sqrt{\rho}+B\sqrt{\rho_1}+C\sqrt{\rho_2})\,2\sqrt{\rho}}{\rho+\rho_1+\rho_2}+\dfrac{A}{2}L\rho, \\ y = -\dfrac{(A\sqrt{\rho}+B\sqrt{\rho_1}+C\sqrt{\rho_2})\,2\sqrt{\rho_1}}{\rho+\rho_1+\rho_2}+\dfrac{B}{2}L\rho_1, \\ z = -\dfrac{(A\sqrt{\rho}+B\sqrt{\rho_1}+C\sqrt{\rho_2})\,2\sqrt{\rho_2}}{\rho+\rho_1+\rho_2}+\dfrac{C}{2}L\rho_2. \end{cases}$$

Ces équations représentent un système orthogonal comme ceux que nous avons signalés au n° 23. En effet, faisons $\rho = \text{const.}$, on aura

$$x-\frac{A}{2}L\rho = -\frac{A\sqrt{\rho}+B\sqrt{\rho_1}+C\sqrt{\rho_2}}{\rho+\rho_1+\rho_2}\,2\sqrt{\rho},$$

$$y-\frac{B}{2}L\rho = -\frac{A\sqrt{\rho}+B\sqrt{\rho_1}+C\sqrt{\rho_2}}{\rho+\rho_1+\rho_2}\,2\sqrt{\rho_1}+\frac{B}{2}L\frac{\rho_1}{\rho},$$

$$z-\frac{C}{2}L\rho = -\frac{A\sqrt{\rho}+B\sqrt{\rho_1}+C\sqrt{\rho_2}}{\rho+\rho_1+\rho_2}\,2\sqrt{\rho_2}+\frac{C}{2}L\frac{\rho_2}{\rho};$$

si l'on transporte l'origine au point

$$x=\frac{A}{2}L\rho,\quad y=\frac{B}{2}L\rho,\quad z=\frac{C}{2}L\rho,$$

les nouvelles coordonnées,

$$x_1 = x-\frac{A}{2}L\rho,\quad y_1 = y-\frac{B}{2}L\rho,\quad z_1 = z-\frac{C}{2}L\rho,$$

ne dépendent que de deux paramètres, les rapports $\frac{\rho_1}{\rho}$, $\frac{\rho_2}{\rho}$. Donc, toutes les surfaces ρ, rapportées à des axes parallèles, ont même équation.

Chacun des systèmes est formé par une surface de forme invariable qui se déplace parallèlement à elle-même.

§ XII. — *Détermination de tous les systèmes orthogonaux pour lesquels toute surface du système peut être divisée en carrés infiniment petits par les lignes de courbure.*

29. Nous avons été amené, au n° 14, à rechercher tous les systèmes orthogonaux compris dans la forme (13). Généralisons et cherchons *tous les systèmes orthogonaux dans lesquels chacune des surfaces peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure.*

Soit l'expression de ds^2 correspondant à de pareils systèmes

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Il n'est pas difficile de voir que les expressions de H, H_1, H_2 seront de la forme

$$H = \frac{S_1 S_2}{M}, \quad H_1 = \frac{S S_2}{M}, \quad H_2 = \frac{S S_1}{M},$$

S_i désignant une fonction qui ne contient pas ρ_i et M une fonction quelconque de ρ, ρ_1, ρ_2.

En effet, faisons $\rho_2 = C$; sur la surface $\rho_2 = C$ on aura

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2.$$

Pour que la surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par les lignes $\rho = C'$, $\rho_1 = C''$, il faut que l'on ait

$$\frac{H}{H_1} = \frac{F(\rho_1, \rho_2)}{f(\rho, \rho_2)};$$

on aura deux équations semblables à celle-ci, d'où l'on déduira la forme des expressions de H que nous avons écrite plus haut.

On aura donc

$$ds^2 = \frac{1}{M^2}(S_1^2 S_2^2 d\rho^2 + S^2 S_2^2 d\rho_1^2 + S^2 S_1^2 d\rho_2^2) \ (*). \tag{77}$$

On peut vérifier *à posteriori* que cette forme répond aux conditions que nous avons posées; car si l'on fait, par exemple, $\rho_2 = C$, on a

$$ds^2 = \frac{S_2^2}{M^2}[\varphi(\rho) d\rho^2 + \psi(\rho_1) d\rho_1^2].$$

30. Ainsi le problème est ramené à la recherche des systèmes pour lesquels

$$H = \frac{S_1 S_2}{M}, \quad H_1 = \frac{S S_2}{M}, \quad H_2 = \frac{S S_1}{M},$$

ou, ce qui revient au même,

$$H = e^{-LM + R_1 + R_2}, \quad H_1 = e^{-LM + R_2 + R}, \quad H_2 = e^{-LM + R + R_1}.$$

Pour simplifier un peu, nous emploierons dans la suite de ce calcul les notations suivantes :

$$x_i = \frac{dM}{d\rho_i}, \quad x_{ij} = \frac{d^2 M}{d\rho_i d\rho_j}, \quad x_{012} = \frac{d^3 M}{d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2}.$$

(*) Si l'on voulait en outre que le système fût isotherme, il faudrait supposer M = 1. Alors la méthode que nous suivons conduit très-simplement au théorème de M. Lamé.

Exprimons d'abord que H, H_1, H_2 satisfont aux équations (33). Nous trouvons

$$(78)\quad \begin{cases} x_{12} = x_1 \dfrac{dR}{d\rho_2} + x_2 \dfrac{dR}{d\rho_1} + MU, \\ x_{20} = x_2 \dfrac{dR_1}{d\rho} + x_0 \dfrac{dR_1}{d\rho_2} + MU_1, \\ x_{01} = x_0 \dfrac{dR_2}{d\rho_1} + x_1 \dfrac{dR_2}{d\rho} + MU_2. \end{cases}$$

On a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{dR_2}{d\rho_1} - \frac{dR}{d\rho_1}\right)\left(\frac{dR_1}{d\rho_2} - \frac{dR}{d\rho_2}\right) - \frac{dR}{d\rho_2}\frac{dR}{d\rho_1}, \\ U_1 &= \left(\frac{dR}{d\rho_2} - \frac{dR_1}{d\rho_2}\right)\left(\frac{dR_2}{d\rho} - \frac{dR_1}{d\rho}\right) - \frac{dR_1}{d\rho}\frac{dR_1}{d\rho_2}, \\ U_2 &= \left(\frac{dR_1}{d\rho} - \frac{dR_2}{d\rho}\right)\left(\frac{dR}{d\rho_1} - \frac{dR_2}{d\rho_1}\right) - \frac{dR_2}{d\rho_1}\frac{dR_2}{d\rho}. \end{aligned}$$

Pour que les équations (78) soient compatibles, il faut qu'elles donnent les mêmes valeurs pour la dérivée

$$\frac{d^3 M}{d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2} = x_{012}.$$

On trouve, en différentiant la première et en remplaçant x_{10}, x_{20} par leurs valeurs,

$$x_{012} = \frac{dR_1}{d\rho_2}\frac{dR_2}{d\rho_1} x_0 + \frac{dR}{d\rho_2}\frac{dR_2}{d\rho} x_1 + \frac{dR}{d\rho_1}\frac{dR_1}{d\rho} x_2 + M\left(\frac{dU}{d\rho} + U_1 \frac{dR}{d\rho_1} + U_2 \frac{dR}{d\rho_2}\right).$$

En différentiant les deux autres, on a de nouvelles équations qui ne diffèrent que par le coefficient de M. Pour que les trois valeurs soient égales, il faut que l'on ait

$$(79)\quad \frac{dU}{d\rho} + U_1 \frac{dR}{d\rho_1} + U_2 \frac{dR}{d\rho_2} = \frac{dU_1}{d\rho_1} + U_2 \frac{dR_1}{d\rho_2} + U \frac{dR_1}{d\rho} = \frac{dU_2}{d\rho_2} + U \frac{dR_2}{d\rho} + U_1 \frac{dR}{d\rho_1}:$$

or on a identiquement

$$U_1 \frac{dR}{d\rho_1} + U_2 \frac{dR}{d\rho_2} = U_2 \frac{dR_1}{d\rho_2} + U \frac{dR_1}{d\rho} = U \frac{dR_2}{d\rho} + U_1 \frac{dR}{d\rho_1} = -\frac{dR}{d\rho_1}\frac{dR_1}{d\rho_2}\frac{dR_2}{d\rho} - \frac{dR}{d\rho_2}\frac{dR_1}{d\rho}\frac{dR_2}{d\rho_1}.$$

Les équations (79) donnent donc

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{dU_1}{d\rho_1} = \frac{dU_2}{d\rho_2},$$

ou

$$\left(\frac{dR_2}{d\rho_1}-\frac{dR}{d\rho_1}\right)\frac{d^2R_1}{d\rho\,d\rho_2}+\left(\frac{dR_1}{d\rho_2}-\frac{dR}{d\rho_2}\right)\frac{d^2R_2}{d\rho\,d\rho_1}=0,$$

$$\left(\frac{dR}{d\rho_2}-\frac{dR_1}{d\rho_2}\right)\frac{d^2R_2}{d\rho\,d\rho_1}+\left(\frac{dR_2}{d\rho}-\frac{dR_1}{d\rho}\right)\frac{d^2R}{d\rho_1\,d\rho_2}=0,$$

$$\left(\frac{dR_1}{d\rho}-\frac{dR_2}{d\rho}\right)\frac{d^2R}{d\rho_1\,d\rho_2}+\left(\frac{dR}{d\rho_1}-\frac{dR_2}{d\rho_1}\right)\frac{d^2R_1}{d\rho\,d\rho_2}=0.$$

Les trois expressions sont nulles, parce qu'elles sont égales et que leur somme est identiquement nulle. Ainsi

$$\frac{dU}{d\rho}=\frac{dU_1}{d\rho_1}=\frac{dU_2}{d\rho_2}=0;$$

on a donc en intégrant ces trois équations

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{dR_2}{d\rho_1}-\frac{dR}{d\rho_1}\right)\left(\frac{dR_1}{d\rho_2}-\frac{dR}{d\rho_2}\right)=K,\\&\left(\frac{dR}{d\rho_2}-\frac{dR_1}{d\rho_2}\right)\left(\frac{dR_2}{d\rho}-\frac{dR_1}{d\rho}\right)=K_1,\\&\left(\frac{dR_1}{d\rho}-\frac{dR_2}{d\rho}\right)\left(\frac{dR}{d\rho_1}-\frac{dR_2}{d\rho_1}\right)=K_2.\end{aligned}\right.$$

31. Il nous reste à trouver la forme des fonctions R, R_1, R_2 qui peuvent satisfaire à ces trois équations.

Prenons la première de ces équations. Soit, pour abréger,

$$(81)\qquad \frac{dR_2}{d\rho_1}=A_2,\quad \frac{dR_1}{d\rho_2}=A_1,\quad \frac{dR}{d\rho_1}=-B,\quad \frac{dR}{d\rho_2}=-C,$$

notre équation deviendra

$$(82)\qquad (A_2+B)(A_1+C)=K.$$

Donnons à ρ une valeur constante. K ne changera pas, A_2 deviendra une fonction de ρ_1, A_1 une fonction de ρ_2. K est donc de la forme

$$K=(B+h_1)(C+h_2),$$

h_1 désignant une fonction de ρ_1, h_2 une fonction de ρ_2. Faisons une nouvelle transformation. Soit

$$B+h_1=B',\quad C+h_2=C',\quad A_2-h_1=A'_2,\quad A_1-h_2=A'_1;$$

l'équation (82) deviendra

$$(83)\qquad (B'+A'_2)(A'_1+C')=K=B'C',$$

ou bien

$$(84)\qquad \frac{B'}{A'_2}+\frac{C'}{A'_1}+1=0.$$

Prenons deux fois la dérivée par rapport à ρ. B′ et C′ ne contiennent pas cette variable. On a donc

$$B'\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{A'_2}\right)+C'\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{A'_1}\right)=0,\quad B'\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{A'_2}\right)+C'\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{A'_1}\right)=0,$$

et, par suite,

$$\frac{\dfrac{d^2}{d\rho^2}\left(\dfrac{1}{A'_2}\right)}{\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{1}{A'_2}\right)}=\frac{\dfrac{d^2}{d\rho^2}\left(\dfrac{1}{A'_1}\right)}{\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{1}{A'_1}\right)}=\frac{b''(\rho)}{b'(\rho)}.$$

A'_2 ne contenant pas ρ_2, A'_1 ne contenant pas ρ_1, la valeur commune du rapport est une fonction de ρ, comme nous l'avons écrit. En intégrant, on trouve

$$\frac{1}{A'_2}=b(\rho)c(\rho_1)+a(\rho_1)=bc_1+a_1,\quad \frac{1}{A'_1}=b(\rho)c_2(\rho_2)+a_2(\rho_2)=bc_2+a_2,$$

a_1, c_1 désignant des fonctions de ρ_1, a_2, c_2 des fonctions de ρ_2.

Portons ces valeurs dans l'équation (84); nous aurons

$$b(B'c_1+C'c_2)+a_1B'+a_2C'+1=0,$$

et, comme l'équation doit être satisfaite, quel que soit ρ, on aura

$$B'c_1+C'c_2=0,\quad a_1B'+a_2C'+1=0,$$

d'où

$$B'=\frac{c_2}{a_2c_1-a_1c_2},\quad C'=\frac{-c_1}{a_2c_1-a_1c_2},$$

et, par suite,

$$B=-h_1+\frac{c_2}{a_2c_1-c_2a_1}=-\frac{dR}{d\rho_1},\quad C=-h_2+\frac{c_1}{a_1c_2-a_2c_1}=-\frac{dR}{d\rho_2},$$

$$A_1=h_2+\frac{1}{bc_2+a_2}=\frac{dR_1}{d\rho_2},\quad A_2=h_1+\frac{1}{bc_1+a_1}=\frac{dR_2}{d\rho_1}.$$

Mais on peut remplacer ρ, ρ_1, ρ_2 par d'autres coordonnées fonctions des premières, on peut poser

$$\frac{a_2}{c_2}=-\rho'_2,\quad \frac{a_1}{c_1}=-\rho'_1,\quad b=\rho',$$

et nos équations prennent la forme plus simple

$$\frac{dR}{d\rho_1}=a'_1+\frac{b_1}{\rho_2-\rho_1},\quad \frac{dR}{d\rho_2}=a'_2+\frac{b_2}{\rho_1-\rho_2},$$

$$\frac{dR_1}{d\rho_2}=a'_2+\frac{b_2}{\rho-\rho_2},\quad \frac{dR_2}{d\rho_1}=a'_1+\frac{b_1}{\rho_2-\rho}.$$

Écrivons que

$$\frac{d}{d\rho_2}\left(a'_1 + \frac{b_1}{\rho_2 - \rho_1}\right) = \frac{d}{d\rho_1}\left(a'_2 + \frac{b_2}{\rho_1 - \rho_2}\right),$$

nous obtenons

$$b_1 = b_2 = +h;$$

h doit être une constante, car il doit être indépendant de ρ_1 et de ρ_2.

Dès lors nous obtenons sans difficulté les valeurs de R, R_1, R_2

$$(85)\quad R = a_1 + a_2 - h\,L(\rho - \rho_2),\quad R_1 = a + a_2 - h\,L(\rho_1 - \rho),\quad R_2 = a + a_1 - h\,L(\rho_2 - \rho_1),$$

et il est aisé de voir que ces valeurs vérifient les équations (80). On déduit des valeurs précédentes celles de H, H_1, H_2, par exemple

$$H = e^{-LM + a_2 + a_1 + 2a - hL(\rho - \rho_1) - hL(\rho - \rho_2)}.$$

On peut réunir la somme $a + a_1 + a_2$ à $-$ L M, remplacer a par $-\frac{1}{2}La$, et il viendra

$$(85\ bis)\qquad H = e^{-LM - \frac{1}{2}La - hL(\rho_1 - \rho) - hL(\rho_2 - \rho)} = \frac{(\rho_1 - \rho)^{-h}(\rho_2 - \rho)^{-h}}{M\sqrt{a}}.$$

Telle est la forme que nous adopterons. Les trois équations (78) deviennent, avec ces valeurs des H,

$$(86)\qquad \begin{cases} x_{01}(\rho_1 - \rho) + h(x_0 - x_1) = 0, \\ x_{12}(\rho_2 - \rho_1) + h(x_1 - x_2) = 0, \\ x_{20}(\rho - \rho_2) + h(x_2 - x_0) = 0, \end{cases}$$

et elles sont compatibles, car elles ont une solution commune de la forme

$$M = \sum_i A_i(\rho + a_i)^{-h}(\rho_1 + a_i)^{-h}(\rho_2 + a_i)^{-h},$$

A_i, a_i désignant des constantes quelconques.

On peut encore le voir en remarquant qu'un nombre quelconque de différentiations n'introduira pas plus d'équations que d'inconnues.

32. Il nous reste à exprimer que les fonctions H satisfont aux trois équations (34). Formons d'abord les expressions $\beta_{i,j}$. Si l'on pose, pour abréger,

$$(87)\qquad t_0 = \frac{(\rho_1 - \rho_1)^h}{\sqrt{a}},\quad t_1 = \frac{(\rho - \rho_2)^h}{\sqrt{a_1}},\quad t_2 = \frac{(\rho_1 - \rho)^h}{\sqrt{a_2}},$$

on a

$$\beta_{ij} = \frac{t_j}{t_i}\left(-\frac{x_i}{M} + \frac{h}{\rho_j - \rho_i}\right).$$

Substituons ces valeurs dans les trois équations (37), nous aurons trois équations.

La première sera

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t_0^2}\left(-\frac{x_{00}}{M}+\frac{x_0^2}{M^2}+\frac{h}{(\rho_1-\rho)^2}\right)+\frac{1}{t_0^2}\left(-\frac{x_0}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\left(\frac{h}{\rho-\rho_2}+\frac{a'}{2a}\right)\\
&+\frac{1}{t_1^2}\left(-\frac{x_{11}}{M}+\frac{x_1^2}{M^2}+\frac{h}{(\rho_1-\rho)^2}\right)+\frac{1}{t_1^2}\left(-\frac{x_1}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\left(\frac{h}{\rho_1-\rho_2}+\frac{a'_1}{2a_1}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{t_2^2}\left(-\frac{x_2}{M}+\frac{h}{\rho-\rho_2}\right)\left(-\frac{x_2}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho_2}\right)=0.
\end{aligned}$$

On aura de même deux autres équations, qu'on déduira de la précédente par une permutation circulaire des indices, et qui ne contiendront que trois des dérivées secondes x_{00}, x_{11}, x_{22}. Ajoutons la première et la dernière de ces deux équations, et retranchons la seconde, nous aurons une équation qui nous donnera x_{00},

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{t_0^2}\left(\frac{x_0^2}{M^2}-\frac{2x_{00}}{M}\right)+\frac{1}{t_0^2}\left(-\frac{x_0}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\left(\frac{h}{\rho-\rho_2}+\frac{a'}{2a}\right)-\frac{1}{t_1^2}\left(-\frac{x_1}{M}+\frac{h}{\rho_2-\rho_1}\right)\left(\frac{h}{\rho_1-\rho}+\frac{a'_1}{2a_1}\right)\\
&+\frac{1}{t_2^2}\left(-\frac{x_2}{M}+\frac{h}{\rho-\rho_2}\right)\left(\frac{h}{\rho_2-\rho_1}+\frac{a'_2}{2a_2}\right)+\frac{h}{t_0^2}\,\frac{1}{(\rho_1-\rho)^2}-\frac{h}{t_1^2(\rho_2-\rho_1)^2}+\frac{h}{t_2^2(\rho-\rho_2)^2}\\
&+\frac{h}{t_1^2(\rho_1-\rho)^2}-\frac{h}{t_2^2(\rho_2-\rho_1)^2}+\frac{h}{t_0^2(\rho-\rho_2)^2}+\frac{1}{t_2^2}\left(-\frac{x_2}{M}+\frac{h}{\rho-\rho_2}\right)\left(-\frac{x_2}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho_2}\right)\\
&-\frac{1}{t_0^2}\left(-\frac{x_0}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\left(-\frac{x_0}{M}+\frac{h}{\rho_2-\rho}\right)+\frac{1}{t_1^2}\left(-\frac{x_1}{M}+\frac{h}{\rho_2-\rho_1}\right)\left(-\frac{x_1}{M}+\frac{h}{\rho-\rho_1}\right)\\
&+\frac{1}{t_1^2}\left(-\frac{x_1}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\left(\frac{h}{\rho_1-\rho_2}+\frac{a'_1}{2a_1}\right)-\frac{1}{t_2^2}\left(-\frac{x_2}{M}+\frac{h}{\rho_1-\rho_2}\right)\left(\frac{h}{\rho_2-\rho}+\frac{a'_2}{2a_2}\right)\\
&+\frac{1}{t_0^2}\left(-\frac{x_0}{M}+\frac{h}{\rho_2-\rho}\right)\left(\frac{h}{\rho-\rho_1}+\frac{a'}{2a}\right)=0.
\end{aligned}$$

On a donc les six dérivées secondes. En exprimant que

$$\frac{d}{d\rho_1}x_{00}=\frac{d}{d\rho}x_{01}$$

on aurait des équations entre les dérivées premières; mais la marche à suivre paraît impraticable. Heureusement le calcul se simplifie beaucoup par l'artifice suivant.

Calculons d'abord la fonction que nous avons désignée par V dans la deuxième Partie; on a ici

$$\frac{d^2V}{d\rho_i\,d\rho_j}=\beta_{ji}\,\beta_{ij}=\left(\frac{x_i}{M}-\frac{h}{\rho_j-\rho_i}\right)\left(\frac{x_j}{M}-\frac{h}{\rho_i-\rho_j}\right).$$

D'après les équations (86), on peut écrire cette équation

$$\frac{d^2V}{d\rho_i\,d\rho_j}=\frac{d^2}{d\rho_i\,d\rho_j}[-LM-h^2L(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho_2)(\rho_2-\rho)].$$

Donc on peut écrire :

$$V = -\mathrm{L}\,\mathrm{M} - h^2\mathrm{L}(\rho-\rho_1)(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho).$$

Prenons maintenant la première et la dernière des équations (37), et multiplions-les respectivement par $\beta_{10}\,d\rho_1$, et $\beta_{20}\,d\rho_2$. On pourra les écrire

$$\beta_{10}\frac{d\beta_{10}}{d\rho_1}d\rho_1 + \beta_{20}\frac{d\beta_{20}}{d\rho_1}d\rho_1 + \beta_{10}\frac{d\beta_{01}}{d\rho}d\rho_1 = 0,$$

$$\beta_{20}\frac{d\beta_{20}}{d\rho_2}d\rho_2 + \beta_{20}\frac{d\beta_{10}}{d\rho_2}d\rho_2 + \beta_{20}\frac{d\beta_{02}}{d\rho}d\rho_2 = 0.$$

Ajoutons-les, et regardons ρ comme une constante; nous aurons

$$d.\left(\frac{\beta_{10}^2+\beta_{20}^2}{2}\right) + \frac{d}{d\rho}(\beta_{10}\beta_{01}\,d\rho_1 + \beta_{20}\beta_{02}\,d\rho_2) - \beta_{01}\frac{d\beta_{10}}{d\rho}d\rho_1 - \beta_{02}\frac{d\beta_{20}}{d\rho}d\rho_2 = 0.$$

Intégrons :

$$\frac{\beta_{10}^2+\beta_{20}^2}{2} + \frac{d^2V}{d\rho^2} - \int \beta_{01}\frac{d\beta_{10}}{d\rho}d\rho_1 + \beta_{02}\frac{d\beta_{20}}{d\rho}d\rho_2 = \mathrm{F}(\rho). \tag{88}$$

L'intégrale indiquée dans cette formule peut être déterminée. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\beta_{01}\frac{d\beta_{10}}{d\rho} &= \frac{d^2V}{d\rho\,d\rho_1}\left(-\frac{a'}{2a} - \frac{h}{\rho-\rho_2}\right) + \left(\frac{x}{\mathrm{M}} - \frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} - \frac{h}{\rho_1-\rho}\right)\\ &= \frac{d}{d\rho_1}\left(-\frac{a'}{2a}\frac{dV}{d\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} - \frac{h}{\rho_1-\rho} - \frac{h}{\rho_2-\rho}\right)^2 - \frac{h^3-h^2}{(\rho-\rho_2)(\rho_1-\rho)}\right).\end{aligned}$$

L'équation (88) devient donc

$$\frac{\beta_{10}^2+\beta_{20}^2}{2} + \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{a'}{2a}\frac{dV}{d\rho} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mathrm{M}} - \frac{h}{\rho_1-\rho} - \frac{h}{\rho_2-\rho}\right)^2 + \frac{h^3-h^2}{(\rho-\rho_2)(\rho_1-\rho)} = \mathrm{F}(\rho). \tag{89}$$

Cette équation ne contient qu'une dérivée seconde de M, x_{00}. Mais ce qu'il y a de remarquable, c'est que si on élimine x_{00} entre cette équation et celle qui a été écrite plus haut et qui nous donne aussi x_{00}, toutes les dérivées premières s'éliminent en même temps, et il reste l'équation de condition

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{t_0^2}\left[\mathrm{F}(\rho) + \frac{2h^3-3h^2}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} - \frac{a'}{2a}(2h^2-h)\left(\frac{1}{\rho_1-\rho} + \frac{1}{\rho_2-\rho}\right) + \frac{h-h^2}{(\rho_1-\rho)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_2-\rho)^2}\right]\\ &+\frac{1}{t_1^2}\left[-\frac{a'_1}{2a_1}h\left(\frac{1}{\rho_2-\rho_1} + \frac{1}{\rho_1-\rho}\right) - \frac{h}{(\rho_2-\rho_1)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_1-\rho)^2} + \frac{h^2}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}\right]\\ &+\frac{1}{t_2^2}\left[-\frac{a'_2}{2a_2}h\left(\frac{1}{\rho_2-\rho} + \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\right) + \frac{h-h^2}{(\rho-\rho_2)^2} - \frac{h}{(\rho_2-\rho_1)^2} + \frac{h^2}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}\right] = 0.\end{aligned}\right. \tag{90}$$

33. Il faut donc trouver des fonctions

$$a(\rho),\quad a_1(\rho_1),\quad a_2(\rho_2),\quad \mathrm{F}(\rho),$$

et une constante h rendant cette équation identique.

Posons

$$\rho_2 - \rho = k(\rho - \rho_1),$$

et par suite,

$$\rho_2 - \rho_1 = (k+1)(\rho - \rho_1),$$

on a

$$\frac{1}{t_0^2} = a(\rho)(\rho_1 - \rho_2)^{-2h} = a(\rho)(\rho - \rho_1)^{-2h}(k+1)^{-2h}(-1)^{-2h},$$

$$\frac{1}{t_1^2} = a_1(\rho_1)(\rho_2 - \rho)^{-2h} = a_1(\rho_1)(\rho - \rho_1)^{-2h}k^{-2h},$$

$$\frac{1}{t_2^2} = a_2(\rho_2)(\rho - \rho_1)^{-2h}.$$

Portons ces expressions dans l'équation (90), et supprimons le facteur commun $(\rho - \rho_1)^{-2h}$, nous aurons

$$(91)\quad \left\{ \begin{aligned} &(-k-1)^{-2h} a(\rho)\left[\mathrm{F}(\rho) + \frac{3h^2 - 2h^3}{k(\rho-\rho_1)^2} - \frac{a'}{2a}\frac{2h^2 - h}{\rho_1 - \rho}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{(h-h^2)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{(\rho-\rho_1)^2}\right] \\ &+ a_1(\rho_1)k^{-2h}\left[\frac{a'_1}{2a_1}h\frac{k}{k+1}\frac{1}{\rho-\rho_1} - \frac{h}{(k+1)^2(\rho-\rho_1)^2} + \frac{(h-h^2)\left(1+\frac{1}{(k+1)^2}\right)}{(\rho_1-\rho)^2}\right] \\ &+ a_2(\rho_2)\left[-\frac{a'_2}{2a_2}\frac{h}{k(k+1)}\frac{1}{\rho-\rho_1} + \frac{h-h^2}{k^2(\rho-\rho_1)^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{h}{k^2(\rho-\rho_1)^2} - \frac{h}{(k+1)^2(\rho-\rho_1)^2} + \frac{h^2}{k(k+1)(\rho-\rho_1)^2}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions par $(\rho - \rho_1)^2$ et faisons tendre ρ_1 vers ρ. Si k reste fini, comme nous le supposons, ρ_2 tendra vers ρ, et l'équation précédente se réduira à l'équation

$$(92)\quad \left\{ \begin{aligned} &(-k-1)^{-2h}\left[\frac{3h^2 - 2h^3}{k} + h - h^2 + \frac{h-h^2}{k^2}\right]a(\rho) \\ &+ k^{-2h}\left[-\frac{h}{(k+1)^2} + h - h^2 + \frac{h^2}{k+1}\right]a_1(\rho) \\ &+ \left[\frac{h-h^2}{k^2} - \frac{h}{(k+1)^2} + \frac{h^2}{k(k+1)}\right]a_2(\rho) = 0, \end{aligned} \right.$$

et cette équation doit être satisfaite quels que soient k et ρ.

Considérons d'abord le cas où $2h < 2$; dans cette hypothèse le coefficient de la plus haute puissance négative de $\frac{1}{(k+1)^2}$ sera, dans la précédente équation,

$$-hk^{-2h}a_1(\rho) - ha_2(\rho).$$

Ce coefficient doit s'annuler pour $k=-1$. On a donc

$$a_1(\rho)=a_2(\rho)(-1)^{2h+1};$$

de même,

$$a_2(\rho)=a(\rho)(-1)^{2h+1},\quad a(\rho)=a_1(\rho)(-1)^{2h+1};$$

et par suite,

$$(-1)^{2h+1}=1,\quad a(\rho)=a_1(\rho)=a_2(\rho).$$

Ainsi les trois fonctions sont égales. On peut donc les supprimer dans l'équation (92), et l'on aura une relation entre h et k qui devra être satisfaite quel que soit k,

$$(93)\left\{\begin{aligned}&-(1+k)^{-2h}\left(\frac{3h^2-2h^3}{k}+h-h^2+\frac{h-h^2}{k^2}\right)+k^{-2h}\left[-\frac{h}{(k+1)^2}+h-h^2+\frac{h^2}{(k+1)}\right]\\&\quad+\frac{h-h^2}{k^2}-\frac{h}{(k+1)^2}+\frac{h^2}{k(k+1)}=0.\end{aligned}\right.$$

Développons $(1+k)^{-2h}$ suivant les puissances de k. Les termes en $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k^2}$ disparaîtront, et en faisant $k=0$ on trouvera

$$-2h+6h^3-4h^4=h(2h+1)(h-1)^2=0.$$

Comme nous avons supposé $h<1$, la seule valeur acceptable est $h=-\frac{1}{2}$; et en effet, pour $h=-\frac{1}{2}$, l'équation (93) est identiquement vérifiée.

34. Discutons d'abord le cas où l'on a $h=-\frac{1}{2}$. Alors nous avons la forme (13)

$$H=\frac{\sqrt{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}}{M\sqrt{a(\rho)}},\quad H_1=\frac{\sqrt{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho)}}{M\sqrt{a(\rho_1)}},\quad H_2=\frac{\sqrt{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}}{M\sqrt{a(\rho_2)}}.$$

Tout revient à déterminer M et $a(\rho)$. Remplaçons dans l'équation (90) h par sa valeur $-\frac{1}{2}$. Nous aurons

$$\begin{aligned}&a(\rho_2-\rho_1)\left[\frac{1}{(\rho-\rho_2)(\rho_1-\rho)}-\frac{a'}{2a}\left(\frac{1}{\rho_1-\rho}+\frac{1}{\rho_2-\rho}\right)-\frac{\frac{3}{4}}{(\rho_1-\rho)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{(\rho_2-\rho)^2}+F(\rho)\right]\\&+a_1(\rho-\rho_2)\left[\frac{a'_1}{4a_1}\left(\frac{1}{\rho_2-\rho_1}+\frac{1}{\rho_1-\rho}\right)+\frac{1}{2(\rho_1-\rho_2)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{(\rho_1-\rho)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}\right]\\&+a_2(\rho_1-\rho)\left[\frac{a'_2}{4a_2}\left(\frac{1}{\rho_2-\rho}+\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\right)-\frac{\frac{3}{4}}{(\rho-\rho_2)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{(\rho_2-\rho_1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}\right]=0.\end{aligned}$$

Multiplions le premier membre par $(\rho_1-\rho)^2(\rho_1-\rho_2)^2$ et prenons la dérivée sixième par rapport à ρ_1. Il viendra

$$\frac{d^6}{d\rho_1^6}\left[\frac{a'_1}{4}(\rho_2-\rho_1)(\rho_1-\rho)+\frac{a_1}{4}(5\rho_1-2\rho-3\rho_2)\right]=0,$$

ou, en développant,

$$\frac{d^7 a_1}{d\rho_1^7}(\rho_2-\rho_1)(\rho_1-\rho)+6\frac{d^6 a_1}{d\rho_1^6}(\rho_2+\rho-2\rho_1)+\frac{d^6 a_1}{d\rho_1^6}\,\frac{5\rho_1-2\rho-3\rho_2}{4}=0,$$

équation qui doit être satisfaite quels que soient ρ, ρ_2. On a donc

$$\frac{d^6 a_1}{d\rho_1^6}=0,\quad a(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Hx^5.$$

Ainsi, la fonction $a(x)$ doit être un polynôme du cinquième degré au plus. Or, le système que nous avons considéré dans la première Partie donne un polynôme du cinquième degré quelconque. Ainsi, les seuls systèmes qui correspondent au cas de $h=-\frac{1}{2}$ sont ceux que nous avons déjà étudiés.

On peut objecter à ce raisonnement que les équations pourraient donner plusieurs valeurs pour la fonction M que nous n'avons pas encore déterminée. Si cela a lieu, on aura deux valeurs de M : M′, M″, deux expressions de ds^2 : ds'^2, ds''^2, et il viendra

$$M'^2 ds'^2 = M''^2 ds''^2.$$

Dans le premier système, à des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2 correspond un point; dans le deuxième système, aux mêmes coordonnées répond un autre point. Il résulte de là un mode de transformation dans lequel un point répond à un point. Mais, puisque d'après l'équation précédente ds'^2 est toujours proportionnel à ds''^2, on voit que dans ce mode de transformation les angles ne sont pas altérés. Or, nous savons qu'il n'existe qu'un pareil mode de transformation, la transformation par rayons vecteurs réciproques. Ainsi, il ne peut exister que deux valeurs différentes pour M, justement celles que nous avons trouvées dans la première Partie au n° 4.

35. Nous avons supposé $h<1$: considérons maintenant les deux cas $h=1$, $h>1$. Prenons d'abord $h=1$: l'équation (92) nous donne

$$\frac{1}{k(k+1)^2}\left[a(\rho)-a_1(\rho)-a_2(\rho)\right]=0.$$

On doit donc avoir

$$a(\rho)-a_1(\rho)-a_2(\rho)=0;$$

de même,

$$a_1(\rho)-a_2(\rho)-a(\rho)=0,$$
$$a_2(\rho)-a(\rho)-a_1(\rho)=0,$$

ce qui donne

$$a(\rho)=a_1(\rho)=a_2(\rho)=0.$$

Ces valeurs sont inadmissibles. Donc h ne peut être égal à 1.

Soit maintenant $h > 1$; lorsque dans l'équation (92) on fera $k = -1$, le coefficient de $\left(\frac{1}{k+1}\right)^{2h}$ devra être nul, car on a $2h > 2$, et par suite $\frac{1}{(k+1)^{2h}}$ est la plus grande puissance négative. On aura donc

$$2h^3 - 3h^2 + 2h - 2h^2 = 0, \quad (2h^2 - 5h + 2)h = 0, \quad h = 2, \quad h = \frac{1}{2}, \quad h = 0.$$

Comme h doit être plus grand que 1, prenons $h = 2$.

L'équation (92) se réduira à

$$a(\rho) + a_1(\rho) + a_2(\rho) = 0.$$

En remontant à l'équation (90) et faisant successivement

$$\rho = \rho_1, \quad \rho = \rho_2, \quad \rho_1 = \rho_2,$$

on trouve

$$a'_1 = 0, \quad a' = 0, \quad a'_2 = 0, \quad F(\rho) = 0,$$

et l'on retrouve l'équation

$$a(\rho) + a_1(\rho_1) + a_2(\rho_2) = 0,$$

ce qui exige

$$a(\rho) = c, \quad a_1(\rho_1) = c_1, \quad a_2(\rho_2) = c_2,$$
$$c + c_1 + c_2 = 0,$$

c, c_1, c_2 désignant trois constantes.

Il est inutile de continuer les calculs, car les quantités c, c_1, c_2 se trouvant sous des radicaux, une au moins des valeurs de H, H_1, H_2 données par la formule (85 *bis*) serait imaginaire, les constantes c, c_1, c_2 ne pouvant avoir le même signe.

Ainsi, le seul système pour lequel chaque surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure est le système, étudié dans la première Partie, des surfaces du quatrième ordre, système qui comprend comme cas particulier le système des surfaces du second ordre.

Ce résultat peut même fournir une démonstration du théorème de M. Lamé; car on n'a plus qu'à chercher dans quel cas particulier le système des surfaces du quatrième ordre devient isotherme, et on trouve sans difficulté que c'est dans le cas où le système se réduit au système des surfaces du second degré.