Kronecker

Sur la résolution de l'équation de Pell au moyen des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 303-308

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__303_0>

SUR

LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE PELL

AU MOYEN

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. KRONECKER.

(*Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 22 janvier 1863.)

TRADUIT PAR M. HOÜEL,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

Je vais donner ici quelques indications sur les méthodes employées pour cet objet, et faire connaître en même temps ceux des résultats obtenus qui peuvent se représenter par des notations simples.

Soient P et Q deux nombres impairs positifs, sans facteurs carrés, et dont le premier soit plus grand que l'unité; supposons, de plus, que l'on attribue aux lettres m et n successivement toutes les valeurs entières et positives, premières avec $2\mathrm{P}$ et $2\mathrm{Q}$ respectivement. La valeur-limite que prennent les deux séries

$$\sum\left(\frac{\mathrm{P}}{m}\right)\cdot\frac{1}{m^{1+\rho}},\quad \sum\left(\frac{-\mathrm{Q}}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^{1+\rho}},$$

pour $\rho = 0$, résulte immédiatement du Mémoire de Dirichlet inséré aux tomes XIX et XXI du *Journal de Crelle*. On a, d'après cela,

$$\lim_{\rho=0}.\sum\left(\frac{\mathrm{P}}{m}\right)\cdot\frac{1}{m^{1+\rho}}\cdot\sum\left(\frac{-\mathrm{Q}}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^{1+\rho}}=\frac{\pi}{4\sqrt{\mathrm{D}}}.\mathrm{H}(-\mathrm{Q})\,\mathrm{H}(\mathrm{P}).\log\left(\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{\mathrm{P}}\right),$$

en posant $\mathrm{P}.\mathrm{Q}=\mathrm{D}$, et désignant par $\mathrm{H}(-\mathrm{Q})$, $\mathrm{H}(\mathrm{P})$ les nombres respectifs des classes de formes quadratiques proprement primitives de déterminants $-\mathrm{Q}$ et P, et par T et U les plus petits nombres pour lesquels on ait

$$T^2 - P.U^2 = 1.$$

Il faut observer encore que l'on devra prendre $H(-1) = \frac{1}{2}$.

Dans le cas où D est sans facteur carré et de la forme $4\nu + 1$, le produit de ces deux séries, ou, ce qui est la même chose, la série double

$$\sum\sum \left(\frac{P}{m}\right)\left(\frac{-Q}{n}\right)\frac{1}{(mn)^{1+\rho}}$$

peut se transformer en

$$\frac{1}{2^{2+\rho}}\cdot\left\{2^{1+\rho} - \left(\frac{2}{R}\right)\right\}\cdot\sum\left[\frac{a}{R}\right]\sum\sum\frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\rho}}.$$

Dans cette formule, on devra faire R égal à P ou à Q, suivant que P sera $\equiv 1$ ou $\equiv 3$, mod. 4, le premier signe de sommation se rapportant à toutes les formes proprement primitives non équivalentes (a, b, c), de déterminant $-D$; le signe $\left[\frac{a}{R}\right]$ désignant le caractère de la forme correspondante pour tous les facteurs premiers de R, de sorte que l'on a

$$\left[\frac{a}{R}\right] = \left(\frac{a'}{R}\right),$$

lorsque (a', b', c') est une forme équivalente à (a, b, c) dont le premier coefficient a' n'a pas de facteur commun avec R; et enfin les deux derniers signes de sommation s'étendant à toutes les valeurs entières, positives et négatives, de x et de y, à l'exception du seul système de valeurs $x = 0$, $y = 0$. Il vient, d'après cela,

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{\sqrt{D}}\cdot H(-Q).H(P).\log(T + U\sqrt{P})\\ &= \left\{2 - \left(\frac{2}{R}\right)\right\}\cdot\lim_{\rho=0}\sum\sum\sum\left[\frac{a}{R}\right]\frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\rho}}.\end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur-limite du second membre de cette équation, cherchons la valeur de

$$\lim_{\rho=0}\sum\sum\frac{e^{2\pi i(\sigma x + \tau y)}}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\rho}},$$

pour le cas où σ, τ, a, b, c sont des quantités réelles quelconques, satisfaisant toutefois à la condition

$$ac - b^2 = D > 0.$$

Cette valeur se trouve exprimée de la manière suivante :

$$\frac{2\sigma^2\pi^2}{a}+\frac{\pi}{3\sqrt{D}}\cdot\log\left[\frac{1}{4\pi^2}\cdot\vartheta'(0,\omega_1).\vartheta'(0,\omega_2)\right]-\frac{\pi}{\sqrt{D}}\log[\vartheta(\tau+\sigma\omega_1,\omega_1).\vartheta(-\tau+\sigma\omega_2,\omega_2)],$$

en représentant par $\vartheta(z,\omega)$ la série

$$-i.\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\omega\pi i+(2n+1)z\pi i},$$

et par ϑ' la dérivée de cette série par rapport à z, et posant, pour abréger,

$$\omega_1=\frac{-b+i\sqrt{D}}{a},\quad \omega_2=\frac{+b+i\sqrt{D}}{a}.$$

Au moyen de cette expression, qui sert de base à toutes mes recherches sur ce sujet, on trouve que la valeur de la différence

$$\sum\sum\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\rho}}-\sum\sum\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^{1+\rho}},$$

(a, b, c), (a', b', c') étant deux formes différentes, de déterminant $-D$, a pour limite

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{D}}\cdot\log\left(\frac{a\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}}\cdot\frac{\vartheta'(0,\omega'_1).\vartheta'(0,\omega'_2)}{\vartheta'(0,\omega_1).\vartheta'(0,\omega_2)}\right),$$

ρ convergeant vers zéro, et ω'_1, ω'_2 étant des quantités formées en a', b', c', comme ω_1, ω_2 le sont en a, b, c. En conséquence, on a, pour $D\equiv 1$, mod. 4, l'équation

$$H(-Q).H(P).\log(T+U\sqrt{P})=\frac{2}{3}\left\{2-\left(\frac{2}{R}\right)\right\}\sum\left[\frac{a}{R}\right]\log\frac{a\sqrt{a}}{\vartheta'(0,\omega_1).\vartheta'(0,\omega_2)},$$

dont le second membre, d'après ce qu'on a vu plus haut, est égal à

$$\frac{2}{3}\sum\left[\frac{a}{P}\right]\log\frac{a\sqrt{a}}{\vartheta'(0,\omega_1).\vartheta'(0,\omega_2)},$$

lorsque $P\equiv 1$, mod. 8, et au triple de cette valeur lorsque $P\equiv 5$, mod. 8, tandis que ce second membre devient égal à

$$\frac{2}{3}\sum\left[\frac{a}{Q}\right]\log\frac{a\sqrt{a}}{\vartheta'(0,\omega_1).\vartheta'(0,\omega_2)},$$

lorsque $Q\equiv 7$, mod. 8, et au triple de cette dernière valeur lorsque $Q\equiv 3$, mod. 8. Dans toutes ces formules, les sommations doivent être étendues à un système quelconque de formes non équivalentes, de déterminant $-D$, et le facteur

$$H(P).\log(T + U\sqrt{P}),$$

dans le premier membre de l'équation précédente, peut, d'après Dirichlet, être remplacé par une expression formée au moyen des racines $(4P)^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

De même, la valeur de

$$H(-Q).H(P).\log(T + U\sqrt{P})$$

peut, à l'aide de la formule précédente, s'exprimer au moyen des fonctions elliptiques, pour toutes les autres formes des nombres P et Q, et même dans le cas où ces nombres auraient un facteur commun.

En remarquant que, pour les formes *réduites* (a, b, c), on peut, avec une certaine approximation, se contenter de prendre le premier terme de la série $\vartheta(0, \omega)$, on voit aisément que la valeur de

$$H(-Q).H(P).\log(T + U\sqrt{P})$$

a pour expression approchée

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{R}\right)\right\}.\sum\left[\frac{a}{R}\right].\left(\frac{\pi\sqrt{D}}{3a} + \log a\right),$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs a des premiers coefficients des diverses formes réduites. On obtiendrait sans peine une plus grande exactitude, en prenant quelques termes de plus de la série ϑ'; mais la première approximation que nous venons d'indiquer est déjà d'un haut intérêt, parce que, d'une part, elle permet, de la manière la plus simple, de se faire une idée de la grandeur des nombres T et U, et que, d'autre part, elle donne quelques renseignements sur le partage des nombres a entre les différentes espèces.

Pour éclaircir par quelques exemples cette relation si remarquable de ces deux expressions numériques reposant sur des définitions entièrement différentes, prenons d'abord les cas suivants :

$$P = D = 5, \quad P = D = 13, \quad P = D = 37,$$

où les valeurs numériques correspondantes,

$$2 + \sqrt{5}, \quad 18 + 5\sqrt{13}, \quad 882 + 145\sqrt{37},$$

sont représentées approximativement par les valeurs de la même expression

$$\frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{D}}$$

Comme autre exemple, les solutions fondamentales de l'équation

$$T^2 - P.U^2 = -1,$$

dans le cas de $P = 17$ et de $P = 97$, c'est-à-dire les valeurs

$$4 + \sqrt{17}, \quad 5604 + 569\sqrt{97},$$

sont exprimées approximativement par les formules

$$\frac{2}{9} e^{\frac{5}{18}\pi\sqrt{17}}, \quad \frac{2}{49} e^{\frac{17}{42}\pi\sqrt{97}},$$

en faisant encore $Q = 1$ dans les formules précédentes.

Enfin, pour $D = 85$, suivant que l'on prend $Q = 1$, 5 ou 17, on trouve pour les solutions fondamentales des équations

$$T^2 - 85U^2 = -1, \quad T^2 - 17U^2 = -1, \quad T^2 - 5U^2 = -1,$$

c'est-à-dire pour les valeurs

$$378 + 41\sqrt{85}, \qquad 4 + \sqrt{17}, \qquad 2 + \sqrt{5},$$

les expressions approchées

$$\frac{1}{8} e^{\frac{3}{10}\pi\sqrt{85}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{1}{10}\pi\sqrt{85}}, \qquad e^{\frac{1}{20}\pi\sqrt{85}}.$$

Les diverses formes que l'on obtient de cette manière pour une seule et même solution de l'équation de Pell (comme celle que l'on vient d'obtenir, dans les exemples précédents, pour $4 + \sqrt{17}$) donnent lieu à un grand nombre de remarques intéressantes. Mais les conséquences théoriques qui découlent des résultats précédents sont bien plus importantes. On y découvre non-seulement une liaison surprenante entre les formes quadratiques correspondantes à deux déterminants opposés; mais, de plus, on aperçoit encore ici cette décomposition des équations aux modules singuliers, qui formait l'objet principal de la Note que j'ai présentée en juin 1862. Cette même décomposition a fait reconnaître aisément la possibilité de représenter, au moyen des modules singuliers des fonctions elliptiques, *certaines* solutions de l'équation de Pell. Mais, pour obtenir la relation intéressante qui existe entre cette décomposition et la solution fondamentale correspondante, il nous a fallu faire usage des méthodes de Dirichlet, auxquelles l'Arithmétique transcendante doit tant de beaux résultats, et qui se montrent encore ici tellement fécondes pour l'Algèbre. En effet, la nature algébrique des expressions $\mathfrak{z}$ introduites dans les développements précédents est d'une haute importance pour la théorie des modules singuliers des fonctions elliptiques en général, bien que, dans certains cas particuliers, ces expressions puissent être remplacées par ces modules eux-mêmes. Il nous suffira de citer comme exemple une des formules qui ont lieu pour $D = 8n + 5$,

$$\Pi \frac{\sin \frac{\alpha\pi}{D}}{\sin \frac{\beta\pi}{D}} = \Pi \sqrt[3]{4\varkappa^2\varkappa'^2},$$

dans laquelle α et β désignent tous les nombres moindres que D, pour lesquels on a respectivement

$$\left(\frac{\alpha}{D}\right) = +1, \quad \left(\frac{\beta}{D}\right) = -1,$$

tandis que le signe de produit du second membre s'étend à un sixième (convenablement choisi) de tous les modules $\varkappa$ pour lesquels se fait la multiplication complexe par $\sqrt{-D}$. La liaison caractéristique des deux théories algébriques différentes, qui était contenue dans tous les résultats que nous avons indiqués jusqu'ici, ressort de la manière la plus évidente de cette formule particulière, qui donne une relation immédiate entre les racines de l'unité et les modules singuliers des fonctions elliptiques.