

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

C. ARENAS

Une famille bi-markovienne : arrêt optimal

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 93, série *Probabilités et applications*, n° 8 (1989), p. 1-11

[<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_1_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_1_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE FAMILLE BI-MARKOVIENNE : ARRET OPTIMAL

C. ARENAS

Summary. We study a particular bi-Markov family with values in $\mathbb{R}^d, d > 0$, constructed with two Markovian processes with values in $\mathbb{R}^d$, which are the unique solutions of two given stochastic differential equations and we solve the optimal stopping problem associated with a family of processes which are functions of the previously constructed bi-Markov family.

Key words: bi-Markov family, optimal stopping problem.

1. Introduction

Le problème d'arrêt optimal pour des processus à deux indices a été récemment résolu; je renvoie à [D] pour le cas discret et [Ma], [Mi] pour le cas continu. Comme application de ces derniers résultats on montre, dans [Ma], l'existence d'un point d'arrêt optimal pour une famille de processus bi-markovienne vérifiant certaines propriétés et à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, d > 0$. La condition de prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

semble un peu artificielle. On s'intéresse d'abord aux processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Avec cette condition, on se demande, si étant données deux familles de processus de Markov, $X = \{X(\cdot; x), x \in \mathbb{R}^d\}$ et $Y = \{Y(\cdot; y), y \in \mathbb{R}^d\}$, définies comme les uniques solutions continues de deux équations différentielles stochastiques associées au mouvement Brownien d-dimensionnel, et ayant comme condition initiale un point quelconque de $\mathbb{R}^d$, la famille $M = \{M(\cdot; x), x \in \mathbb{R}^d\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie par, $M_z(\cdot; x) = Y_t(\cdot; X_s(\cdot; x))$ pour $z = (s, t)$ dans $\mathbb{R}_+^2$, est bi-markovienne et vérifie les conditions nécessaires pour pouvoir assurer l'existence d'un point d'arrêt optimal.

Dans la première partie, on montre qu'une telle famille est bi-markovienne si les demi-groupes associés aux processus X et Y commutent.

Dans la deuxième partie, en suivant [Ma], on montre l'existence de solution au problème d'arrêt optimal associé à une famille de processus $U = \{U(\cdot; x), x \in \mathbb{R}^d\}$ construite à partir de la famille M de la façon suivante: si p est un nombre réel strictement positif, f une fonction positive, bornée et uniformément continue, alors on prend

$$U_z(\cdot, x) = e^{-p|z|} f(M_z(\cdot; x))$$

pour tout $z = (s, t)$ de $\mathbb{R}_+^2$, tout x de $\mathbb{R}^d$, avec $|z| = s + t$ et $U_\infty(\cdot, x) = 0$.

2. Notations. Construction de la famille bi-Markovienne M.

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace métrique séparable, complet et $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne. On désigne par $b(\mathcal{E})$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées f sur E , avec la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

On prend $\mathbb{R}_+^2$ comme ensemble d'indices avec l'ordre partiel usuel, c'est à dire, pour $z = (s, t)$, $z' = (s', t')$ dans $\mathbb{R}_+^2$, $z \leq z'$ signifie que $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ un espace de probabilité et $F = \{F_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ une filtration complète, croissante, continue à droite avec la propriété d'indépendance conditionnelle classique (propriété F.4., [C-W]), c'est à dire, étant donné $z = (s, t)$ dans $\mathbb{R}_+^2$, les sous-tribus, $F_{s\infty} = \bigvee_r F_{(s, r)}$ et $F_{\infty t} = \bigvee_r F_{(r, t)}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à F_z .

Suivant les notations de [B], étant donné un processus A on désigne par A° sa projection optionnelle.

Rappelons les définitions suivantes,

Définition II.1.

Un *semi-groupe* à deux indices est une famille $P = \{P_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$

d'opérateurs de $b(\mathcal{E})$ dans $b(\mathcal{E})$ positifs vérifiant,

$$(i) \quad P_{(0,0)} = Id, \text{ et pour } z, z' \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \quad P_z \cdot P_{z'} = P_{z'} \cdot P_z \\ = P_{z+z'}.$$

(ii) Pour toute fonction f de $b(\mathcal{E})$ on a $\|P_z f\| \leq \|f\|$.

Définition II.2.

Étant donné un semi-groupe P et une famille de processus $X = \{X(\cdot; x), x \in E\}$ continus, on dit que (X, F, P) est une famille bi-markovienne si pour toute fonction f de $b(\mathcal{E})$ et pour tout z de $\mathbb{R}_+^2$, la projection optionnelle du processus $\{f(X_{z+z'}(\cdot; x)), z' \in \mathbb{R}_+^2\}$ est indistinguable du processus $\{P_z f(X_{z'}(\cdot; x)), z' \in \mathbb{R}_+^2\}$ et si pour tout x de E on a, $X_{(0,0)}(\cdot; x) = x$, presque - sûrement.

Remarque. Dans le cadre des processus à deux indices plusieurs propriétés de Markov ont été proposées (cf. [NS]); on utilise la définition précédente car elle s'exprime en termes de semi-groupes.

Sur un espace de probabilité donné, un point d'arrêt est une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2$ telle que, pour tout z dans $\mathbb{R}_+^2$, l'ensemble $\{Z \leq z\}$ est dans F_z .

Soit X un processus positif vérifiant de bonnes propriétés. Le problème d'arrêt optimal associé à X consiste à établir l'existence d'un point d'arrêt Z^* , dit optimal, qui

maximise le gain moyen sur l'ensemble des points d'arrêt, c'est à dire,

$$E[X_{Z*}] = \sup \{E[X_Z], Z \text{ point d'arrêt}\}.$$

Dans la suite E sera l'ensemble $\mathbb{R}^d$, $d > 0$, avec la relation d'ordre partiel induite par les coordonnées cartésiennes et on considère les familles $X = \{X(\cdot; x), x \in \mathbb{R}^d\}$ et $Y = \{Y(\cdot; y), y \in \mathbb{R}^d\}$ de processus markoviens définis comme les uniques solutions continues des équations différentielles stochastiques de la forme,

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \beta(\xi_s, s) ds + \int_0^t \sigma(\xi_s, s) dW_s$$

avec ξ_0 de $\mathbb{R}^d$; $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ où σ_{ij} , β_j sont des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ globalement Lipschitziens avec les conditions usuelles de restriction sur la croissance, (voir [A]), pour qu'il existe une unique solution continue et markovienne, et W est un mouvement Brownien de dimension d . Ces processus sont définis sur des espaces de probabilité $(\Omega^i, \mathcal{A}^i, Q^i)$, $i = 1, 2$, et sont associés à des filtrations $F^i = \{F_t^i, t > 0\}$, $i = 1, 2$, complètes, continues à droite et croissantes. De plus, ils ont un semi-groupe $P^i = \{P_t^i, t > 0\}$ associé, $i = 1, 2$. On considère l'espace de probabilité produit, et la filtration $F = \{F_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ avec $F_z = F_s^1 \otimes F_t^2$ pour tout $z = (s, t)$; on sait (voir [Me-1]) que cette filtration est complète, croissante, continue à droite et vérifie la propriété F.4.

Sur cet espace de probabilité produit avec la filtration F , on définit une famille $M = \{M(\cdot; x), x \in \mathbb{R}^d\}$ de la façon suivante: pour $x \in \mathbb{R}^d$, $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^1 \times \Omega^2$,

$$M_{(s,t)}((\omega_1, \omega_2); x) = Y_t(\omega_2; X_1(\omega_1; x)).$$

Cette notion a été introduite par D. Michel [M].

Théorème II.1.

La famille M est bi-Markovienne si les demi-groupes P^1 , P^2 commutent.

Démonstration

Si P^1 , P^2 commutent, il est facile de voir que la famille $P = \{P_{(s,t)} = P_s^1 \cdot P_t^2, (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ est un semi-groupe.

On va montrer maintenant que (M, F, P) est une famille bi-Markovienne. C'est à dire, il faut montrer que pour tout point d'arrêt (S, T) (on prendra $(S, T) \neq (\infty, \infty)$), tout x de $\mathbb{R}^d$ et tout z de $\mathbb{R}_+^2$, on a,

$$E\left((P_z f) M_{(S,T)}(\cdot; x)\right) = E\left(f(M_{(S,T)+z}(\cdot; x))\right), \quad (1).$$

Notons que,

(i) Si T est un F^2 - temps d'arrêt et ξ une variable sur Ω^2 , qui prend seulement un nombre fini de valeurs et qui est F_T^2 -mesurable, alors pour toute fonction g mesurable et bornée (continue et bornée), on a:

$$E\left((P_t^2 g) Y_T(\cdot; \xi)\right) = E\left(g(Y_{t+T}(\cdot; \xi))\right).$$

(ii) Si les semi-groupes P^1 , P^2 commutent, pour tout x de $\mathbb{R}^d$, tout (s, t) de $\mathbb{R}_+^2$, la loi de $Y_t(\cdot; X_s(\cdot; x))$ coïncide avec celle de $X_s(\cdot; Y_t(\cdot; x))$.

(iii) Par un raisonnement de classes monotones, il suffit de montrer (1) pour toute fonction f continue et bornée.

Soit donc f une fonction continue et bornée.

Le premier terme de (1) est le même que,

$$E \left[E \left(P_t^2 (P_s^1 f) Y_{T(\omega_1; \cdot)}(\cdot; X_{S(\omega_1; \cdot)}(\omega_1; x)) \mid F_T^2 \right) \right], \quad (2)$$

La variable $X_{S(\omega_1; \cdot)}(\omega_1; x)$ est F_T^2 -mesurable et on peut supposer qu'elle prend un nombre fini de valeurs (sinon on l'approche par des fonctions définies sur Ω^2 , F_T^2 -mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). De plus, $T(\omega_1, \cdot)$ est un F^2 -temps d'arrêt et $Y(\cdot; y)$ a la propriété de Feller, et est continu par rapport à (t, y) . Donc, en vertu de la propriété forte de Markov et de l'observation (i), on a que (2) est le même que,

$$E \left((P_s^1 f) Y_{T+t}(\cdot; X_s(\cdot; x)) \right), \quad (3).$$

En supposant que S et T prennent un nombre fini de valeurs (sinon on les approche de façon convenable), en utilisant l'observation (ii) et par un raisonnement similaire au précédent, on achève la démonstration. #

3. Arrêt optimal.

A partir de la famille bi-Markovienne M et étant donnée une fonction positive, uniformément continue f de $b(\mathcal{E})$, et un nombre réel strictement positif p , on considère la famille de processus $U = \{U(\cdot; x), x \in \mathbb{R}^d\}$, avec

$$U_z(\cdot; x) = e^{-p|z|} f(M_z(\cdot; x)),$$

pour tout $z = (s, t)$ de $\mathbb{R}_+^2$, x de $\mathbb{R}^d$, avec $|z| = s + t$ et $U_\infty(\cdot; x) = 0$.

Pour chaque x de $\mathbb{R}^d$, le processus $U(\cdot; x)$ est adapté, positif, avec des trajectoires continues et la famille, $\{U_z(\cdot; x), Z \text{ point d'arrêt}\}$ est uniformément intégrable. On désigne par $J(\cdot; x)$ son enveloppe de Snell. Nous cherchons à montrer l'existence d'un point d'arrêt optimal pour le processus $U(\cdot; x)$.

On sait ([Ma]) , que pour chaque x de l'ensemble $\mathbb{R}^d$, il existe une fonction q de $b(\mathcal{E})$ qui majore f telle que pour tout point d'arrêt Z ,

$$J_z(\cdot; x) = e^{-p|z|} q(M_z(\cdot; x)).$$

De plus, la famille M satisfait la condition de régularité suivante,

Théorème III.1.

Pour tout nombre réel positif A , il existe une constante $k > 0$, telle que, pour tout point d'arrêt $Z = (S, T)$ avec

$|z| \leq A$, et pour tout x, y de $\mathbb{R}^d$ on a,

$$E[|M_Z(\cdot; x) - M_Z(\cdot; y)|] \leq e^{kA} |x-y|.$$

Démonstration

On procède comme dans [Ma] lemme 3.1..#

Finalement, on a,

Théorème III.2.

Pour tout x de $\mathbb{R}^d$, il existe solution au problème d'arrêt optimal par rapport à le processus $U(\cdot; x)$.

Démonstration

Comme la fonction f est uniformément continue et bornée, et la famille M satisfait le théorème précédent, alors ([Ma], proposition 3.1.1.) la fonction q est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$. En outre, comme le processus $U(\cdot; x)$ et son enveloppe de Snell $J(\cdot; x)$ sont continus, et $J(\cdot; x)$ est un processus complètement régulier, existe une solution au problème d'arrêt optimal de $U(\cdot; x)$ sur $\mathbb{R}_+^2$ (voir [Ma], Theorem 1.2.), que l'on peut choisir parmi les éléments maximaux de l'ensemble des points d'arrêt Z tels que,

$$E(J_Z(\cdot; x)) = E(J_{(0,0)}(\cdot; x)). \quad \#$$

RÉFÉRENCES

- [A] Arnold, L.: Stochastic Differential Equations. Theory and Applications. Wiley and Sons (1937).
- [B] Bakry, D.: Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices. Z. Wahrs. verw. Gebiete 55, 55-71 (1981).
- [C] Cairoli, R.: Enveloppe de Snell d'un processus à paramètre bidimensionnel. Ann. Inst. H. Poincaré. 18-1, 47-54 (1982).
- [C-W] Cairoli, R., Walsh, J.: Stochastic Integrals in the plane. Acta Mathematica 134, 111-183 (1975).
- [D] Dalang, R.C.: On infinite graphs and randomized stopping points on the plane. Preprint.
- [E] El Karoui, N.: Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. Ecole d'Été de St. Flour 1979. Lect. Notes in Math. 876, 74-239, Springer-Verlag Berlin (1981).
- [F] Friedman, A.: Stochastic Differential Equations and Applications. Volume 1. Academic Press (1975).
- [M] Michel, D.: Produit de deux diffusions. C.R. Acad. Sc. Paris Série A, 289, 143-146 (1979).
- [Ma] Mazziotto, G.: Two Parameter Optimal Stopping and bi-Markov Processes. Z. Wahrs. verw. Gebiete 69, 99-135 (1985).
- [Mi] Millet A.: On randomized tactics and optimal stopping in the plane. Ann. Prob. 13, 946-965 (1985).

- [Me-1] Meyer, P.A.: Processus Aléatoires à deux indices.
Lect. Notes in Math. 863, Springer-Verlag, Berlin
(1981).
- [Me-2] Meyer, P.A.: Processus de Markov. Lect. Notes in
Math, 26, Springer-Verlag, Berlin (1967).
- [N-S] Nualart, D., Sanz, M.: A Markov property for two
parameter gaussian processes. Stochastica 3-1, 1-16,
Barcelone (1979).

C. ARENAS

Dept. d'Estadística
Facultat de Biologia
Universitat de Barcelona
Diagonal, 645

08028 BARCELONA
Espanne