

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-A. SERRET

**Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées  
partielles du premier ordre**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1<sup>re</sup> série*, tome 3 (1866), p. 143-161

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1866\\_1\\_3\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3_143_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION  
DES  
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
DU PREMIER ORDRE,

PAR M. J.-A. SERRET,  
MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE  
ET A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

---

§ I.

1. Tous les géomètres connaissent les belles recherches de Cauchy et de Jacobi sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre; les méthodes remarquables auxquelles ces illustres savants ont été conduits résolvent la question proposée de la manière la plus générale, et il semble qu'il n'y ait plus rien à ajouter à l'analyse qu'ils ont développée.

Cependant la méthode de Jacobi et celle de Cauchy laissent subsister une difficulté que mon savant confrère et ami M. Bertrand a signalée le premier (*voir* t. XLV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 617), et qui résulte de ce que le procédé de démonstration employé cesse d'être admissible lorsqu'une certaine quantité qui s'introduit dans les calculs devient infinie ou indéterminée. Or, ainsi que l'a fait remarquer M. Bertrand, cette circonstance se présente dans le cas le plus général, et non pas seulement dans quelques cas exceptionnels. Pénétré de la valeur de cette objection, M. Ossian Bonnet a cherché à s'affranchir des difficultés en question, et il a fait connaître une démonstration géométrique du théorème de Jacobi pour le cas où le nombre des variables indépendantes se réduit à deux (t. XLV des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, p. 581).

Mais le travail de M. Bonnet ne jette aucune lumière sur la portée véritable de l'objection formulée par M. Bertrand, laquelle subsiste dans son entier.

Dans les explications qui vont suivre, je prendrai de préférence, pour point de

départ, la méthode au développement de laquelle Cauchy a consacré la première partie de son Mémoire (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 238), et je traiterai d'abord le cas simple de deux variables indépendantes.

2. Soit

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation proposée, dans laquelle  $z$  désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  et où  $p$  et  $q$  représentent les dérivées partielles de  $z$  par rapport à  $x$  et à  $y$  respectivement. Pour achever de déterminer la fonction inconnue  $z$ , nous supposerons qu'elle soit assujettie à se réduire, pour  $x = x_0$ , à une fonction donnée mais arbitraire  $f(y)$  de  $y$ ; dans la même hypothèse, on aura

$$q = \frac{df(y)}{dy} = f'(y).$$

La méthode de Cauchy, fondée, comme celle d'Ampère, sur le changement de l'une des variables indépendantes, ramène le problème proposé au suivant :

*Trouver quatre fonctions  $y, z, p, q$  des deux variables indépendantes  $x$  et  $y_0$  qui satisfont généralement aux deux équations*

$$(2) \quad \begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ F(x, y, z, p, q) = 0. \end{cases}$$

*et qui, pour  $x = x_0$ , se réduisent respectivement à  $y_0, z_0, p_0, q_0$ .*

Nous faisons, pour abréger,

$$(3) \quad z_0 = f(y_0), \quad q_0 = f'(y_0),$$

et nous désignons par  $p_0$  une quantité déterminée par l'équation

$$(4) \quad F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Ce changement de variables conduit, pour la détermination des quatre inconnues, à quatre équations simultanées aux dérivées partielles; mais, parce que ces équations ne renferment point la variable  $y_0$ , elles doivent être traitées comme des équations différentielles ordinaires, et si l'on désigne par

$$X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq$$

la différentielle totale du premier membre de l'équation (1), on peut les comprendre dans la formule unique

$$(5) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq}.$$

On doit remarquer que l'une de ces équations est une conséquence du système formé par les trois autres et par l'équation (1).

Au moyen des équations (5), on peut en général trouver des valeurs finies et déterminées de  $y, z, p, q$ , qui se réduisent respectivement à  $y_0, z_0, p_0, q_0$  pour  $x = x_0$ ; soient

$$(6) \quad \begin{cases} y = f_1(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = f_2(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ p = f_3(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ q = f_4(x, y_0, z_0, p_0, q_0), \end{cases}$$

ces valeurs. Si l'on élimine  $y_0, z_0, p_0, q_0$  entre les deux premières équations de ce système et les équations (3) et (4), on obtiendra la valeur demandée de l'inconnue  $z$ .

Telle est, en résumé, la méthode donnée par Cauchy; mais l'analyse qui y conduit exige que les valeurs de  $y, z, p, q$ , tirées des équations (6), rendent identique l'équation

$$\frac{dz}{dy_0} - q \frac{dy}{dy_0} = 0.$$

Pour établir que cette circonstance a toujours lieu, Cauchy pose

$$\frac{dz}{dy_0} - q \frac{dy}{dy_0} = I,$$

et il obtient l'équation

$$P \frac{dI}{dx} + ZI = 0,$$

dans laquelle nous supposons que  $y, z, p, q$  soient remplacées par leurs valeurs tirées des formules (6). En intégrant cette équation on trouve

$$\log \frac{I}{I_0} = - \int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx,$$

d'où

$$I = I_0 e^{- \int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx},$$

$I_0$  désignant la valeur que prend  $I$  pour  $x = x_0$ ; et comme on a évidemment

$$I_0 = 0,$$

on en conclut généralement

$$I = 0.$$

L'objection que nous avons à discuter consiste donc en ce que la conclusion de

Cauchy n'est plus admissible lorsque l'intégrale  $\int_{x_0}^x \frac{z}{p} dx$  cesse d'avoir une valeur finie et déterminée. Cette circonstance pourra se présenter et se présentera effectivement, si l'on attribue une forme déterminée convenable à la fonction  $f(y)$  qui exprime la valeur de  $z$  dans l'hypothèse  $x = x_0$ ; mais je dis que :

*Si l'intégrale  $\int_{x_0}^x \frac{z}{p} dx$  cesse d'avoir une valeur finie et déterminée pour une certaine forme de la fonction  $f(y)$ , les formules (6) deviennent illusoires et cessent de fournir la solution du problème proposé; celle-ci est donnée, dans ce cas, par l'intégrale complète de Lagrange qui accompagne l'intégrale générale.*

3. Considérons toujours  $z_0$  comme une fonction indéterminée de  $y_0$  et supposons que  $p_0$  ait été remplacé partout par sa valeur tirée de l'équation (4). Alors il est facile de voir que les expressions (6) de  $y$  et de  $z$  contiendront l'une et l'autre  $q_0$ , ou qu'elles seront toutes deux indépendantes de cette dérivée. Ce dernier cas ne peut évidemment se présenter que si l'équation proposée (1) est linéaire par rapport aux dérivées  $p$  et  $q$ ; il ne saurait offrir en conséquence aucune difficulté, et nous en ferons ici abstraction. Cela posé, si l'on désigne par

$$(7) \quad V = 0$$

l'équation obtenue par l'élimination de  $q_0$  entre les deux premières équations (6), les quatre équations qui composent ce système (6) pourront être remplacées par les quatre suivantes :

$$(8) \quad V = 0, \quad \frac{dV}{dy_0} + q_0 \frac{dV}{dz_0} = 0,$$

$$(9) \quad \frac{dV}{dx} + p \frac{dV}{dz} = 0, \quad \frac{dV}{dy} + q \frac{dV}{dz} = 0.$$

Ce théorème est bien connu, et pour l'établir il suffit de prendre la différentielle totale de l'équation (7) où  $y$  et  $z$  sont fonctions de  $x$  et de  $y_0$ ,  $z_0$  de  $y_0$  seule. Après avoir remplacé dans cette différentielle  $dz_0$  par  $q_0 dy_0$ ,  $dz$  par  $pdx + qdy$ , et  $dy$  par sa valeur tirée de la première équation (6), il faudra égaler à zéro les coefficients de  $dx$  et de  $dy_0$ , et l'on obtiendra deux équations qui devront être identiques en vertu des équations (6). L'une de ces deux équations contiendra nécessairement la dérivée  $\frac{dq_0}{dy_0}$ , et l'identité dont nous venons de parler ne pourra avoir lieu que si le coefficient de  $\frac{dq_0}{dy_0}$  s'annule. L'équation où figure cette dérivée se décompose ainsi en deux autres, et l'on obtient de cette manière les trois équations qui, avec l'équation (7), constituent les deux systèmes (8) et (9).

Pour reconstruire l'équation proposée (1), il suffit évidemment d'éliminer  $y_0$

et  $z_0$  entre les équations (7) et (9); d'où il suit que la seule équation (7) satisfait à l'équation (1), si l'on y regarde  $y_0$  et  $z_0$  comme deux constantes arbitraires; puisque les valeurs de  $p$  et de  $q$  que l'on en tirera dans cette hypothèse seront les mêmes que celles obtenues dans l'hypothèse où  $y_0$  et  $z_0$  sont variables et assujetties à la deuxième équation (8). Cette solution particulière qui accompagne toujours une forme déterminée de l'intégrale générale est ce que Lagrange a nommé une *intégrale complète*; nous allons voir dans quel cas elle peut nous donner la solution du problème proposé.

4. Cherchons d'abord à exprimer la valeur générale de  $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$  en fonction des quantités de l'intégrale. Pour cela, je supposerai, en vue d'abrégé, que l'on ait résolu l'équation (7) par rapport à  $z$  et que l'on en ait tiré la valeur  $z = M$ ,  $M$  étant une fonction donnée de  $x, y, y_0, z_0$  qui se réduit à  $z_0$  pour  $x = x_0$  et  $y = y_0$ . Les équations (8) et (9) seront plus simplement

$$(10) \quad z = M, \quad \frac{dM}{dy_0} + q_0 \frac{dM}{dz_0} = 0,$$

$$(11) \quad p = \frac{dM}{dx}, \quad q = \frac{dM}{dy}.$$

On peut obtenir la valeur de la différentielle totale  $dF$  du premier membre de l'équation (1), en ajoutant la différentielle de la première équation (10) et celles des équations (11), après les avoir multipliées par des facteurs convenables  $\lambda, \mu, \nu$ , propres à faire disparaître  $dy_0$  et  $dz_0$ . On a donc

$$(12) \quad \begin{cases} dF = \left( \lambda \frac{dM}{dx} + \mu \frac{d^2 M}{dx^2} + \nu \frac{d^2 M}{dx dy} \right) dx \\ \quad + \left( \lambda \frac{dM}{dy} + \mu \frac{d^2 M}{dx dy} + \nu \frac{d^2 M}{dy^2} \right) dy - \lambda dz - \mu dp - \nu dq, \end{cases}$$

les facteurs  $\lambda, \mu, \nu$  devant satisfaire aux deux équations

$$\lambda \frac{dM}{dy_0} + \mu \frac{d^2 M}{dx dy_0} + \nu \frac{d^2 M}{dy dy_0} = 0,$$

$$\lambda \frac{dM}{dz_0} + \mu \frac{d^2 M}{dx dz_0} + \nu \frac{d^2 M}{dy dz_0} = 0,$$

et, par suite, la valeur de  $-\frac{Z}{P}$  sera

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{d^2 M}{dx dy_0} \frac{d^2 M}{dy dz_0} - \frac{d^2 M}{dx dz_0} \frac{d^2 M}{dy dy_0}}{\frac{dM}{dy_0} \frac{d^2 M}{dy dz_0} - \frac{dM}{dz_0} \frac{d^2 M}{dy dy_0}}.$$

Pour effectuer l'intégration de la différentielle  $-\frac{Z}{P}dx$ , il n'est pas nécessaire de remplacer, dans l'expression précédente,  $y$  par sa valeur tirée de la seconde équation (10); on évite effectivement cette élimination en procédant comme il suit : on peut écrire

$$-\frac{Z}{P}dx = \frac{\frac{d^2M}{dydz_0} \left( \frac{dM}{dz_0} \frac{d^2M}{dx dy_0} - \frac{dM}{dy_0} \frac{d^2M}{dx dz_0} \right) dx + \frac{d^2M}{dx dz_0} \left( \frac{dM}{dy_0} \frac{d^2M}{dy dz_0} - \frac{dM}{dz_0} \frac{d^2M}{dy dz_0} \right) dy}{\frac{dM}{dz_0} \left( \frac{dM}{dy_0} \frac{d^2M}{dy dz_0} - \frac{dM}{dz_0} \frac{d^2M}{dy dz_0} \right)},$$

car les termes introduits dans le numérateur de cette expression se détruisent mutuellement. Cela posé, en différentiant la deuxième équation (10), savoir :

$$\frac{\left( \frac{dM}{dy_0} \right)}{\left( \frac{dM}{dz_0} \right)} + q_0 = 0,$$

dans l'hypothèse où  $y$  est fonction de  $x$  seule, on trouve

$$\left( \frac{dM}{dz_0} \frac{d^2M}{dx dy_0} - \frac{dM}{dy_0} \frac{d^2M}{dx dz_0} \right) dx = \left( \frac{dM}{dy_0} \frac{d^2M}{dy dz_0} - \frac{dM}{dz_0} \frac{d^2M}{dy dz_0} \right) dy;$$

au moyen de quoi l'expression précédente de  $-\frac{Z}{P}dx$  peut s'écrire

$$(13) \quad -\frac{Z}{P}dx = \frac{d \log \frac{dM}{dz_0}}{dx} dx + \frac{d \log \frac{dM}{dz_0}}{dy} dy = d \log \frac{dM}{dz_0}.$$

Comme la quantité  $M$  doit se réduire à  $z_0$  quand on fait  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , il est clair que  $\frac{dM}{dz_0}$  se réduira, dans la même hypothèse, à l'unité, et l'on aura, en intégrant l'équation (13),

$$(14) \quad -\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx = \log \frac{dM}{dz_0}.$$

Telle est l'expression générale de l'intégrale que nous avons à considérer.

5. D'après ce résultat, l'intégrale  $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$  ne peut devenir infinie que si l'on attribue à la fonction  $f(y)$  une valeur telle, que la dérivée  $\frac{dM}{dz_0}$  devienne nulle ou infinie, après la substitution de la valeur de  $y$  tirée de la deuxième équation (10); mais il est évident que cette dernière équation devient alors illusoire, c'est-à-dire

qu'on n'en saurait tirer pour  $y$  une valeur finie et déterminée se réduisant à  $y_0$  pour  $x = x_0$ ; puisque l'hypothèse  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  doit, par les conditions du problème, réduire  $\frac{dM}{dz_0}$  à l'unité.

Mais de ce que l'équation

$$\frac{dM}{dy_0} + q_0 \frac{dM}{dz_0} = 0$$

est impropre à fournir une valeur déterminée de  $y$  qui se réduise à  $y_0$  pour  $x = x_0$ , on doit conclure généralement que l'hypothèse  $x = x_0$  fait disparaître  $y$  de son premier membre, et comme d'ailleurs cette équation est satisfaite par la double hypothèse  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , il s'ensuit qu'elle a lieu identiquement, quel que soit  $y$ , quand on suppose  $x = x_0$ . On voit enfin que si l'on fait  $x = x_0$  dans l'équation

$$z - M = 0,$$

le premier membre ne contiendra pas  $y_0$ , puisque sa dérivée relative à  $y_0$  est identiquement nulle; et parce que cette équation est satisfaite quand on pose  $y = y_0$ ,  $z = z_0 = f(y_0)$ , elle donnera généralement

$$z = f(y).$$

Ainsi, en résumé, dans le cas que nous considérons, où les formules générales (10) deviennent illusoires, la solution du problème tel qu'il a été posé est donnée par l'intégrale complète qui accompagne l'intégrale générale, c'est-à-dire par la première équation (10).

6. Pour donner un exemple de l'analyse qui précède, je considérerai l'équation

$$(15) \quad F = pqy - pz + aq = 0,$$

dans laquelle  $a$  désigne une constante donnée; on a ici

$$P = -\frac{aq}{p}, \quad Q = \frac{pz}{q}, \quad Pp + Qq = pqy, \quad X + Zp = -p^2, \quad Y + Zq = 0,$$

et

$$\frac{Z}{P} = \frac{p^2}{aq};$$

les équations (5) sont alors

$$\frac{-pdx}{aq} = \frac{qdy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$



et l'on en tire sans difficulté les formules suivantes :

$$(16) \quad y = \frac{y_0(z_0 - q_0 y_0) - a(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}}, \quad z = \frac{z_0(z_0 - q_0 y_0) + aq_0(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$(17) \quad p = \frac{aq_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}}, \quad q = q_0,$$

qui sont, pour ce cas particulier, les intégrales générales (6). On a ensuite

$$(18) \quad - \int_{x_0}^x \frac{Z}{p} dx = \log \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}};$$

cette intégrale devient infinie quel que soit  $x$ , si l'on a

$$z_0 - q_0 y_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz_0}{dy_0} = \frac{z_0}{y_0},$$

c'est-à-dire

$$z_0 = \alpha y_0,$$

$\alpha$  étant une constante arbitraire. Mais en employant cette valeur de  $z_0$ , nos formules deviennent illusoires, car elles donnent, pour  $y$  et pour  $z$ , les valeurs

$$y = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}(x - x_0)}, \quad z = \sqrt{\frac{a\alpha}{2}(x - x_0)},$$

qui sont indépendantes de  $y_0$ .

Si l'on élimine  $q_0$  entre les équations (16) pour former l'équation  $z = M$ , on trouve

$$(19) \quad z = \frac{y}{y_0} \left[ z_0 - \frac{a}{y_0}(x - x_0) \right] + \sqrt{\left( \frac{y^2}{y_0^2} - 1 \right) (x - x_0) \left[ -2a \frac{z_0}{y_0} + \frac{a^2}{y_0^2} (x - x_0) \right]} = M;$$

on vérifie aisément que l'équation

$$\frac{dM}{dy_0} + q_0 \frac{dM}{dz_0} = 0$$

donne la valeur de  $y$  fournie par la première équation (16), et qu'après la substitution de cette valeur on a

$$\frac{dM}{dz_0} = \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

ce qui est conforme aux résultats généraux obtenus plus haut.

Enfin, si l'on prend  $f(y) = \alpha y$ , et, par conséquent,  $z_0 = \alpha y_0$ ,  $\alpha$  étant une

constante arbitraire, l'équation (19) devient

$$(20) \quad z = y \left[ \alpha - \frac{a}{y_0^2} (x - x_0) \right] + \sqrt{\left( \frac{y^2}{y_0^2} - 1 \right) (x - x_0) \left[ -2a\alpha + \frac{a^2}{y_0^2} (x - x_0) \right]}.$$

Si l'on considère  $y_0$  et  $\alpha$  comme deux constantes arbitraires, l'équation (20) satisfera à l'équation aux dérivées partielles (15); d'ailleurs elle se réduit à  $z = \alpha y$  pour  $x = x_0$ ; elle donne donc la solution du problème proposé.

## § II.

7. Les résultats qui précèdent peuvent être étendus à toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quel que soit le nombre des variables indépendantes. C'est ce que je vais établir ici, en modifiant, pour la clarté de l'exposition, les notations dont j'ai précédemment fait usage.

Soit  $x$  une fonction des  $n$  variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et posons

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n;$$

si  $F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  désigne une fonction donnée des  $2n + 1$  variables  $x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ ,

$$(1) \quad F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

sera le type général des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La fonction inconnue  $x$  n'est pas déterminée complètement par la condition de satisfaire à l'équation (1), mais elle le devient en général si on l'assujettit en outre à se réduire à une fonction donnée

$$\xi = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

des  $n - 1$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  lorsqu'on attribue à  $x_n$  la valeur particulière  $\xi_n$ ; alors si l'on pose

$$d\xi = \varpi_1 dx_1 + \varpi_2 dx_2 + \dots + \varpi_{n-1} dx_{n-1},$$

on aura en même temps

$$p_1 = \varpi_1, \quad p_2 = \varpi_2, \dots, \quad p_{n-1} = \varpi_{n-1}.$$

La méthode de Cauchy suppose le problème posé comme nous venons de le faire et elle le ramène au suivant :



tions (6), vérifient les  $n - 1$  équations qu'on déduit de la suivante,

$$\frac{dx}{d\xi_i} = p_1 \frac{dx_1}{d\xi_i} + p_2 \frac{dx_2}{d\xi_i} + \dots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{d\xi_i},$$

en donnant à  $i$  toutes les valeurs  $1, 2, 3, \dots, (n - 1)$ . Pour établir que cette circonstance a toujours lieu, il suffit de poser

$$\frac{dx}{d\xi_i} = p_1 \frac{dx_1}{d\xi_i} + \dots + p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{d\xi_i} + T_i,$$

et l'on obtient facilement l'équation

$$P_n \frac{dT_i}{dx_n} + XT_i = 0,$$

qui donne, par l'intégration,

$$\log \frac{T_i}{\Theta_i} = - \int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n \quad \text{d'où} \quad T_i = \Theta_i e^{- \int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n},$$

$\Theta_i$  désignant la valeur que prend  $T_i$  pour  $x_n = \xi_n$ ; et comme on a évidemment  $\Theta_i = 0$ , on en conclut généralement  $T_i = 0$ .

Toutefois la conclusion précédente n'est plus admissible, comme nous l'avons déjà dit au n° 2, lorsque l'intégrale  $\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n$  cesse d'avoir une valeur finie et déterminée, et cette circonstance se présentera en général, si l'on attribue une forme déterminée convenable à la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  qui exprime la valeur de  $x$  dans l'hypothèse  $x_n = \xi_n$ ; mais je dis que :

*Si l'intégrale  $\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n$  cesse d'avoir une valeur finie et déterminée pour une certaine forme de la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , les formules (6) deviennent illusoires et cessent de fournir la solution du problème proposé; celle-ci est donnée, dans ce cas, par l'une des intégrales subsidiaires qui accompagnent chaque forme de l'intégrale générale.*

8. Considérons toujours la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  comme indéterminée et supposons que l'on ait partout remplacé  $\varpi_n$  par sa valeur tirée de l'équation (4). Alors les expressions de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x$ , fournies par les  $n$  premières équations (6), ne renfermeront plus que  $n - 1$  quantités  $\varpi$ , et il pourra se présenter deux cas. Ou bien l'on pourra tirer de  $n - 1$  de ces équations les valeurs de  $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-1}$  exprimées en fonction de  $x, x_1, x_2, \dots, x_n, \xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ , et en les portant dans la  $n^{ième}$ , on aura une équation ne renfermant aucune des quantités  $\varpi$ . Ou bien les  $n$  premières équations (6) permettront seulement d'exprimer  $n - \mu$  des quantités  $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-1}$  en fonction des  $\mu - 1$  autres,  $\mu$  étant  $> 1$ , et, dans

ce cas, les mêmes équations (6) fourniront en outre, par l'élimination,  $\mu$  équations entre les seules variables  $x, x_1, x_2, \dots, x_n, \xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ . On voit facilement que le cas de  $\mu = n$  ne peut se présenter que si l'équation proposée (1) est linéaire par rapport aux dérivées.

Examinons d'abord le premier cas, dans lequel les équations (6) ne peuvent donner qu'une équation unique

$$(7) \quad V(x, x_1, x_2, \dots, x_n, \xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0, \quad \text{ou} \quad V = 0,$$

entre les seules variables  $x, x_1, \dots, \xi, \xi_1, \dots$ . Dans ce cas, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{d\varpi_1}, & \frac{d\varphi_2}{d\varpi_1}, & \frac{d\varphi_{n-1}}{d\varpi_1}, \\ \frac{d\varphi_1}{d\varpi_2}, & \frac{d\varphi_2}{d\varpi_2}, & \frac{d\varphi_{n-1}}{d\varpi_2}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \frac{d\varphi_1}{d\varpi_{n-1}}, & \frac{d\varphi_2}{d\varpi_{n-1}}, & \frac{d\varphi_{n-1}}{d\varpi_{n-1}}, \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et il en est de même des déterminants  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$  que l'on déduit de  $D$  en remplaçant successivement  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$  par  $\varphi$ .

Si l'on prend la différentielle totale de l'équation (7), qu'on y remplace  $dx$  par  $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$ ,  $d\xi$  par  $\varpi_1 d\xi_1 + \varpi_2 d\xi_2 + \dots + \varpi_{n-1} d\xi_{n-1}$  et  $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$  par les valeurs tirées des équations (6), il faudra égaler à zéro les coefficients des différentielles restantes, et l'on aura ainsi

$$\left( \frac{dV}{dx_n} + p_n \frac{dV}{dx} \right) + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left( \frac{dV}{dx_i} + p_i \frac{dV}{dx} \right) \frac{d\varphi_i}{dx_n} = 0,$$

avec  $n - 1$  autres équations qui se déduisent de la suivante :

$$\frac{dV}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dV}{d\xi} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left( \frac{dV}{dx_i} + p_i \frac{dV}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_i}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{d\varphi_i}{d\xi} + \frac{d\varphi_i}{d\varpi_1} \frac{d\varpi_1}{d\xi_j} + \dots + \frac{d\varphi_i}{d\varpi_{n-1}} \frac{d\varpi_{n-1}}{d\xi_j} \right) = 0,$$

en donnant à  $j$  les valeurs  $1, 2, \dots, (n - 1)$ .

Comme cette dernière équation doit devenir identique en vertu des équations (6) et que celles-ci ne renferment pas les dérivées des fonctions  $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-1}$ , ces dérivées devront disparaître d'elles-mêmes; l'équation précédente se décomposera donc en  $n$  autres dont l'une sera

$$\frac{dV}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dV}{d\xi} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left( \frac{dV}{dx_i} + p_i \frac{dV}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_i}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{d\varphi_i}{d\xi} \right) = 0,$$

et dont les  $n - 1$  autres s'obtiendront en donnant à  $j$  les valeurs  $1, 2, \dots, (n - 1)$  dans la suivante

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left( \frac{dV}{dx_i} + p_i \frac{dV}{dx} \right) \frac{d\varphi_i}{d\varpi_j} = 0.$$

En outre, comme le déterminant  $D$  formé avec les dérivées  $\frac{d\varphi_i}{d\varpi_j}$  est différent de zéro, on aura

$$(8) \quad \frac{dV}{dx_i} + p_i \frac{dV}{dx} = 0,$$

pour les valeurs  $1, 2, \dots, (n - 1)$  de  $i$ ; enfin, à cause des formules précédentes, la même équation aura lieu également pour  $i = n$ , et l'on aura aussi

$$(9) \quad \frac{dV}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dV}{d\xi} = 0,$$

pour toutes les valeurs  $1, 2, \dots, (n - 1)$  de  $j$ .

Il résulte de là que les  $n$  équations (7) et (9) peuvent remplacer les  $n$  premières équations du système (6) et que les équations (8) sont elles-mêmes équivalentes aux  $n$  dernières équations (6).

9. Il est facile maintenant d'exprimer l'intégrale  $-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n$ , en fonction des dérivées de  $V$ . Pour cela, supposons qu'on ait résolu l'équation (7) par rapport à  $x$  et qu'on en ait tiré la valeur  $x = M$ ,  $M$  étant une fonction donnée de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ ; les équations (7) et (9) seront plus simplement

$$(10) \quad x = M, \quad \frac{dM}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dM}{d\xi} = 0,$$

et l'on aura

$$(11) \quad p_i = \frac{dM}{dx_i}.$$

On peut obtenir la différentielle totale  $dF$  du premier membre de l'équation (1), en ajoutant la différentielle de la première équation (10) et celle des équations (11), après les avoir multipliées par des facteurs  $\lambda, \lambda_i$  propres à faire disparaître  $d\xi, d\xi_1, \dots, d\xi_{n-1}$ . On a donc

$$(12) \quad dF = \sum_{j=1}^{j=n} \left[ \lambda \frac{dM}{dx_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{d^2 M}{dx_i dx_j} \right] dx_j - \lambda dx - \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i dp_i,$$

les facteurs  $\lambda$ ,  $\lambda_i$  devant satisfaire à  $n$  équations dont l'une est

$$(13) \quad \lambda \frac{dM}{d\xi} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{d^2 M}{dx_i d\xi} = 0,$$

et dont les  $n - 1$  autres se déduisent de la suivante :

$$(14) \quad \lambda \frac{dM}{d\xi_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \frac{d^2 M}{dx_i d\xi_j} = 0,$$

en donnant à  $j$  les valeurs  $1, 2, 3, \dots, (n - 1)$ . D'après cela on a par la formule (12)

$$(15) \quad -\frac{X}{P_n} dx_n = -\frac{\lambda}{\lambda_n} dx_n,$$

et il ne reste plus qu'à exprimer le rapport  $\frac{\lambda}{\lambda_n}$  en fonction de  $x_n$  et des variables auxiliaires  $\xi, \xi_1, \dots$ .

Si l'on ajoute les équations (13) et (14) après avoir multiplié la première par  $\varpi_j$ , on aura, à cause de la seconde équation (10),

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \left( \frac{d^2 M}{dx_i d\xi_j} + \varpi_j \frac{d^2 M}{dx_i d\xi} \right) = 0;$$

cette équation (16) tient lieu de  $n - 1$  équations distinctes, et il est évident que celles-ci sont satisfaites en posant

$$\lambda_1 = dx_1, \quad \lambda_2 = dx_2, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1} = dx_{n-1}, \quad \lambda_n = dx_n,$$

$dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$  étant les différentielles de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  considérées comme des fonctions de  $x_n$  définies par les  $n - 1$  équations (9). L'équation (15) devient alors

$$-\frac{X}{P_n} dx_n = -\lambda,$$

et l'équation (13) donne ensuite

$$-\lambda \frac{dM}{d\xi} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2 M}{dx_i d\xi} dx_i,$$

par conséquent

$$-\frac{X}{P_n} dx_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d \log \frac{dM}{d\xi}}{dx_i} dx_i = d \log \frac{dM}{d\xi}.$$

enfin on aura par l'intégration

$$-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n = \log \frac{dM}{d\xi},$$

car,  $M$  se réduisant à  $\xi$  pour  $x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n$ ,  $\frac{dM}{d\xi}$  doit se réduire à l'unité, dans la même hypothèse.

10. On voit que l'intégrale  $-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n$  ne peut cesser d'être finie et déterminée que si l'on attribue à la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  une forme telle, que la dérivée  $\frac{dM}{d\xi}$  devienne nulle, infinie ou indéterminée après la substitution des valeurs de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  tirées des équations (9). Mais alors il est évident que l'on ne saurait tirer de ces dernières équations des valeurs déterminées de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  se réduisant respectivement à  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  pour  $x_n = \xi_n$ , puisque l'hypothèse  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$  doit réduire  $\frac{dM}{d\xi}$  à l'unité. Les formules générales deviennent donc nécessairement illusoires, et la solution du problème proposé ne peut être fournie que par l'une des intégrales subsidiaires qui accompagnent l'intégrale générale.

La seule équation  $x = M$  satisfait évidemment à l'équation proposée (1), si l'on y regarde  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  et par suite  $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$  comme des constantes arbitraires; elle constitue une *intégrale complète*. Dans l'intégrale générale les quantités  $\xi, \xi_1, \dots$  sont toutes variables, mais la différentielle de l'équation  $x = M$  reste la même que dans le cas de  $\xi_1, \xi_2, \dots$  constantes. On voit facilement que l'intégrale complète peut reproduire non-seulement l'intégrale générale, mais plusieurs autres intégrales subsidiaires moins étendues que celles-ci et qui, de même que l'intégrale complète, ne sauraient être comprises dans l'intégrale générale. Il est évident, en effet, que si l'on considère  $n - 1 - \mu$  des quantités  $\xi$ , par exemple  $\xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}, \dots, \xi_{n-1}$ , comme des fonctions arbitraires des  $\mu$  autres, savoir  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$ , on satisfera à l'équation proposée par un système de  $\mu + 1$  équations dont l'une sera

$$(17) \quad x = M$$

et dont les  $\mu$  autres se déduiront de la suivante

$$(18) \quad \left( \frac{dM}{d\xi_i} + \varpi_i \frac{dM}{d\xi} \right) + \sum_{j=\mu+1}^{j=n-1} \left( \frac{dM}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dM}{d\xi} \right) \frac{d\xi_j}{d\xi_i} = 0,$$

en donnant à  $i$  les valeurs  $1, 2, \dots, \mu$ .

Cela posé, si les équations (9) sont impropres à fournir des valeurs de  $x_1$ ,



$x_2, \dots, x_{n-1}$  qui se réduisent respectivement à  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  pour  $x_n = \xi_n$ , il est évident que l'hypothèse  $x_n = \xi_n$  fera rentrer quelques-unes de ces équations dans le système des autres, et il en résultera une ou plusieurs équations identiques, puisque les équations (9) sont toutes vérifiées quand on pose  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$ .

Il peut arriver que l'hypothèse  $x_n = \xi_n$  transforme ainsi toutes les équations (9) en identités; dans ce cas, toutes les auxiliaires  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  disparaissent de l'équation (17) quand on y fait  $x_n = \xi_n$ , puisque les dérivées de  $M$  par rapport à  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  sont alors nulles; et, comme cette équation est satisfaite quand on pose simultanément  $x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n$  et  $x = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ , elle donnera généralement  $x = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  pour  $x_n = \xi_n$ . Ainsi, dans le cas que nous considérons, la solution du problème est fournie par l'intégrale complète qui accompagne l'intégrale générale, et dans laquelle subsistent  $n - 1$  constantes arbitraires  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ .

Supposons en second lieu que les  $n - 1$  équations (9) se réduisent pour  $x_n = \xi_n$  à  $\mu$  équations distinctes qui correspondent aux valeurs  $1, 2, \dots, \mu$  de l'indice  $j$ . On peut admettre que l'on ait tiré de ces équations les valeurs de  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$ , et qu'on ait substitué ces valeurs dans l'équation  $x = M$ . Je dis alors que l'hypothèse  $x_n = \xi_n$  fera disparaître de  $M$  toutes les auxiliaires restantes  $\xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}, \dots, \xi_{n-1}$ . Soit, en effet,  $\xi_j$  l'une de ces auxiliaires: après la substitution dont nous venons de parler, toutes les équations (9) se transforment en identités, et la même chose a lieu à l'égard de la dérivée de  $M$  par rapport à  $\xi_j$ , car cette dérivée a pour expres-

$$\left( \frac{dM}{d\xi_j} + \varpi_j \frac{dM}{d\xi} \right) + \sum_{i=1}^{i=\mu} \left( \frac{dM}{d\xi_i} + \varpi_i \frac{dM}{d\xi} \right) \frac{d\xi_i}{d\xi_j},$$

$\frac{d\xi_i}{d\xi_j}$  étant ici la dérivée partielle de  $\xi_i$  par rapport à  $\xi_j$  tirée des  $\mu$  équations distinctes auxquelles se réduit le système (9) pour  $x_n = \xi_n$ . Toutes les auxiliaires  $\xi$  disparaissant de l'équation  $x = M$  quand on fait  $x_n = \xi_n$ , il s'ensuit que, dans cette hypothèse, cette équation se réduit à  $x = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , puisqu'elle doit être vérifiée quand on pose  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$  et  $x = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ .

Cela étant établi, considérons la solution de l'équation (1) qui est fournie par les équations (17) et (18), et qui renferme  $n - 1 - \mu$  fonctions arbitraires de  $\mu$  variables. Il est évident, d'après ce qui précède, que l'équation (17) se réduira, pour  $x_n = \xi_n$ , et en vertu des équations (18), à  $x = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , car dans l'hypothèse  $x_n = \xi_n$  le système des équations (18) équivaut évidemment aux  $\mu$  équations distinctes auxquelles se réduit le système (9). La solution du problème proposé sera donc donnée dans ce cas par le système des équations (17) et (18).



l'élimination des variables  $\xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \dots, \xi_{n-1}$  entre les  $n - \mu + 1$  équations

$$(23) \quad V = 0, \quad \frac{dV}{d\xi_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{dV}{d\xi_{\mu+2}} = 0, \dots, \quad \frac{dV}{d\xi_{n-1}} = 0.$$

12. Si l'on pose

$$(24) \quad -1 + \Omega \left( \frac{d\Phi}{dx} - \varpi_1 \frac{d\Phi_1}{dx} - \dots - \varpi_{\mu-1} \frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx} \right) = 0,$$

l'équation (21) devient

$$(25) \quad p_i + \Omega \left( \frac{d\Phi}{dx_i} - \varpi_1 \frac{d\Phi_1}{dx_i} - \dots - \varpi_{\mu-1} \frac{d\Phi_{\mu-1}}{dx_i} \right) = 0,$$

l'indice  $i$  devant toujours recevoir les valeurs  $1, 2, \dots, n$ .

On reproduira la différentielle totale  $dF$  du premier membre de l'équation (1), en ajoutant les différentielles totales des  $n + 1$  équations (24) et (25), après les avoir multipliées par des facteurs propres à faire disparaître les différentielles des  $n$  variables  $\varpi_1, \dots, \varpi_{\mu-1}, \xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \dots, \xi_{n-1}$  et  $\Omega$ ; on trouvera de cette manière

$$P_n = \lambda_n,$$

et

$$\begin{aligned} X = & \lambda \Omega \left( \frac{d^2\Phi}{dx^2} - \varpi_1 \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} - \dots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2\Phi_{\mu-1}}{dx^2} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \Omega \left( \frac{d^2\Phi}{dx dx_i} - \varpi_1 \frac{d^2\Phi_1}{dx dx_i} - \dots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2\Phi_{\mu-1}}{dx dx_i} \right); \end{aligned}$$

à cause de l'équation (24), on peut écrire

$$(26) \quad -\frac{X}{P_n} \lambda_n = \lambda \frac{d \log \Omega}{dx} + \lambda_1 \frac{d \log \Omega}{dx_1} + \dots + \lambda_n \frac{d \log \Omega}{dx_n}.$$

Quant aux facteurs  $\lambda, \lambda_i$ , ils doivent satisfaire : 1° à l'équation

$$(27) \quad \lambda \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_1 \frac{d\Phi}{dx_1} + \dots + \lambda_n \frac{d\Phi}{dx_n} = 0;$$

2° aux  $\mu - 1$  équations qui se déduisent de la suivante :

$$(28) \quad \lambda \frac{d\Phi_i}{dx} + \lambda_1 \frac{d\Phi_i}{dx_1} + \dots + \lambda_n \frac{d\Phi_i}{dx_n} = 0,$$

en donnant à  $i$  les valeurs  $1, 2, \dots, \mu - 1$ ; 3° aux  $n - \mu$  équations

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda \left( \frac{d^2 \Phi}{dx d\xi_j} - \varpi_1 \frac{d^2 \Phi_1}{dx d\xi_j} - \dots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2 \Phi_{\mu-1}}{dx d\xi_j} \right) \\ & + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \left( \frac{d^2 \Phi}{dx_i d\xi_j} - \varpi_1 \frac{d^2 \Phi_1}{dx_i d\xi_j} - \dots - \varpi_{\mu-1} \frac{d^2 \Phi_{\mu-1}}{dx_i d\xi_j} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

l'indice  $j$  devant recevoir les valeurs  $\mu, \mu + 1, \dots, (n - 1)$ . Il est évident que les équations (27), (28), (29) sont satisfaites en posant

$$\lambda = dx, \quad \lambda_i = dx_i,$$

les différentielles  $dx, dx_i$  se rapportant au cas où l'on considère  $x, x_1, \dots, x_{n-1}$  comme des fonctions de  $x_n$  déterminées par les équations (19) et (20).

L'équation (26) donne alors

$$- \frac{X}{P_n} dx_n = d \log \Omega;$$

d'ailleurs, il est évident, d'après l'équation (24) et les équations (19), que  $\Omega$  se réduit à l'unité pour  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n, x = \xi$ ; on aura donc

$$(30) \quad - \int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P_n} dx_n = \log \Omega.$$

L'intégrale contenue dans le premier membre de cette formule (30) ne peut cesser d'avoir une valeur finie et déterminée que si  $\Omega$  devient nulle, infinie ou indéterminée pour une certaine forme de la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ . Il est évident que, dans ce cas, les formules générales (6) deviennent illusoires, et l'on reconnaîtra facilement, en suivant la marche que nous avons tracée, que la solution du problème est donnée soit par l'équation unique  $V = 0$ , soit par l'une des intégrales plus étendues que l'on obtient en joignant à l'équation  $V = 0$  celles qu'on en déduit par la différentiation relative à quelques-unes des auxiliaires  $\xi$ . Si  $\xi_\mu, \xi_{\mu+1}, \dots, \xi_{\mu+\nu-1}$ , par exemple, sont les auxiliaires dont il s'agit, on devra regarder les auxiliaires restantes  $\xi_{\mu+\nu}, \xi_{\mu+\nu+1}, \dots, \xi_{n-1}$  comme des fonctions arbitraires des premières.