ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GABRIEL PICAVET

Compactifications de Bohr d'anneaux et de modules

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 98, série *Mathématiques*, n° 28 (1992), p. 185-253

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1992__98_28_185_0>

Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal (Clermont II), Sér. Math., Fasc. 28, pp. 185-253

COMPACTIFICATIONS DE BOHR D'ANNEAUX ET DE MODULES

INTRODUCTION

Les groupes localement compacts et la compactification de Bohr d'un groupe ont fait dans le passé l'objet d'un grand nombre d'articles. Par contre, la compactification de Bohr d'un anneau n'apparaît qu'épisodiquement. Celle d'un A-module a fait, à notre connaissance, l'objet d'un seul travail. Il s'agit d'un article de R.B. Warfield, où l'on utilise la compactification de Bohr, dans le cas de la topologie discrète. Par rapport aux groupes, de nombreuses complications apparaissent, du fait de la présence d'un anneau de scalaires. Ce travail peut sembler indigeste, compte tenu de sa longueur. Il a été nécessaire d'établir un bon nombre de résultats, sans doute faciles à obtenir, mais absents de la littérature. Il est certain que nous n'avons fait qu'une première approche, de nombreux problèmes se posant encore.

Ce travail est divisé en trois parties. Dans la première, on traite de généralités et de la construction du compactifié de Bohr d'un anneau topologique commutatif et d'un module topologique sur un anneau topologique commutatif. Une compactification de Bohr d'un A-module M est un morphisme continu et dense de A-modules $M \to B_A(M)$, où $B_A(M)$ est un A-module topologique compact, factorisant tout morphisme continu de A-modules $M \to P$, où P est un A-module topologique compact. La définition est analogue dans la catégorie des anneaux commutatifs topologiques. Si A est un anneau, nous désignons la compactification par $A \to B(A)$.

La construction de $B_A(M)$ se fait en considérant une topologie, que nous avons qualifiée de Bohr, sur le A-module M muni de la topologie T. La topologie TB de Bohr sur M est la plus fine des topologies, faisant de M un A-module topologique précompact et moins fines que T. Le module $B_A(M)$ s'obtient alors comme le complété de M pour la topologie TB. Une autre méthode consiste à partir du compactifié de Stone - Čech de l'espace topologique M. Nous n'avons pas jugé utile d'exposer cette méthode ici; elle est d'ailleurs moins avantageuse. La construction de B(A) pour un anneau A topologique s'obtient de manière analogue. L' anneau B(A) peut être éventuellement nul. Ce dernier point n'est pas admissible. Nous disons qu'un anneau A est compactifiable si B(A) est non nul. Entre autres critères, un anneau A est compactifiable si et seulement si il existe un idéal I ouvert de A, tel que A/I soit un anneau fini non nul. Dans tout ce travail, lorsqu'on parle de l'anneau B(A), celui-ci est censé être non nul. La topologie de Bohr sur un anneau a une description agréable : un système fondamental de voisinages de 0 est fourni par les idéaux I ouverts de A, tels que A/I soit un anneau fini.

Il semblerait normal que $B_A(M)$ soit un B(A)-module topologique. Nous montrons dans la troisième partie que $B_A(M)$ est effectivement un B(A)-module. Mais il n'est pas toujours topologique. Dès qu'il est question de compacité, la notion de partie bornée apparait. Nous obtenons que $B_A(M)$ est un B(A)-module topologique, lorsque certaines parties sont bornées. Par ailleurs, nous n'avons su calculer explicitement la topologie de Bohr d'un A-module M que lorsque A est borné dans M pour la topologie de Bohr. Ce cas se produit lorsque M est un A-module de type fini ou est précompact. Nous établissons, dans la première partie, les résultats suivants : si $B_A(M)$ est un B(A)-module topologique, alors $B_A(M)$ est totalement discontinu; ceci est en accord avec la propriété bien connue : un anneau compact est totalement discontinu; d'autre part, si M est un A-module compact et totalement discontinu, M est un B(A)-module topologique si et seulement si A est borné dans M. Ces résultats sont obtenus en considérant ce que l'on peut appeler des compactifications totalement discontinues. Nous obtenons aussi une solution au problème universel suivant : si M est un A-module topologique, il existe un morphisme continu dense de A-modules $M \to B'(M)$, où $B'(M)$ est un B(A)-module topologique compact, factorisant tout morphisme continu $M \to P$, où P est un $B(A)$-module topologique compact.

Dans la deuxième partie, nous faisons une étude systématique des groupes de morphismes continus entre A-modules topologiques, en faisant intervenir les topologies classiques de la convergence simple, précompacte ou compacte. Nous établissons, au passage, un théorème d'Ascoli. Ici encore, des problèmes apparaissent. Par exemple, si M est un A-module topologique et N un groupe Abélien topologique, le groupe $\mathbb{H}(M,N)$ des morphismes continus n'est pas toujours un A-module topologique. Nous donnons une série de critères à ce sujet. Le fait le plus remarquable est le suivant : si le A-module M est localement compact, $\mathbb{H}(M,N)$ est un A-module topologique, pour la topologie de la convergence compacte. Ce dernier fait nous permet de faire une théorie des caractères sur les modules localement compacts. Tous les résultats de la théorie de la dualité de Pontryagin sont encore vrais. Si M est un A-module topologique localement compact, nous désignons par $Ch(M)$ son groupe des caractères (continus) et par $Ch(M)_d$ l'ensemble $Ch(M)$, muni de la topologie discrète. Si $Ch(M)_d$ est un A-module topologique, le morphisme $M \to B_A(M)$ s'identifie au morphisme canonique $M \to Ch(Ch(M)_d)$, qui se trouve être injectif.

En dehors des topologies classiques évoquées plus haut, nous en introduisons une autre, sans doute mieux adaptée à la situation. En gros, si M est un A-module de présentation finie et N un A-module topologique, on munit $H_A(M,N)$ de la topologie de la convergence uniforme. Si maintenant, M est un A-module quelconque, en remarquant que tout module M est limite inductive de modules de présentation finie, un passage à la limite projective fournit sur $H_A(M,N)$ une topologie que nous avons qualifiée de topologie de la présentation finie. Si N est tel que tout sous-module de type fini soit borné, alors $H_A(M,N)$ est un A-module topologique. Le A-module topologique $H_A(M,B(A))$, muni de la topologie de la présentation finie est particulièrement intéressant, parce que compact (ce résultat est encore vrai si nous prenons pour N un module compact). L'utilisation du B(A)-bidual d'un A-module M nous permet de montrer que dans certaines circonstances, si le morphisme $A \to B(A)$ est injectif, le morphisme $M \to B_A(M)$ est injectif, pour tout module projectif M. Ceci se produit dans le cas d'une topologie adique.

Dans la troisième partie, nous traitons essentiellement de calculs de compactifiés de Bohr et des propriétés du foncteur compactification. Ce foncteur est exact à droite pour les suites exactes topologiques (à morphismes continus et stricts). Il commute aux produits finis et, dans certains cas aux produits quelconques. Malheureusement, il ne commute pas aux sommes directes : une somme directe de modules compacts n'est un module compact que si la somme a un nombre fini de composants; à ce propos, le lecteur peut comparer avec le théorème de Riesz : tout espace normé localement compact est de dimension finie.

Après avoir constaté que pour un anneau topologique les compactifiés B(A) et $B_A(A)$ sont les mêmes, nous en déduisons par des méthodes classiques que, par exemple, $B(A) \otimes_A M$ est isomorphe à $B_A^{\circ}(M)$, pour un A-module M de présentation finie muni de la topologie canonique (id est la topologie la plus fine sur M, telle que M soit un A-module topologique). Ce résultat est encore vrai si M et A sont munis de la topologie discrète. Nous terminons par des considérations sur la pureté des morphismes de compactification, généralisant un résultat de R.B. Warfield, dans le cas discret.

N.B. Le lecteur prendra garde que lorsque M est un A-module, si I est une partie de A et N une partie de M, la notation IN désigne l'ensemble des éléments i.x, où i est un élément de I et x un élément de M. Par contre, si I est un idéal de A et N un sous-module de M, la notation I.N désigne le produit classique d'un idéal par un sous-A-module.

¶ 1 - GENERALITES

Les anneaux sont supposés commutatifs, unitaires et non nuls, dans ce travail; de même les morphismes d'anneaux sont supposés unitaires, ainsi que les modules. De manière générale, les notations et conventions sont celles de N. Bourbaki.

Nous désignons par $\underline{A}$ (resp. $\underline{\mathbf{A}}$) la catégorie des anneaux (resp. la catégorie des anneaux topologiques). Si A est un anneau (resp. un anneau topologique), nous désignons par $\underline{M}_A$ (resp. $\underline{\mathbf{M}}_A$) la catégorie des A-modules (resp. des A-modules topologiques sur l'anneau topologique A).

Comme on le sait, une topologie T sur un module ou un anneau est déterminée par la donnée d'un système fondamental de voisinages de 0. Si X est un objet de $\underline{\mathbf{A}}$ ou de $\underline{\mathbf{M}}_A$, un tel système sera désigné par $V_T(X)$ ou par $V(X)$, s'il n'y a pas de confusion à craindre.

Nous adoptons les notations suivantes, lorsque M et N sont des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$:

$\mathbf{F}(M,N)$ est l'ensemble des applications continues de M dans N

$\mathbf{H}_A(M,N)$ est l'ensemble des morphismes continus de A-modules de M dans N.

Lorsque M et N sont des objets de $\underline{M}_A$, nous désignons par :

$F(M,N)$ l'ensemble des applications de M dans N

$H_A(M,N)$ l'ensemble des morphismes de A-modules de M dans N.

Lorsque A est l'anneau $\mathbb{Z}$, muni de la topologie discrète, la catégorie $\underline{\mathbf{M}}_{\mathbb{Z}}$ n'est autre que la catégorie des groupes Abéliens topologiques. L'indice $\mathbb{Z}$ sera alors supprimé dans les notations ci-dessus.

Voici deux lemmes qui seront utilisés dans la suite.

Lemme 1 :

i) Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit I un idéal de A, contenu dans l'annulateur sur A de M, alors M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_{A/I}$.

ii) Soit $A \to B$ un morphisme de $\underline{\mathbf{A}}$ et soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_B$, alors $M_{[A]}$ est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

<u>Preuve</u> : Le morphisme $A \to A/I$ est continu, surjectif et ouvert. Il en est de même pour l'application $A \times M \to A/I \times M$. L'application composée, définie par les lois externes, $A \times M \to A/I \times M \to M$ est continue. La submersivité de la première application entraîne la continuité de la loi externe du A/I-module M. Dans les cas i) et ii) la continuité de l'addition est claire. Dans les hypothèses de ii), on remarque que l'application $A \times M \to B \times M \to M$ est continue; ainsi M est un A-module topologique.

Rappelons que lorsque X est un espace uniforme, il existe une application uniformément continue $i_X : X \to X\hat{}$, où $X\hat{}$ est l'espace séparé complété de X. Si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, l'application i_M est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$ dit morphisme complétion. La topologie de M est image réciproque de celle de $M\hat{}$. Il en est de même dans la catégorie $\mathbf{A}$.

<u>Lemme 2</u> :

i) Soit $f: X \times Y \to Z$ une application continue, où X, Y, Z sont des espaces topologiques. Soient C une partie quasi-compacte de Y et U un ouvert de Z. Alors l'ensemble des éléments x de X, tels que $f(x,C) \subset U$, est un ouvert de X.

ii) Soient M, N, P des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit $f: M \times N \to P$ une application uniformément continue. Soient C une partie précompacte de N et O un ouvert de P contenant 0. Dans le cas où f vérifie la relation $f(0,N) = 0$, l'ensemble des éléments x de M qui vérifient $f(x,C) \subset O$ est un voisinage de 0.

<u>Preuve</u> : La partie i) est démontrée dans [9]. Plaçons-nous dans les hypothèses de ii). Soient les morphismes complétion $i_M: M \to M\hat{}$, $i_N: N \to N\hat{}$ et $i_P: P \to P\hat{}$, alors $i_M \times i_N: M \times N \to M\hat{} \times N\hat{}$ est le morphisme complétion . La partie $K = \overline{i_N(C)}$ de $N\hat{}$ est compacte. Un ouvert O de P est égal à $i_P^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $P\hat{}$. L'application f donne une application continue $f\hat{}$, par passage aux séparés complétés, satisfaisant $i_P \circ f = f\hat{} \circ (i_M \times i_N)$. La relation $f(0,N) = 0$ implique $f\hat{}(0,N\hat{}) = 0$, en vertu du principe de prolongement des identités. Il résulte de i) que l'ensemble $W\hat{}$ des éléments y de

$M^\wedge$ tels que $f^\wedge(y,K) \subset U$ est un ouvert contenant 0. Soit alors $W = i_M^{-1}(W^\wedge)$, on a $f(W,C) \subset O$; de plus, W est un voisinage de 0 dans M

Si M est un objet de $\underline{M}_A$, l'application continue $A \times M \to M$, associée à la loi externe de M, n'est pas en général uniformément continue. Pour avoir un résultat du type de celui de ii) du lemme précédent, une autre méthode est nécessaire.

Soit M un objet de $\underline{M}_A$, si a est un élément de A, on définit un morphisme de A-modules $f_a: M \to M$ par $f_a(x) = a.x$, pour tout $x \in M$; de même, si x est un élément de M, on définit un morphisme de A-modules $f_x: A \to M$ par $f_x(a) = a.x$. Si M est un objet de $\underline{M}_A$, les morphismes f_x et f_a sont continus.

<u>Rappels</u> : Soit M un objet de $\underline{M}_A$ et soit X une partie de A, soient aussi Y et Z des parties de M, on définit les transporteurs de la manière suivante :

i) Y : X est l'ensemble des éléments m de M, tels que $Xm \subset Y$.

ii) Z : Y est l'ensemble des éléments a de A, tels que $aY \subset Z$.

Il est clair que l'on a les relations :

$$Y : X = \bigcap_{a \in X} f_a^{-1}(Y) \qquad \text{et} \qquad Z : Y = \bigcap_{y \in Y} f_y^{-1}(Z).$$

Si l'on suppose que M est un objet de $\underline{M}_A$, dans le cas où Y (resp. Z) est une partie fermée de M, alors Y : X (resp. Z : Y) est une partie fermée de M (resp. A).

En particulier, l'annulateur sur A de M, à savoir 0 : M, est une partie fermée de A.

<u>Notations</u> : Soit M un objet de $\underline{M}_A$, l'adhérence de 0 dans M est désignée par z(M). On sait que M/z(M) est un A-module séparé. On le désigne par s(M). Alors z(A) est un idéal de A, contenu dans z(M) : M et par suite s(M) est un objet de $\underline{M}_{s(A)}$.

Dans ces conditions, l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire continue $A \times M \to M$ se prolonge en une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire continue $s(A) \times s(M) \to s(M)$. On déduit du théorème 1, §6, Ch. 3 de [3], que l'application $A \times M \to M$ se prolonge en une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire continue $A^\wedge \times M^\wedge \to M^\wedge$. On est alors en mesure d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 3 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit C une partie précompacte de M (resp. A) et soit O un ouvert de M, contenant 0, alors :

l'ensemble O : C est un voisinage de 0 dans A (respectivement un voisinage de 0 dans M).

Preuve : Identique à celle du lemme 2.

Remarque 4 : Il résulte du lemme 2 que lorsque M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ on a les résultats suivants, dus à l'existence de l'application continue associée à la loi externe :

Si O est un ouvert de M et si C est une partie quasi-compacte de A (resp. M), alors l'ensemble O : C est un ouvert de M (resp. A)

Proposition 5 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors :

1) Si G est un sous-groupe de M, l'ensemble B_G = G : G est un sous-anneau de A. Dans le cas où G est ouvert et précompact, l'anneau B_G est ouvert et donc fermé dans A.

2) Si G est un sous-groupe de M, l'ensemble G : A est un sous-A-module de M contenu dans G. Dans le cas où G est fermé, alors G : A est fermé; il est donc quasi-compact (resp. précompact) si G est quasi-compact (resp. précompact).

3) Si G est un sous-groupe de M, l'ensemble G : M = I_G est un idéal de A et B_G. Si G est ouvert et M est précompact, alors l'idéal I_G est ouvert (donc fermé).

Preuve : Les assertions algébriques sont évidentes. Les assertions topologiques résultent du lemme 3 et du fait qu'un sous-groupe est ouvert si et seulement si 0 est un point intérieur de ce groupe.

Remarque 6 : Si l'on se place dans les hypothèses de la proposition précédente, lorsque G est un sous-groupe ouvert et A est un anneau précompact, alors $G : A$ est un sous-module ouvert de M, comme il résulte du lemme 3.

Nous allons donner quelques propriétés des parties précompactes d'un objet de $\underline{\mathbf{M}}$.

De manière générale, si G est un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, nous désignons par $\mathbf{k}_G$ (resp. $\mathbf{K}_G$) l'ensemble des parties précompactes (resp. quasi-compactes) de G.
Il est bien connu que l'ensemble $\mathbf{k}_G$ est stable par réunion, que toute partie d'une partie précompacte est précompacte et aussi que l'image par une application uniformément continue d'une partie précompacte est précompacte.
Une caractérisation bien connue de la précompacité d'une partie est la suivante : soit X une partie d'un objet G de $\underline{\mathbf{M}}$, alors X est précompacte si et seulement si $\overline{i(X)} \in \mathbf{K}_{G\hat{}}$, où $i: G \to G\hat{}$ est le morphisme complétion. Dans les hypothèses précédentes, il est facile de voir que lorsque $Y \in \mathbf{k}_{G\hat{}}$, alors $i^{-1}(Y) \in \mathbf{k}_G$.
Une traduction du théorème 3, § 4,N° 2, Ch. 2 de [2], au cas d'un objet G de $\underline{\mathbf{M}}$ donne : G est précompact si et seulement si pour tout $V \in V(G)$, il existe un nombre fini d'éléments $x_1,..,x_n$ de G, tels que $G = \cup x_i + V$.
De même, une partie X de G est précompacte si et seulement si il existe un nombre fini d'éléments $x_1,...,x_n$ de X, tels que $X \subset \cup x_i + V$, pour tout V appartenant à $V(G)$.
Définition 7 : Soit G un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, on dit que G est localement précompact s'il existe un élément V précompact dans $V(G)$.
L'utilisation de l'exercice 10, § 4, Ch. 2 de [2] montre que $G\hat{}$ est localement compact, puisque $s(G)$ est lui même localement précompact. Réciproquement, lorsque $G\hat{}$ est localement compact, alors G est localement précompact; en effet, si $V \in V(G\hat{})$ et si V est compact, alors $i^{-1}(V) \in V(G)$ et $i^{-1}(V)$ est précompact. Puisque $G\hat{}$est localement compact, on peut choisir

$V(G)$ constitué de parties précompactes.

Il est bien connu qu'un groupe topologique, localement compact et totalement discontinu, a un système fondamental de voisinages de 0 constitué de sous-groupes ouverts compacts.

Il est bien connu aussi qu'un élément A de $\underline{\mathbf{A}}$ qui est compact est nécessairement totalement discontinu.

Nous déduisons de ces remarques qu'un objet $M \in \underline{\mathbf{M}}_A$ qui est localement précompact et tel que $M^\wedge$ soit totalement discontinu a un système fondamental de voisinages de 0 constitué de sous-groupes ouverts et précompacts. En particulier un anneau précompact a un système fondamental de voisinages de 0 constitué de sous-groupes ouverts et précompacts.

<u>Proposition 8</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_B$ localement compact et totalement discontinu. On suppose qu'il existe un morphisme $A \to B$ de $\underline{\mathbf{A}}$ et que B est un anneau précompact. Alors $M_{[A]}$ a un système fondamental de voisinages de 0 constitué de sous-A-modules ouverts et compacts.

<u>Preuve</u> : On sait que $V(M) = \{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$, où G_λ est un sous-groupe ouvert et compact de M. Il est clair que $G : B$ est contenu dans $G : A \subset G$, si G désigne un des G_λ . La remarque 6 montre que $G : B$ est un sous-groupe ouvert de M; il en est donc de même pour $G : A$. Ce dernier, étant fermé et contenu dans le compact G, est aussi compact et un sous-A-module de M (Prop. 5).

<u>Corollaire 9</u> : Soit A un anneau compact, alors un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par des idéaux ouverts et compacts.

Un anneau précompact a un système fondamental de voisinages de 0 constitué d'idéaux ouverts, donc précompacts.

<u>Preuve</u> : La première partie s'obtient à l'aide la proposition 8, pour $A = B = M$. La deuxième s'obtient à l'aide des remarques ci-dessus.

<u>Remarque 10</u> : Soit $M \in \underline{\mathbf{M}}_A$, où M est compact, totalement discontinu et A est un anneau précompact. Soit $V(M) = \{ G_\lambda \}$, où G_λ est un sous-groupe ouvert com-

pact. Désignons par G un élément de V(M). Alors l'anneau A/I_G est discret et $M/G:A$ est un A/I_G-module topologique fini et fidèle.

En effet, $G : A$ est un sous-A-module ouvert et donc $M/G : A$ est compact et discret, donc fini. De plus $I_G M = (G : M)M = A(G : M)M \subset G$ implique $I_G M \subset G : A$; d'autre part, si a est un élément de A, tel que $aM \subset G : A$, alors $aAM \subset G$ entraîne $a \in I_G$. Il résulte du lemme 1 que $M/G : A$ est un A/I_G-module topologique et fidèle.

Remarque 11 : Soit M un A-module localement compact, totalement discontinu sur un anneau A, n'ayant pas d'autres sous-anneaux que lui-même (id est $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Alors M a un système fondamental de voisinages de zéro formé de sous-modules ouverts compacts. En effet, si G est un sous-groupe ouvert compact de M, il est clair que G est un $G : G$-module car $G : G$ est un sous-anneau de A. Compte tenu de l'hypothèse on a $G : G = A$ et donc G est un A-module.

Remarque 12 : Soit A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$, tel que $V(A) = \{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ où I_λ désigne un idéal (nécessairemant ouvert); autrement dit A est muni d'une topologie linéaire. Soit M un A-module muni de la topologie définie par $V(M) = \{I_\lambda \cdot M\}_{\lambda\in\Lambda}$. Les ensembles $I_\lambda \cdot M$ sont des modules ouverts. Si de plus M est compact, totalement discontinu, soit G un sous-groupe ouvert compact de M, élément d'un système fondamental de voisinages de zéro de M; alors la relation $I_G M \subset G : A \subset G$ et le fait que I_G soit ouvert impliquent que I_G contient un des I_λ et ensuite que $I_\lambda \cdot M$ est contenu dans $G : A$. Il en résulte que $G : A$ est ouvert et compact. Ainsi M admet un système fondamental de voisinages de 0, constitué de sous-modules ouverts compacts.

Donnons maintenant quelques rappels sur les composantes connexes d'un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Soit $M \in \underline{\mathbf{M}}_A$, on désigne par I_C (resp. M_C) la composante connexe de 0 de l' anneau A (resp. de M). On sait que I_C (resp. M_C) est un idéal de A (resp.

un sous-A-module de M) fermé. Les quotients A/I_C et M/M_C sont totalement discontinus. On a de plus la relation $I_C M \subset M_C$: en effet, pour $x \in M$, l'application $f_x : A \to M$ est continue et donc $I_C.x = f_x(I_C)$ est connexe et contient 0. Il résulte du lemme 1 que M/M_C est un A/I_C-module topologique.

On donne maintenant quelques précisions sur les modules sur un anneau quasi-compact ou précompact. Il est clair que tout produit d'anneaux ou de modules quasi-compacts (resp. précompacts) est quasi-compact (resp. précompact). Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, il existe un système de générateurs $\{m_i\}_{i\in I}$ de M et un élément h de $H_A(A^{(I)},M)$ surjectif, défini par $h((a_i)) = \Sigma\, a_i.m_i$. Lorsque M est de type fini, il est facile de voir qu'en fait h est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Si X est un ensemble et si $\{ f_i : X \to X_i \}_{i\in I}$ est une famille d'applications, les ensembles X_i étant des espaces topologiques, alors la topologie initiale sur X associée à la famille est identique à la topologie image réciproque par l'application canonique $f : X \to \Pi\, X_i$, le produit étant muni de la topologie produit.

Considérons maintenant un élément f de $H_A(M,N)$, où $N \in \underline{\mathbf{M}}_A$. On peut munir M de la topologie image réciproque associée à f : les ouverts de M sont les ensembles $f^{-1}(O)$ où O est un ouvert de N. Pour cette topologie, f devient une application continue. Il en résulte que si T est la topologie sur N et $f^{-1}(T)$ la topologie image réciproque sur M, alors $M \in \underline{\mathbf{M}}_A$ et $f \in \mathbf{H}_A(M,N)$. De plus, le morphisme f est strict : en effet, si O est un ouvert de N, on a $f(f^{-1}(O)) = O \cap f(M)$.

Soit alors une famille $\{ f_i : M \to M_i \}$ d'éléments de $H_A(M,M_i)$, où $M_i \in \underline{\mathbf{M}}_A$. Puisqu'un produit de A-modules topologiques est un A-module topologique, il résulte de ce qui précède que M muni de la topologie initiale asssociée à la famille est un élément de $\underline{\mathbf{M}}_A$. En particulier, toute borne supérieure d'un ensemble de topologies T_i sur un A-module M, faisant de M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, est une topologie T telle que M, muni de T, est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On dit alors que T est compatible avec la structure de A-module de M.

Si $A \in \mathbf{A}$, soit M un A-module. Il est isomorphe à $A^{(I)}/L$ pour un ensemble I convenable et un sous-A-module L de $A^{(I)}$. Munissons $A^{(I)}$ de la topologie induite par la topologie produit sur A^I et $A^{(I)}/L$ de la topologie quotient. Le morphisme de A-modules $f : M \to A^{(I)}/L$ permet de munir M de la topologie image réciproque et donc M est muni au moins d'une topologie compatible avec sa structure.

<u>Définition 13</u> : Soit $A \in \mathbf{A}$ et soit M un A-module, on appelle topologie canonique sur M, la topologie borne supérieure des topologies sur M, compatibles avec la structure de A-module de M. On la désigne par TC(M).

Les considérations précédentes montrent que la topologie TC(M) est la plus fine des topologies sur M, compatibles avec sa structure. Si u est un élément de $H_A(M,M')$ et si M est muni de la topologie TC et $M' \in \underline{\mathbf{M}}_A$, alors u appartient à $\mathbf{H}_A(M,M')$; en effet, si T' est la topologie de M', on voit que $u^{-1}(T')$ est moins fine que TC. Si M et M' sont de type fini, u est strict pour TC.

Dans le cas d'un A-module de type fini M, de système générateur $\{m_1,\dots,m_p\}$, on peut donner une description de sa topologie TC. En effet, le morphisme de A-modules $f: A^p \to M$, défini par $f(a_1,\dots,a_p) = a_1.m_1+\cdots+a_p.m_p$ est continu, A^p étant muni de la topologie produit et M de la topologie TC; donc pour tout $W \in V_{TC}(M)$, il existe $V \in V(A)$ tel que $Vm_1+\cdots+Vm_p \subset W$. Pour tout $V \in V(A)$ posons $V' = Vm_1+\cdots+Vm_p$; alors $\{V'\}_{V\in V(A)}$ définit un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie sur M compatible avec sa structure de A-module. Il en résulte que la topologie TC(M) a un système fondamental de voisinages de 0 donné par $\{V'\}_{V\in V(A)}$. Il est alors clair que le morphisme f est strict et que l'on a un isomorphisme $A^p/\mathrm{Ker}(f) \to M$ dans $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Si la topologie sur A est linéaire, c'est à dire si $V(A) = \{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ où I_λ est un idéal de A, on a alors $V_{TC}(M) = \{I_\lambda M\}_{\lambda\in\Lambda}$. Supposant encore M de type fini, il est facile de voir que la topologie TC sur le A-module M est discrète si et seulement si les ensembles $0 : x$, pour $x \in M$, sont des ouverts.

<u>Proposition 14</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, de type fini; alors :

1) Si A est précompact, M est précompact.

2) Si A est compact, M est quasi-compact. Si de plus M est séparé, M est compact et totalement discontinu. Sa topologie est alors égale à la canonique. Dans le cas où A est compact , on a donc $M_C \subset z(M)$.

<u>Preuve</u> : L'existence d'un morphisme continu $f : A^p \to M$ donne 1) et une partie de 2). Lorsque A est compact, il est totalement discontinu. Il en est de même pour A^p. Le lemme 2, § 7, N° 3, Ch. 3 de [3] et le fait que Ker(f) soit fermé, lorsque M est séparé, donc compact, impliquent que $A^p/\mathrm{Ker}(f)$ est totalement discontinu et compact. Le morphisme continu $A^p/\mathrm{Ker}(f) \to M$ est alors un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Si M n'est pas séparé, alors $M/z(M)$ est séparé et donc totalement discontinu; il en résulte que l'image de M_C dans $s(M)$ est égale à 0.

<u>Remarque</u> : Si A est un anneau compact et si M est un A-module de présentation finie, la prop. 14 montre que $A^p/\mathrm{Ker}(f)$ est un A-module compact totalement discontinu. Il en est de même pour M, si M est muni de la topologie TC.

<u>Proposition 15</u> : Dans les deux situations suivantes :

1) A est un anneau et $f: A \to B$ un morphisme d'anneaux où $B \in \mathbf{A}$, la topologie T de B étant précompacte.

2) M est un A-module où $A \in \mathbf{A}$ et $f : M \to N$ est un élément de $H_A(M,N)$, où N est un élément de $\underline{\mathbf{M}}_A$, la topologie T de N étant précompacte.

la topologie image réciproque $f^{-1}(T)$ qui fait de A un objet de $\mathbf{A}$ dans le cas 1) et de M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ dans le cas 2) est précompacte.

<u>Preuve</u> : Dans les deux cas Im(f) muni de la topologie induite est précompact. Un voisinage de 0 dans la topologie $f^{-1}(T)$ est de la forme $f^{-1}(V)$ où V est un voisinage de 0. Il existe alors une relation $\mathrm{Im}(f) \subset f(x_1) + V \cup \ldots\ldots \cup f(x_n) + V$. Alors A (resp. M) est contenu dans $x_1 + f^{-1}(V) \cup \ldots\ldots \cup x_n + f^{-1}(V)$.

Soit X un objet de $\mathbf{A}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$ muni d'une topologie T précompacte. Nous désignons par $c_T : X \to X^\wedge(T)$ le morphisme complétion pour la structure uniforme définie par T. Par définition $X^\wedge(T)$ est compact et la topologie T est égale à la topologie image réciproque par c_T.

Soit encore X un objet de $\mathbf{A}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$ muni d'une topologie T. Nous désignons par $\mathbf{P}$ l'ensemble des topologies P sur X, faisant de X un objet de $\underline{\mathbf{A}}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$ et précompactes et moins fines que T. La topologie grossière sur X (l'ensemble des ouverts est constitué par $\{\emptyset, X\}$) est un élément de $\mathbf{P}$, puisque le complété de X pour cette topologie est nul, donc compact.

<u>Définition 16</u> : Soit X un objet de $\mathbf{A}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$ muni d'une topologie T. La borne supérieure des topologies $P \in \mathbf{P}$ définit sur X une topologie compatible avec la structure de X, dite topologie de Bohr et désignée par $TB(X)$ ou TB.

La topologie TB fait de X un objet de $\mathbf{A}$ (resp. $\underline{\mathbf{M}}_A$), précompact; en effet, il résulte de la proposition 18, § 3, N° 9, de [2] que $X^\wedge(TB)$ n'est autre que l'adhérence de l'image du morphisme $X \to \prod_{P \in \mathbf{P}} X^\wedge(P)$; dans ces conditions $X^\wedge(TB)$ est compact, la prop. 15 fournit alors le résultat.

<u>Rappel</u> : Soient M et M' deux A-modules topologiques et soit $f : M \to M'$ un morphisme de A-modules, continu. Si T est la topologie de M, T' celle de M' et S celle de A, il existe un morphisme continu unique de $A^\wedge(S)$-modules $f^\wedge : M^\wedge(T) \to M'^\wedge(T')$, tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_M"'] & M' \arrow[d, "c_{M'}"] \\ M^\wedge(T) \arrow[r, "f^\wedge"'] & M'^\wedge(T') \end{tikzcd}$$

Ce résultat se trouve, par exemple, dans [3 , § 6, Ch. 3].

Le morphisme d'anneaux $A \to A^\wedge(S)$ définit par restriction une structure de A-module sur $M^\wedge(T)$ et $M'^\wedge(T')$; pour ces structures de A-module, les morphismes c_M et $c_{M'}$ sont des morphismes de A-modules et le morphisme $f^\wedge$ un morphisme de A-modules.

Soit maintenant un objet compact M de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit $c_M : M \to M\hat{}$ le morphisme complétion. Puisque M est compact, le morphisme c_M est fermé. Son image est dense dans $M\hat{}$, il en résulte que c_M est surjectif. Un espace uniforme compact est séparé complet, ainsi c_M est injectif. Finalement, le morphisme c_M est un homéomorphisme, donc un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Considérons, à nouveau, le morphisme f ci-dessus et supposons de plus que M' soit compact; on obtient un diagramme commutatif de morphismes de $\underline{\mathbf{M}}_A$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{c_M} & M\hat{}(T) \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow {\scriptstyle f'} \\ & & M' \end{array}$$

Le morphisme f', ainsi défini, est unique.

Le résultat analogue dans la catégorie $\underline{\mathbf{A}}$ est vrai. Il suffit de remarquer qu'un objet compact de $\underline{\mathbf{A}}$ est séparé complet et d'utiliser la propriété universelle d'un séparé complété.

<u>Définition 17</u> : On appelle compactifié de Bohr d'un objet A de $\underline{\mathbf{A}}$ (resp. un objet M de $\underline{\mathbf{M}}_A$) le séparé complété de A (resp. M) pour la topologie de Bohr . On le désigne par B(A) (resp. B(M)). Le morphisme canonique complétion est désigné par $b_A : A \to B(A)$ (resp. $b_M : M \to B(M)$).

Les objets B(A) et B(M) sont compacts. Les morphismes b_A et b_M sont appelés morphismes compactification. Les considérations précédentes montrent que b_A et b_M sont des morphismes respectifs de $\underline{\mathbf{A}}$ et $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Si X est un objet précompact, il est clair que que $B(X) = X\hat{}$.

<u>Théorème 18</u> : Soit X un objet de $\underline{\mathbf{A}}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$. Pour tout morphisme de la catégorie $f : X \to Y$, où Y est compact, il existe un morphisme de la catégorie $f' : B(X) \to Y$, unique tel que $f = f' \circ b_X$.

Ainsi B(X), solution d'un problème universel, est unique .

Preuve : Soit $f : X \to Y$ un morphisme, où Y est compact pour une topologie T. Alors la topologie $f^{-1}(T)$ est moins fine que la topologie TB(X). Il en résulte que f est continu si l'on remplace la topologie de X par la topologie de Bohr associée. Les résultats, fournis dans le rappel, donnent la conclusion.

Nous avons dit plus haut que les anneaux sont supposés non nuls dans ce travail. D'autre part un compactifié de Bohr peut être nul.

Définition 19 : Un élément A de $\mathcal{A}$ est dit compactifiable si B(A) est non nul.

Soit X un objet de $\mathcal{A}$ ou $\underline{M}_A$. On considère la famille $V_{TF}(X)$ constituée des idéaux (ou sous-A-modules) Y de X ouverts et tels que X/Y soit fini (ou ce qui revient au-même, compact). Il est à peu près évident que $V_{TF}(X)$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie sur X compatible avec sa structure. Si T est la topologie de X, on la désigne par TF. La proposition 2, § 7, N° 3 de [3] et ses corollaires montrent que le morphisme complétion $X \to X\hat{}(TF)$ s'identifie à l'application canonique $X \to B'(X)$, où B'(X) est la limite projective des X/Y, pour $Y \in V_{TF}(X)$. Il est évident que B'(X) est compact et donc la topologie TF est précompacte. Le morphisme correspondant à TF est désigné par $b'_X : X \to B'(X)$. En vertu du Thé. 18, il existe une factorisation du morphisme $b'_X = b''_X \circ b_X$, où $b''_X : B(X) \to B'(X)$ est un morphisme surjectif. En effet, b''_X a une image dense et est une application fermée (B(X) et B'(X) sont compacts).

Proposition 20 : Soit X un objet de $\mathcal{A}$ ou de $\underline{M}_A$, alors :

1) Si $X \in \mathcal{A}$, l'anneau X est compactifiable si et seulement si il existe un idéal Y ouvert de X, tel que X/Y soit fini non nul, ou encore si et seulement si il existe un morphisme $X \to Z$ de $\mathcal{A}$, où Z est compact, non nul.

2) Si $X \in \underline{M}_A$, le A-module B(M) est non nul dans le cas où M possède un sous-A-module ouvert Y tel que X/Y soit fini non nul.

<u>Preuve</u> : Si l'on suppose que B(X) est nul, les considérations ci-dessus montrent que B'(X) est nul; dans ce cas, X est égal à l'intersection des éléments de $V_{TF}(X)$, c'est à dire que $V_{TF}(X) = \{ X \}$; ainsi 2) et une partie de 1) sont prouvés. Si l'anneau A est compactifiable, il existe dans $\mathbf{A}$ un morphisme $A \to B(A)$ à but compact non nul. Supposons qu'il existe dans $\mathbf{A}$ un morphisme $A \to B$, où B est un anneau compact non nul; dans ce cas, il est évident que B possède un B-module compact non nul. Mais alors, la proposition 1.2 de [9] montre que B a au moins un idéal ouvert J, différent de B. L'anneau B/J est donc fini. Soit I l'image réciproque dans A de l'idéal J. Alors, I est un élément de $V_{TF}(A)$, différent de A.

<u>Corollaire 21</u> : Soit A un objet de $\mathbf{A}$, alors :

1) S'il existe un morphisme $A \to B$ de $\mathbf{A}$, où B est compactifiable, l'anneau A est compactifiable.

2) L'anneau A est compactifiable si et seulement si A possède un idéal maximal fermé, tel que A/M soit fini.

3) Si A est connexe, alors A n'est pas compactifiable. Si A n'est pas connexe, alors A est compactifiable si et seulement si A/I_C est compactifiable.

<u>Preuve</u> : L'assertion 1) est évidente. Si A possède un idéal maximal fermé tel que A/M soit fini, alors A/M est un anneau compact non nul, donc A est compactifiable. Si l'anneau A est compactifiable, il existe dans A un idéal I appartenant à $V_{TF}(A)$, différent de A. Soit M un idéal maximal de A, contenant I; dans ce cas M est ouvert donc fermé et A/M est un anneau fini. Si A est connexe et compactifiable, l'image de A dans B(A) est nulle puisque B(A) est totalement discontinu, une contradiction. De même, $b_A(I_C) = 0$ montre qu'il existe une factorisation $A \to A/I_C \to B(A)$; le reste de la preuve est alors évident , puisque A est connexe si et seulement si $A = I_C$.

Pour donner une formulation plus complète du théorème 18, nous donnons la définition suivante.

Définition 22 : Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}$, on dit que f est un morphisme dense si Im(f) est dense dans Y.

La classe des morphismes denses de $\underline{\mathbf{M}}$ est stable par composition et par division à droite. Si g, h : $Y \to Z$ sont des morphismes de $\underline{\mathbf{M}}$, tels que Z soit un espace séparé et si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}$, dense, alors $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$. Donc, dans la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathbf{M}}$ dont les objets sont les groupes séparés, un morphisme dense est un épimorphisme.

Théorème 23 : Soit A un anneau compactifiable et soit $b : A \to B(A)$ le morphisme compactification; alors b est un morphisme dense. Pour tout morphisme $f : A \to B$ de $\underline{\mathbf{A}}$ où B est un anneau compact, il existe un morphisme unique $f' : B(A) \to B$ de $\underline{\mathbf{A}}$ tel que $f' \circ b = f$.

Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit $b_M : M \to B_A(M)$ le morphisme compactification; alors b_M est un morphisme dense . Pour tout morphisme $f : M \to P$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$, où P est un A-module compact, il existe un morphisme unique $f' : B_A(M) \to P$ tel que $f' \circ b_M = f$.

Bien entendu, une compactification, étant solution d'un problème universel, est unique, à un isomorphisme près. On notera que nous avons légèrement changé la notation des morphismes compactification. On notera aussi qu'une compactification dans $\underline{\mathbf{A}}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$ dépend des topologies. Si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ muni d'une topologie S, l'anneau A étant muni d'une topologie T, si l'on veut spécifier, on désignera le compactifié de M par $B_{(A,T)}(M,S)$ et celui de A par B(A,T).

On trouve dans [10] une caractérisation de la topologie de Bohr pour les catégories $\underline{\mathbf{M}}$ et $\underline{\mathbf{A}}$. Nous rappelons celle concernant $\underline{\mathbf{A}}$ et donnerons dans un autre paragraphe une généralisation pour la catégorie $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Définition 24 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, on dit qu'une partie X de M est relativement dense dans M s'il existe un nombre fini d'éléments $m_1,..,m_t$ de M tels que $M = m_1 + X \cup \cdots\cdots \cup m_t + X$.

Il est clair que M est précompact, si et seulement si tout voisinage de 0 dans M est relativement dense.

Définition 25 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit B (resp. N) une partie de A (resp. M) . On dit que B est bornée dans M si pour tout voisinage V de 0 dans M il existe un voisinage W de 0 dans M, tel que $BW \subset V$. On dit que N est bornée si pour tout voisinage V de 0 dans M, il existe un voisinage W de 0 dans A, tel que $WN \subset V$.

Une partie de A est dite bornée si elle est bornée dans le A-module A.

Le lemme 3 montre qu'une partie précompacte est bornée.

Proposition 26 : [10] . Soit A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$. Alors $V_{TB}(A)$ est constitué des ensembles V_0 pour lesquels il existe une suite $\{ V_n \}_{n\in\mathbf{N}-\{0\}}$ où V_n est un voisinage de 0 pour la topologie T de A, symétrique et relativement dense, telle que pour $n \in \mathbf{N}$ on ait $2V_{n+1} \subset V_n$ et $AV_{n+1} \subset V_n$.

En ce qui concerne la topologie de Bohr d'un A-module on donne pour l'instant les considérations suivantes.

Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, l'anneau A étant muni d'une topologie T et M de la topologie S. La topologie SB sur M fait de M un A-module topologique pour la topologie T sur A. Puisque $B_A(M)$ est le complété de M pour la topologie SB, alors $B_A(M)$ est un $A\hat{}(T)$- module topologique; le morphisme $A \to A\hat{}(T)$ confère à $B_A(M)$ sa structure de A-module topologique. D'autre part, nous avons une factorisation en morphismes de $\underline{\mathbf{A}}$: $A \to B(A) = A \to A\hat{}(T) \to B(A)$.

Dans la suite, on désigne par $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$ la collection des objets M de $\underline{\mathbf{M}}_A$, qui sont des objets de $\underline{\mathbf{M}}_{B(A)}$ et vérifient $b_*(M) = M$.

Lemme 27 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$ si et seulement si M est un A-module topologique pour les topologies de Bohr sur A et M.

Preuve : Si M est un A-module topologique pour les topologies de Bohr sur A et M, en vertu d'un résultat bien connu sur les complétions de modules, $B_A(M)$ est un B(A)-module topologique. Réciproquement, lorsque $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$, il suffit de se rappeler que la topologie de Bohr est image réciproque de la topologie du compactifié de Bohr pour voir que M est un A-module topologique pour les topologies de Bohr.

On considère maintenant les phénomènes dus à la variation des topologies sur l'anneau et le module.

Il est clair que B et B_A sont des endofoncteurs respectifs de $\underline{\mathbf{A}}$ et $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, l'anneau A étant muni d'une topologie T et M d'une topologie S. La topologie S est moins fine que la topologie TC sur M. On en déduit l'existence d'un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, surjectif $B_A(M,TC) \to B_A(M,S)$, en vertu de la définition 22. Nous désignerons $B_A(M,TC)$ par $B^\circ_{(A,T)}(M)$.

Soit maintenant un objet M de $\underline{\mathbf{M}}_{A'}$, et soit un morphisme f : $A \to A'$ de $\underline{\mathbf{A}}$, on sait que M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Puisque $B_{A'}(M)$ est un objet compact de $\underline{\mathbf{M}}_A$, il existe un morphisme surjectif $B_A(M) \to B_{A'}(M)$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

En particulier, soit A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$ muni de deux topologies T et T', T étant plus fine que T', si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, pour T et T', on obtient un morphisme surjectif $B_{(A,T)}(M) \to B_{(A,T')}(M)$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$, A étant muni de la topologie T.

Soient toujours un anneau A muni d'une topologie T et un A-module topologique M muni d'une topologie S. Soit D la topologie discrète sur A, il est facile de voir que M muni de la topologie S est un A-module topologique sur A muni de la topologie D. On désigne par $B^d_A(M,S)$ l'objet $B_{(A,D)}(M,S)$. Ce qui précède montre qu'il existe un morphisme surjectif $B^d_A(M,S) \to B_{(A,T)}(M,S)$.

Finalement, nous désignons par $B^d_A(M)$ le compactifié d'un A-module M, A et M étant munis de la topologie discrète.

Avec les notations ci-dessus, on obtient la suite de morphismes surjectifs continus : $B^d_A(M) \to B^d_A(M,S) \to B_{(A,T)}(M,S)$.

On notera que si A est un anneau topologique muni de deux topologies T et T', T étant plus fine que T', alors A muni de T' est compactifiable implique que A muni de T est compactifiable.

Si un objet A de $\underline{\mathbf{A}}$ est totalement discontinu, lorsqu'il est compact, il n'en est pas de même en général pour un objet compact M de $\underline{\mathbf{M}}_A$: la théorie classique des groupes compacts montre qu'un groupe compact est totalement discontinu si et seulement si son groupe des caractères est de torsion, cf. [5].

Si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, nous posons $K_A(M) = B_A(M)/(B_A(M))_C$. Le A-module topologique $K_A(M)$ est compact, totalement discontinu.

<u>Proposition 28</u> : Soit $k_M : M \to K_A(M)$ le morphisme canonique, alors :

1) Le morphisme k_M est dense.

2) Pour tout morphisme $f : M \to P$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$, où P est compact et totalement discontinu, il existe un unique morphisme $f' : K_A(M) \to P$, tel que $f' \circ k_M = f$.

<u>Preuve</u> : On commence par remarquer que f se factorise à travers un morphisme $g : B_A(M) \to P$; on observe ensuite que $g((B_A(M))_C) = 0$. Le reste est alors évident.

Pour tout élément N de $V_{TF}(M)$, le A-module quotient M/N est discret, donc compact, totalement discontinu; on en déduit que B'(M) est compact, totalement discontinu. Il existe donc un morphisme surjectif $K_A(M) \to B'(M)$.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\underline{\mathbf{A}}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$; pour un élément J de $V_{TF}(Y)$, on obtient un morphisme $X/f^{-1}(J) \to Y/J$, injectif. On peut donc définir une application $t : V_{TF}(Y) \to V_{TF}(X)$ par $t(J) = f^{-1}(J)$. Si le morphisme f est dense, l'application t est injective, en vertu de la relation $J = \overline{f(f^{-1}(J))}$: on a en effet $J = J \cap \overline{f(X)}$; puisque J est ouvert et fermé, l'adhérence de $J \cap \overline{f(X)}$ est égale à J et à $\overline{J \cap f(X)}$. Dans le cas où le morphisme f est dense, le morphisme quotient $X/t(J) \to Y/J$ est un isomorphisme de la catégorie, puisqu'il est dense et fermé, les espaces quotient étant compacts.

<u>Théorème 29</u> : Soit A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$, compactifiable et soit B(A) son compactifié de Bohr, alors l'application $t : V_{TF}(B(A)) \to V_{TF}(A)$ est une bijection, telle que pour $J \in V_{TF}(B(A))$ on ait $J = \overline{b(b^{-1}(J))}$ et un isomorphisme $A/b^{-1}(J) \to B(A)/J$. De plus les anneaux B'(A) et B(A) sont isomorphes dans la catégorie $\underline{\mathbf{A}}$.

En outre, la topologie de Bohr sur A est identique à la topologie définie par $V_{TF}(A)$.

Preuve : Compte-tenu de ce qui précède, l'application t est injective; elle est surjective : soit I un élément de $V_{TF}(A)$, le morphisme d'anneaux $A \to A/I$ a un but compact, il se factorise donc à travers un morphisme $B(A) \to A/I$; le noyau de ce morphisme est un élément J de $V_{TF}(B(A))$, tel que $t(J) = I$. On déduit des résultats de [3], § 7, N° 3, que B(A) est isomorphe à la limite projective des anneaux B(A)/J, pour $J \in V_{TF}(B(A))$: en effet B(A) a un système fondamental de voisinages de zéro, constitué d'idéaux ouverts compacts; ce système est donc cofinal dans $V_{TF}(B(A))$. L'anneau B(A) est donc isomorphe à la limite projective des anneaux A/I, où $I \in V_{TF}(A)$; ainsi B(A) est isomorphe à B'(A). L'anneau B(A) est donc le séparé complété de A pour la topologie TF, d'où l'identité des topologies de Bohr et TF sur A.

Considérons un objet M de $\underline{M}_A$, M étant muni d'une topologie T et A d'une topologie S. Alors M muni de la topologie TF est un A-module topologique, si A est muni de la topologie SF. Il suffit de contrôler les axiomes MV de [3], § 6, N° 6. Les axiomes MV_{II} et MV_{III} sont trivialement vérifiés. Soit x un élément de M et soit N un élément de $V_{TF}(M)$; le A-module M/N est fini.
Soit I l'annulateur sur A de la classe $\bar{x}$ de x dans M/N, c'est à dire $I = N : x$; l'anneau A/I est fini, car isomorphe en tant que A-module au sous-module $A\bar{x}$ de M/N; de plus I est l'image réciproque dans A de l'ouvert $\{ \bar{0} \}$ de $A\bar{x}$; ainsi I appartient à $V_{SF}(A)$, ce qui établit MV_I.

Proposition 30 : Soit M un objet de $\underline{M}_A$, alors B'(M) est un B(A)-module topologique; le morphisme $M \to B'(M)$ est dense; tout morphisme $M \to P$ de $\underline{M}_A$, où P est un objet compact de $\underline{M}_{B(A)}$ se factorise à travers un morphisme $B'(M) \to P$ de $\underline{M}_{B(A)}$, de manière unique. De plus, B'(M) est compact, totalement discontinu.

Preuve : Il suffit d'appliquer les résultats de [3], § 6, N° 6, concernant le séparé complété d'un A-module topologique pour voir que B'(M) est un B'(A)-

module, et que les autres propriétés sont vérifiées; en effet, un module compact est séparé complet.

Corollaire 31 : Soit un objet M de $\underline{\underline{M}}_A$, compact; si M est un B(A)-module topologique, il est totalement discontinu.

En particulier, si B(M) est un B(A)-module topologique, il est totalement discontinu; dans ce cas $B_A(M)$ s'identifie à $K_A(M)$.

Preuve : Le morphisme identité $M \to M$ admet une factorisation à travers un morphisme $B'(M) \to M$. Il en résulte que le morphisme dense $M \to B'(M)$ est injectif; puisque M et B'(M) sont compacts, ce morphisme est fermé, donc un isomorphisme de la catégorie.

Proposition 32 : Soit M un objet de $\underline{\underline{M}}_A$, compact et totalement discontinu, M est un objet de $\underline{\underline{M}}_{B(A)}$ si et seulement si A est borné dans M.

Preuve : Rappelons que A est borné dans M si pour tout voisinage V de 0 dans M il existe un voisinage W de 0 dans M, tel que $AW \subset V$. Supposons que M soit un objet de $\underline{\underline{M}}_{B(A)}$, l'utilisation du lemme 3 montre que B(A) est borné dans M, donc aussi A. Réciproquement, soit M un A-module compact totalement discontinu tel que A soit borné dans M. Le groupe additif M possède dans ce cas un système fondamental de voisinages de zéro constitué par des sous-groupes ouverts compacts G. D'après la proposition 5, on a un sous-A-module G : A, contenu dans G. Puisque A est borné dans M, il existe un voisinage de zéro $W \subset G : A$; ainsi G : A est un sous-A-module ouvert de M. L'ensemble des sous-modules G : A constitue un système fondamental de voisinages de zéro dont les éléments sont des sous-modules ouverts compacts. Ce système fondamental de voisinages de zéro est cofinal dans $V_{TF}(M)$; un raisonnement analogue à celui du théorème 29 montre que M s'identifie à B'(M), donc est un B(A)-module.

Proposition 33 : Soit A un anneau topologique précompact. Tout objet M de $\underline{\underline{M}}_A$ est un objet de $\underline{\underline{M}}_{B(A)}$.

Preuve : Le résultat découle de $\hat{A} = B(A)$ et $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{M}}_{\hat{A}}$.

¶ 2 - ESPACES FONCTIONNELS DE MORPHISMES

Nous commençons par adapter au cas des modules et groupes les définitions et résultats de [4].

Définition 1 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$. Soit encore un ensemble Σ de parties de M. Si S est un élément de Σ et U un sous-ensemble de N, on désigne par T(S,U) l'ensemble des éléments $f \in F(M,N)$ vérifiant $f(S) \subset U$. On désigne par W(S,U) l'ensemble des couples (f,g) de $F(M,N)^2$ tels que l'on ait $g - f \in T(S,U)$.

D'après [4], § 1, on définit sur F(M,N) une structure uniforme en prenant comme système fondamental d'entourages les intersections finies d'ensembles du type W(S,U) où S parcourt Σ et U parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans N. Muni de cette structure uniforme, dite associée à Σ, l'ensemble F(M,N) est désigné par $F_\Sigma(M,N)$.

Proposition 2 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$ et soit Σ un ensemble de parties de M. Muni de la topologie associée à sa structure uniforme l'ensemble $F_\Sigma(M,N)$ est un groupe topologique. Sa topologie est dite topologie de la Σ-convergence. Un système fondamental de voisinages de 0 de $F_\Sigma(M,N)$ est donné par les intersections finies d'ensembles T(S,U) où S parcourt Σ et U parcourt un système fondamental de voisinages de zéro de N.

Preuve : On montre sans problème que l'application soustraction est continue. En ce qui concerne l'addition, il suffit de remarquer que si l'on se donne un ensemble T(S,U) et des éléments f et g de F(M,N), en choisissant un voisinage V de zéro tel que $V + V \subset U$, on a $f + T(S,V) + g + T(S,V) \subset f + g + T(S,U)$.

Remarque : La topologie de la Σ-convergence sur F(M,N) est indépendante du système fondamental de voisinages de 0 dans N. On pourra donc supposer qu'un tel système fondamental de voisinages de zéro est constitué d'ensembles fermés car un groupe topologique vérifie l'axiome O_{III} de [2], Ch. I, § 8, N° 4.

Si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, on peut prendre pour Σ les ensembles de parties suivantes :

(a) l'ensemble $\mathbf{k}_M$ des parties précompactes de M

(b) l'ensemble $\mathbf{K}_M$ des parties quasi-compactes de M

(c) l'ensemble $\mathbf{f}_M$ des parties finies de M.

Si N est un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, on utilise à la place de la notation $F_\Sigma(M,N)$ les notations :

(a) $F_{\mathbf{k}}(M,N)$, auquel cas F(M,N) est dit muni de la topologie de la convergence précompacte.

(b) $F_{\mathbf{K}}(M,N)$, auquel cas F(M,N) est dit muni de la topologie de la convergence quasi-compacte.

(c) $F_{\mathbf{f}}(M,N)$, auquel cas F(M,N) est dit muni de la topologie de la convergence simple. Cette topologie n'est autre que la topologie produit sur N^M

Puisque $\mathbf{F}(M,N)$ et $\mathbf{H}(M,N)$, ainsi que $\mathbf{H}_A(M,N)$ lorsque N est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, sont des sous-groupes de F(M,N), on peut les considérer comme des sous-groupes topologiques de $F_\Sigma(M,N)$; dans ce cas, ils seront désignés respectivement par $\mathbf{F}_\Sigma(M,N)$, $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$. On introduit une condition qui nous permettra de dire quand $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$ est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

<u>Condition (B)</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, on dit qu'un ensemble de parties Σ de M vérifie la condition (B) si tout $S \in \Sigma$ est borné (resp. $\overline{S}$, où $S \in \Sigma$ est borné)

<u>Lemme 3</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Soit Σ un ensemble de parties de M, vérifiant la condition (B). Alors $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$ est un A-module topologique.

<u>Preuve</u> : Il suffit de prouver que la loi externe, de domaine d'opérateurs A, sur $\mathbf{H}_A(M,N)$ est continue pour la topologie de la Σ-convergence. La démonstration sera achevée si, étant donnés un voisinage U de 0 dans N, un élément S de Σ, un élément a_0 de A, un élément f_0 de $\mathbf{H}_A(M,N)$, on montre qu'il existe un voisinage O de 0 dans A, un voisinage V de 0 dans N, tels que l'on ait la relation suivante : $(a_0 + O)(f_0 + T(S,V)) \subset a_0.f_0 + T(S,U)$. Dans ce but, prenons un voisinage W de 0 dans N, tel que $3W \subset U$; il existe un voisinage V' de 0 dans N, tel que

$a_0V' \subset W$; soit Ω un voisinage de 0 dans A, tel que $f_0(\Omega S) \subset W$ et soient encore un voisinage Ω' de 0 dans A, et un voisinage V" de 0 dans N, tels que $\Omega'V" \subset W$. Posons alors $O = \Omega \cap \Omega'$ et $V = V' \cap V"$. Pour $a \in A$ et $f \in \mathbf{H}_A(M,N)$, on a l'égalité $a.f - a_0.f_0 = (a - a_0).(f - f_0) + (a - a_0).f_0 + a_0.(f - f_0)$. Si $a - a_0$ appartient à O et $f - f_0$ à T(S,V), on obtient $(a - a_0).(f - f_0)(S) \subset \Omega'V" \subset W$, et $(a - a_0).f_0(S) = f_0((a - a_0).S) \subset f_0(\Omega S) \subset W$, $a_0.(f - f_0)(S) \subset a_0V' \subset W$. On en déduit que $a.f - a_0.f_0 \in T(S,U)$.

Proposition 4 : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors $\mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M,N)$, $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$, $\mathbf{H}_{A,\mathbf{f}}(M,N)$ sont des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Preuve : Une application des lemmes 2 et 3 du ¶ 1, donne la condition (B) pour $\mathbf{k}$ et $\mathbf{K}$. Cette condition est trivialement vérifiée pour $\mathbf{f}$.

Remarque 5 : Soient M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, si Σ est un ensemble de parties de M, stable par réunion finie, alors $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ a un système fondamental de voisinages de 0, constitué par l'ensemble des parties T(S,U), où U parcourt un système fondamental de voisinages de 0 de N et S parcourt Σ.
Cela résulte aisément de la relation $T(S_1 \cup S_2, U_1 \cap U_2) \subset T(S_1,U_1) \cap T(S_2,U_2)$.
La condition de la remarque est satisfaite pour $\Sigma = \mathbf{k}, \mathbf{K}, \mathbf{f}$.

Il est clair que lorsque Σ est stable par réunion et N a un système fondamental de voisinages V(N) de 0, constitué de sous-groupes (resp. N est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ ayant un système fondamental de voisinages V(N) de 0, constitué de sous-modules), alors $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ (resp. $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$) a un système fondamental de voisinages de 0, constitué des sous-groupes (resp. sous-modules) T(S,U), où U parcourt V(N) et S parcourt Σ. Ces ensembles sont nécessairement ouverts, donc fermés.

Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}$ (resp. $\underline{\mathbf{M}}_A$). Pour tout élément x de M, soit l'application évaluation $e_x : \mathbf{H}(M,N) \to N$ (resp. $\mathbf{H}_A(M,N) \to N$) définie par $e_x(f) = f(x)$. L'application e_x est un morphisme de groupes (resp. de A-modules); elle est continue, pour les topologies de la Σ-convergence, pour Σ =

$\mathbf{f}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{K}$; en effet, si O est un voisinage de 0 dans N, on a $e_x^{-1}(O) = T(x,O)$. Il en est de même pour le morphisme $a.e_x$, où $a \in A$, dans le cas où M et N sont des A-modules; en effet, si O est un vosinage de 0 dans N, on a $(a.e_x)^{-1}(O) = T(x, O : a)$. Il en résulte que $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ (resp. $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$) est l'intersection des noyaux des morphismes continus $e_{x+y} - e_x - e_y$ pour $x, y \in M$, (resp. $e_{a.x} - a.e_x$, $e_{x+y} - e_x - e_y$, pour $x, y \in M$ et $a \in A$). On en déduit que, lorsque N est muni d'une topologie séparée, pour une topologie associée à un ensemble $\Sigma = \mathbf{f}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{K}$, le sous-espace $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ (resp. $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$) de $\mathbf{F}_\Sigma(M,N)$ est fermé.

<u>Définition 6</u> : Soit X un espace topologique séparé, on dit que X est un espace de Kelley lorsqu'une partie U de X est ouverte si et seulement si $U \cap C$ est un ouvert de C, pour toute partie compacte C de X.

Il est bien connu que les espaces topologiques localement compacts et les espaces séparés vérifiant le premier axiome de dénombrabilité sont des espaces de Kelley.

<u>Proposition 7</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$, la topologie de la convergence quasi-compacte sur $\mathbf{H}_A(M,N)$ est identique à la topologie compacts-ouverts, c'est à dire à la topologie dont une base d'ouverts est donnée par l'ensemble des intersections finies de parties de la forme $T(K,U)$, où K parcourt $\mathbf{K}_M$ et U varie dans l'ensemble des ouverts de N.

<u>Preuve</u> : Il suffit de plonger $\mathbf{H}_A(M,N)$ dans $\mathbf{F}(M,N)$ et d'utiliser le Théorème 11 du Ch. VII de [12].

<u>Proposition 8</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors :

1) Si N est séparé, il en est de même pour $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$.

2) Si M est un espace de Kelley et si N est séparé complet, alors $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est un espace séparé complet.

<u>Preuve</u> : On utilise les remarques ci-dessus, concernant la fermeture dans $\mathbf{F}_\mathbf{K}(M,N)$ et les Théorèmes 12 et 4, Ch. VII de [12].

<u>Remarque 9</u> : Soit M un groupe Abélien topologique et soit le groupe compact

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le groupe des caractères de M est $\mathbf{H}_{\mathbf{K}}(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On le désigne par Ch(M). Lorsque M est localement compact, on retrouve le groupe classique des caractères. Il est bien connu que dans ce cas Ch(M) est localement compact. Le groupe Ch(M) est compact (resp. discret) si et seulement si M est discret (resp. compact).

<u>Remarque 10</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, au ¶ 1, nous avons défini pour tout élément x de M, un morphisme continu $f_x \in \mathbf{H}_A(A,M)$. L'application $\phi : M \to \mathbf{H}_A(A,M)$, définie par $\phi(x) = f_x$, est un isomorphisme algébrique de A-modules. Si l'on considère $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(A,M)$, on peut définir par transport de structure, à l'aide de ϕ, une topologie sur M. Une base d'ouverts sur M est alors constituée par les ensembles $\bigcap_{i=1}^{n} O_i : K_i$, où n est un entier, O_i un ouvert de M et K_i un quasi-compact de A. De tels ensembles sont ouverts, cf. Remarque 4, ¶ 1. Réciproquement, tout ouvert U de M est de la forme U : { 1 }. Ainsi la topologie de M et la topologie déduite de la convergence quasi-compacte coïncident.

On considère maintenant les morphismes continus entre espaces fonctionnels de morphismes. Nous aurons besoin d'une condition de stabilité pour les morphismes.

<u>Condition (C)</u> : Soit $f : X \to X'$ une application et soit Σ (resp. Σ') un ensemble de parties de X (resp. X'), on dit que f vérifie (C) si pour tout $S \in \Sigma$ il existe $S' \in \Sigma'$ tel que $f(S) \subset S'$.

<u>Proposition 11</u> : Soient $f : M' \to M$ et $g : N \to N'$ des morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, soient Σ (resp. Σ') un ensemble de parties de M (resp. M'), si f vérifie la condition (C), alors l'application $H(f,g) : \mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N) \to \mathbf{H}_{A,\Sigma'}(M',N')$, définie par la relation $H(f,g)(u) = g \circ u \circ f$ est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}$.

Lorsque Σ et Σ' vérifient la condition (B) et f la condition (C), alors H(f,g) est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Ce résultat s'applique en particulier lorsque $\Sigma = \Sigma' = \mathbf{f}, \mathbf{k}, \mathbf{K}$.

<u>Preuve</u> : Soit S' un élément de Σ', en vertu de (C) il existe $S \in \Sigma$ tel que

$f(S') \subset S$; soit O' un voisinage de 0 dans N', il existe un voisinage O de 0 dans N, tel que $g(O) \subset O'$. On en déduit la relation $H(f,g)(T(S,O)) \subset T(S',O')$.

Remarque 12 : Si le morphisme g est injectif et si le morphisme f est dense et N' est séparé (ou si f est surjectif), alors le morphisme $H(f,g)$ est injectif.

Définition 13 : Un morphisme $f : M \to N$ de $\underline{M}$ est dit strict si $M \to f(M)$ est un morphisme ouvert. Il est bien connu que le morphisme f est strict si et seulement si pour tout voisinage V de 0 dans M, il existe un voisinage U de 0 dans N tel que l'on ait $U \cap f(M) \subset f(V)$.

Soit $f : M \to N$ un morphisme de groupes topologiques, la topologie de M est image réciproque de celle de N si et seulement si le morphisme f est strict et $\mathrm{Ker}(f)$ est contenu dans $z(M)$. La preuve utilise les faits suivants : un élément M de $\underline{M}$ vérifie l'axiome O_{III} de [2] et pour tout voisinage fermé V de 0 dans M on a la relation $V + z(M) \subset V$. Ce résultat s'applique a un morphisme complétion.

Condition (F) : Soit $f : X \to X'$ une application et soit Σ (resp. Σ') un ensemble de parties de X (resp. X'), on dit que f vérifie la condition (F) si pour tout élément S' de Σ' il existe un élément S de Σ, tel que $S' \subset \overline{f(S)}$.

Lemme 14 : Soient $f : M' \to M$ et $g : N \to N'$ des morphismes de $\underline{M}_A$, soient Σ (resp. Σ') un ensemble de parties de M (resp. M'). Si les conditions (C) et (F) sont vérifiées par f et si g est un morphisme strict, tel que $\mathrm{Ker}(g)$ soit contenu dans $z(N)$ (c'est à dire : la topologie de N est image réciproque de celle de N'), alors $H(f,g)$ est un morphisme continu et strict de $\underline{M}$.

Preuve : Soient U un voisinage fermé de 0 dans N et S un élément de Σ, la condition (F) et la condition sur g nous assurent de l'existence d'un voisinage fermé U' de 0 dans N' tel que $g^{-1}(U') \subset U$ et d'un élément S' de Σ' tel que $S \subset \overline{f(S')}$. On contrôle alors aisément que $\mathrm{Im}(H(f,g)) \cap T(S',U') \subset H(f,g)(T(S,U))$.

Remarque : La condition sur g est satisfaite par un morphisme strict injectif.

Proposition 15 : Soient $f : M' \to M$ et $g : N \to N'$ des morphismes de $\underline{M}_A$, soient

Σ (resp. Σ') un ensemble de parties de M (resp. M'). On suppose que les conditions (C) et (F) sont satisfaites par f et que g est un morphisme strict et injectif, si le morphisme f est dense et N' est un espace séparé (ou si f est surjectif), alors H(f,g) est un morphisme injectif, strict et continu de $\underline{\mathbf{M}}$. En particulier, si le morphisme g est injectif et strict et le morphisme f est surjectif et propre, le morphisme H(f,g) est continu, strict et injectif pour la topologie de la convergence quasi-compacte.

<u>Preuve</u> : Compte tenu de ce qui précède, il suffit de vérifier la condition (F) pour $\Sigma = \Sigma' = \mathbf{K}$. Or l'image réciproque d'un quasi-compact par un morphisme propre est un quasi-compact.

<u>Remarque 16</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$; si M est un espace séparé complet, alors sur $\mathbf{H}(M,N)$ ou $\mathbf{H}_A(M,N)$ les topologies de la convergence précompacte et de la convergence quasi-compacte sont identiques. En effet N admet un système fondamental de voisinages fermés de 0; de plus, une partie K de M est précompacte si et seulement si $\overline{K}$ est une partie compacte; on constate alors que pour un voisinage fermé O de 0 dans N et une partie K précompacte de M on a l'égalité $T(K,O) = T(\overline{K},O)$.

<u>Proposition 17</u> : Soit B un endofoncteur A-linéaire de $\underline{\mathbf{M}}_A$, (fidèle) tel qu'il existe un morphisme fonctoriel i : Id $\to$ B. Si M et N sont des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$, il existe donc un morphisme de A-modules B : $\mathbf{H}_A(M,N) \to \mathbf{H}_A(B(M),B(N))$, (injectif). Soit Σ (resp. Σ') un ensemble de parties de M (resp. B(M)). On peut alors considérer l'application A-linéaire B : $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N) \to \mathbf{H}_{A,\Sigma'}(B(M),B(N))$.

1) Si i_M vérifie la condition (F), le morphisme B est continu.

2) Si i_M vérifie les conditions (C) et (F), si $Ker(i_N)$ est contenu dans z(N) et si i_N est un morphisme strict, alors le morphisme B est continu et strict.

<u>Preuve</u> : Soient S' un élément de Σ' et O' un voisinage fermé de 0 dans B(N). Il existe un voisinage O de 0 dans N, tel que $i_N(O) \subset O'$. Supposons que i_M vérifie la condition (F), il existe alors $S \in \Sigma$ telle que $S' \subset \overline{i_M(S)}$. Si f est un élé-

ment de $\mathbf{H}_A(M,N)$, tel que $f(S) \subset O$, on obtient $i_N(f(S)) \subset i_N(O) \subset O'$, ou encore $B(f)(i_M(S)) \subset O'$; la continuité de $B(f)$ implique $B(f)(S') \subset O'$; on obtient ainsi $B(T(S,O)) \subset T(S',O')$, c'est à dire que l'application B est continue. Soient maintenant un élément S de Σ et un voisinage fermé V de 0 dans N. Si le morphisme i_N est strict, il existe un voisinage U de 0 dans $B(N)$ tel que l'on ait $U \cap \mathrm{Im}(i_N) \subset i_N(V)$. Si de plus, i_M vérifie la condition (C), il existe un élément S' de Σ' tel que $i_M(S) \subset S'$. On obtient alors pour un élément f de l'ensemble $\mathbf{H}_A(M,N)$, tel que $B(f) \in T(S',U)$, les relations $B(f)(S') \subset U$, $B(f)(i_M(S)) \subset U$; on en déduit que $i_N(f(S)) \subset U \cap \mathrm{Im}(i_N) \subset i_N(V)$; mais alors on voit que l'on a $f(S) \subset V + \mathrm{Ker}(i_N) \subset V + z(N) \subset V$; tout ceci nous montre que $\mathrm{Im}(B) \cap T(S',U) \subset B(T(S,V))$, c'est à dire que le morphisme B est strict s'il est continu.

<u>Proposition 18</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$, de morphismes complétion i_M et i_N. On suppose que M est localement précompact. Alors le morphisme de A-modules $\mu : \mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M,N) \to \mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M^\wedge,N^\wedge)$ défini par $\mu(f) = f^\wedge$ est continu, strict et injectif, si N est séparé. De plus, on a $\mathrm{Ker}(\mu) \subset z(\mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M,N))$.

<u>Preuve</u> : Il suffit d'appliquer les résultats de la proposition précédente au foncteur complétion. La condition (C) est satisfaite par i_M, puisque pour une partie précompacte K de M, l'ensemble $\overline{i_M(K)}$ est compact et puisque les topologies de la convergence compacte et précompacte coïncident sur $\mathbf{H}_A(M^\wedge,N^\wedge)$. Si M est localement précompact, alors $M^\wedge$ est localement compact. D'après la Proposition 10, § 9, Ch. I de [2], une partie compacte K de $M^\wedge$ admet un système fondamental de voisinages compacts. Il en résulte que pour tout voisinage V de K, il existe un ouvert U de $M^\wedge$ tel que $K \subset \overline{U} \subset V$, où $\overline{U}$ est compact. La condition (R) de [4], § 3, N° 4 est donc satisfaite. Ainsi les ensembles $T(\overline{U},V)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts relativement compacts de $M^\wedge$ et V l'ensemble des ouverts de $N^\wedge$, est un système de générateurs de la topologie sur $\mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M^\wedge,N^\wedge)$. On en déduit qu'un système fondamental de voisinages de 0 de $\mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M^\wedge,N^\wedge)$ est fourni par les ensembles $T(U,V)$, où U est un ouvert relativement compact et V

un voisinage fermé de 0. Il suffit alors de vérifier la condition (F) pour $\Sigma = \mathbf{k}$ et Σ' égal à l'ensemble des ouverts relativement compacts. Or il est facile de voir que pour un ouvert U de M^ on a $\overline{U} = \overline{i_M(i_M^{-1}(U))}$, puisque i_M est un morphisme dense.

Corollaire 19 : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Si M est localement précompact, la topologie de la convergence précompacte sur $\mathbf{H}_A(M,N)$ est l'image réciproque de la topologie de la convergence compacte sur $\mathbf{H}_A(M\hat{},N\hat{})$.

Preuve : Le morphisme μ est continu strict et $\mathrm{Ker}(\mu) \subset z(\mathbf{H}_{A,\mathbf{k}}(M,N))$.

Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, on peut considérer son groupe des caractères qui a été défini par $\mathrm{Ch}(M) = \mathbf{H}_{\mathbf{K}}(M,\mathbf{R}/\mathbf{Z})$. De manière plus générale, si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, on peut considérer $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, où Σ est un ensemble de parties de M. On sait que le groupe H(M,N) est un A-module, dont la loi externe est la suivante : si f est un élément de H(M,N) et a un élément de A, le morphisme a.f de H(M,N) est défini par $(a.f)(x) = f(a.x)$, pour $x \in M$. Or $\mathbf{H}(M,N)$ est un sous-A-module de H(M,N). Nous allons voir que dans certains cas $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ est un A-module topologique. Nous introduisons deux conditions, la première étant satisfaite pour $\Sigma = \mathbf{f}, \mathbf{k}, \mathbf{K}$.

Condition (a) : Pour tout élément S de Σ et tout élément a de A, il existe un élément S' de Σ tel que $aS \subset \overline{S'}$.

Condition (A) : Pour tout élément S de Σ il existe un voisinage U de 0 dans A et il existe un élément S' de Σ tels que $US \subset \overline{S'}$.

Proposition 20 : Soient M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$. Soit Σ un ensemble de parties de M vérifiant les conditions (B), (a), (A), alors $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ est un A-module topologique.

Preuve : Soit $S \in \Sigma$ et soit O un voisinage fermé de 0 dans N, si f appartient à $\mathbf{H}(M,N)$, la condition (B) montre qu'il existe un voisinage U de 0 dans M, tel que $Uf \subset T(S,O)$. Soient $S \in \Sigma$ et O un voisinage fermé de 0 dans N, par la condition (a), il existe $S' \in \Sigma$, tel que $aT(S',O) \subset T(S,O)$. De même, soient $S \in \Sigma$

et O un voisinage fermé de 0 dans N, par la condition (A) il existe un élément S' de Σ et un voisinage U de 0 dans A, tels que $UT(S',O) \subset T(S,O)$. Ainsi les axiomes MV de [3] sont satisfaits.

<u>Proposition 21</u> : Soient M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$. Si M est localement compact ou si A est quasi-localement compact, le A-module $\mathbf{H}_{\mathbf{K}}(M,N)$ est topologique.

<u>Preuve</u> : Les conditions (a) et (B) sont trivialement vérifiées. Soit S un élément de $\mathbf{K}$; si A est quasi-localement compact, il existe un voisinage quasi-compact U de 0 dans A; alors US est un élément de $\mathbf{K}$, ce qui montre que la condition (A) est satisfaite. Si M est localement compact, soit V un voisinage compact de 0 dans M; alors l'ensemble $U = V : S$ est un ouvert de A contenant 0; soit S' l'adhérence de US dans V, alors S' est un élément de $\mathbf{K}$ et US est contenu dans S': la condition (A) est satisfaite.

La condition (A) est relative au seul module M. On donne maintenant une condition sur $\mathbf{H}$.

<u>Définition 22</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}$. L'ensemble $\mathbf{H} = \mathbf{H}(M,N)$ est dit équicontinu si pour tout voisinage O de 0 dans N, il existe un voisinage U de 0 dans M, tel que $U \subset \cap\ [\ f^{-1}(O);\ f \in \mathbf{H}\ ]$.

On retrouve la définition usuelle de l'équicontinuité dans le cas des espaces uniformes, cf. [4]. Il est clair que toute partie d'un ensemble équicontinu est équicontinue.

<u>Proposition 23</u> : Soient M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, si $\mathbf{H}(M,N)$ est équicontinu, le A-module $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ est topologique pour tout ensemble Σ vérifiant les conditions (B) et (a).

<u>Preuve</u> : les conditions (a) et (B) entraînent les axiomes MV_I et MV_{II}. Soient S un élément de Σ et O un voisinage de 0 dans N; par équicontinuité de $\mathbf{H}$, il existe un voisinage U de 0 dans M, tel que $U \subset f^{-1}(O)$, pour tout élément f de $\mathbf{H}$. Puisque S est bornée, il existe un voisinage V de 0 dans A, tel que $VS \subset U$;

on en déduit aisément que $VT(S,0) \subset T(S,0)$.

Remarque 24 : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}$ et soit $\mathbf{H} = \mathbf{H}(M,N)$. Si $\mathbf{H}$ est équicontinu, les topologies de la convergence simple, quasi-compacte, précompacte et de la convergence simple sur une partie partout dense D de M coïncident; il suffit d'appliquer le Théorème 1, § 2, N° 4 de [4]. Puisque les conditions (a) et (B) sont vérifiées pour $\mathbf{K}$, si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$, on voit que $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ est un A-module topologique pour $\Sigma = \mathbf{f}, \mathbf{k}, \mathbf{K}$.

Remarque 25 : Soit $f : M \to N$ un morphisme continu, strict et injectif de $\underline{\mathbf{M}}$, si N est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, si f est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. En effet, M est homéomorphe à f(M) et l'application $A \times f(M) \to f(M)$ est continue. On déduit des Propositions 18 et 21 que $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(M,N)$ est un A-module topologique si M est un objet localement précompact de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet séparé de $\underline{\mathbf{M}}$.

Remarque 26 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, on désigne par $\mathbf{B}$ l'ensemble des parties bornées de M. Il est clair que $\mathbf{B}$ est stable par réunion finie, par sous-ensemble et vérifie les conditions (B), (a). Nous en déduisons que $\mathbf{H}_{\mathbf{B}}(M,N)$ est un A-module topologique, s'il est équicontinu ou si $\mathbf{B}$ vérifie (A) dans M.

Soient M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$. On désigne par Φ l'ensemble des morphismes (continus) de A-modules $f_a : M \to M$, pour $a \in A$. On considère sur M un ensemble Σ de parties, vérifiant la condition (B). On peut alors considérer sur Φ la topologie de la Σ-convergence. Soit l'application $\phi : A \to \Phi$, définie par $\phi(a) = f_a$. L'application ϕ est surjective et continue : si S est un élément de Σ et U un voisinage de 0 dans M, on a la relation $\phi^{-1}(T(S,U)) = U : S$; d'autre part, la condition (B) montre que $U : S$ est un voisinage de 0 dans A. Considérons l'application $\mu : \Phi \times \mathbf{H}_\Sigma(M,N) \to \mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, définie par $\mu(f_a,u) = u \circ f_a = a.u$. L'application $A \times \mathbf{H}_\Sigma(M,N) \to \mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, définie par la loi externe de A-modules se factorise en $\mu \circ (\phi \times \mathrm{Id})$; elle est donc continue si μ est continue. Considérons maintenant l'application partielle $\mu_u : \Phi \to \mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, définie par $\mu_u(f_a) = \mu(f_a,u)$, pour un élément u de $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, fixé. Elle est continue :

si S est un élément de Σ et U un voisinage de 0 dans N, on a $\mu_u(T(S,u^{-1}(V)) \subset T(S,V)$. Soit maintenant l'application partielle $\mu_a : \mathbf{H}_\Sigma(M,N) \to \mathbf{H}_\Sigma(M,N)$, définie par $\mu_a(u) = \mu(f_a,u)$, pour $a \in A$ fixé. Un simple calcul montre que $T(AS,U) = \cap [\ \mu_a^{-1}(T(S,U));\ a \in A\ ]$, lorsque $S \in \Sigma$ et U est un voisinage de 0 dans N. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat qui suit.

<u>Proposition 27</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}$. Soit Σ un ensemble de parties de M, contenu dans $\mathbf{B}$. On suppose que Σ vérifie la condition : pour tout $S \in \Sigma$ et tout voisinage U de 0 dans N l'ensemble T(AS,U) est un voisinage de 0 dans $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$. Alors $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ est un A-module topologique.

La condition sur T(AS,U) est satisfaite dans deux cas :

1) Il existe $S' \in \Sigma$ telle que $AS \subset \overline{S'}$.

2) L'ensemble Σ est constitué de sous-modules de M.

<u>Preuve</u> : En vertu du Corollaire 3, N° 1, § 2 de [4] et des considérations précédentes, il suffit de montrer que la famille $\{\ \mu_a\ /\ a \in A\ \}$ est équicontinue, ce qui résulte de l'hypothèse T(AS,U) est un voisinage de 0. Dans le cas de 1), la condition sur T(AS,U) résulte de $T(S',U) \subset T(AS,U)$ pour $S \in \Sigma$ et pour un voisinage fermé U de 0 dans N.

Si A est un anneau quasi-compact (resp. précompact, fini), la proposition précédente montre que $\mathbf{H}_\Sigma(M,N)$ est un A-module topologique pour $\Sigma = \mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{k}$, $\mathbf{f}$).

Nous allons formuler le théorème d'Ascoli dans le cadre de notre étude.

<u>Théorème 28</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On suppose que N est précompact.

1) Soit Σ un recouvrement de M, alors l'espace $\mathbf{H}_{A,\Sigma}(M,N)$ est précompact si et seulement si sur $\mathbf{H}_A(M,N)$ la topologie de la Σ-convergence est identique à la topologie de la convergence simple.

2) Si M est localement compact et si N est un espace compact, $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est compact si et seulement si les topologies de la convergence quasi-compacte et

de la convergence simple coïncident sur $\mathbf{H}_A(M,N)$.

3) Si M est localement compact et si N est un espace compact, alors l'espace $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est compact si et seulement si $\mathbf{H}_A(M,N)$ est équicontinu.

<u>Preuve</u> : La partie 1) est une conséquence immédiate de l'exercice 9), § 2 de [4], puisque N est supposé précompact. En ce qui concerne 2), lorsque M est un espace de Kelley et N un espace compact, la Proposition 8 montre que l'espace uniforme $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est séparé complet. Dans ce cas il est précompact si et seulement si il est compact. On applique alors la partie 1). Montrons 3); si $\mathbf{H}_A(M,N)$ est équicontinu, la remarque 24 montre que les topologies de la convergence simple et de la convergence quasi-compacte coïncident sur $\mathbf{H}_A(M,N)$. L'assertion 2) montre alors que $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est compact. Si l'on suppose que l'espace $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est compact et que M est un espace de Kelley, le Théorème 1 de Gale dans [8] montre que, lorsque F est un fermé de $\mathbf{F}(M,N)$ et V un ouvert de N, l'ensemble $\cap$ [$f^{-1}(V)$; $f \in F$] est un ouvert de M. On en déduit aisément que $\mathbf{H}_A(M,N)$ est équicontinu, puisque $\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N)$ est fermé dans $\mathbf{F}(M,N)$, cf. la remarque 5.

<u>Remarque</u> : les parties 2) et 3) sont vraies si M est un espace de Kelley, tel que $\mathbf{K}$ recouvre M.

Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}$ ou $\underline{\mathbf{M}}_A$, si l'on prend $\Sigma = \{ M \}$, on obtient sur $\mathbf{H}(M,N)$ ou $\mathbf{H}_A(M,N)$ la structure de la convergence uniforme. Un système fondamental de voisinages de 0 est alors fourni par les ensembles T(M,U), où U varie dans un système fondamental de voisinages de 0 de N. Les conditions (a) et (A) sont vérifiées. La condition (B) n'est autre que la condition : M est borné. Elle est évidemment réalisée si M est précompact. Si l'anneau A est borné et M est un A-module de type fini, alors M est borné. Cette dernière condition est satisfaite par des topologies importantes dans la pratique.

<u>Définition 29</u> : On dit que l'on a une topologie linéaire sur

1) un anneau topologique A, si un système fondamental de voisinages de 0 de A est constitué par un ensemble d'idéaux (nécessairement ouverts, donc fermés)

2) un A-module topologique M, si un système fondamental de voisinages de 0 de

M est constitué par un ensemble de sous-modules (nécessairement ouverts, donc fermés).

Définition 30 : On désigne par $\underline{\mathbf{AL}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathbf{A}}$ dont les objets sont les anneaux munis d'une topologie linéaire (linéairement topologisés). Soit aussi A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$, on désigne par $\underline{\mathbf{ML}}_A$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathbf{M}}_A$ dont les objets sont les modules munis d'une topologie linéaire (linéairement topologisés).

Il est immédiat que tout objet de $\underline{\mathbf{AL}}$ est borné. Ainsi pour un anneau A linéairement topologisé, tout module topologique de type fini sur A est borné.

Si A est un anneau linéairement topologisé, un système fondamental V(A) de voisinages de 0, constitués d'idéaux, définit sur un A-module M une topologie linéaire, dite associée, sur M : on prend $V(M) = \{ I.M \ / \ I \in V(A) \}$. Si le A-module M est de type fini, la topologie associée est la topologie canonique sur M, cf. ¶ 1. Pour la topologie associée, tout morphisme de A-modules est continu, et tout ensemble de morphismes $H_A(M,N)$ est équicontinu.

Si A est un anneau linéairement topologisé et si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, borné, la topologie de M est moins fine que la topologie associée. Par conséquent, si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, muni de la topologie canonique et borné, la topologie canonique est identique à la topologie associée.

Il existe une manière canonique de munir un objet A de $\underline{A}$ et les objets de $\underline{M}_A$ de topologies linéaires.

Définition 31 : Soit A un anneau et soit I un A-module injectif. La topologie I-adique est définie de la manière suivante : un système fondamental de voisinages de 0 d'un A-module M est donné par l'ensemble des noyaux des morphismes de A-modules $M \to I^n$, où $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Alors A est un objet de $\underline{\mathbf{AL}}$ et M un objet de $\underline{\mathbf{ML}}_A$. Cette topologie est définie par J. Lambek, dans [13] et [14].

Pour la topologie I-adique, tout morphisme de A-module est continu. Si N est un sous-module de M, la topologie I-adique sur N est induite par la topologie I-adique de M. De plus, si A est un anneau Noethérien local, d'idéal maximal P, soit I l'enveloppe injective du A-module A/P. Lorsque M est un A-module de type fini, les topologies P-adique et I-adique sur M sont les mêmes.

Nous avons considéré sur $\mathbf{H}_A(M,N)$ diverses topologies, liées à des ensembles de parties Σ de M, de nature purement topologique. En ce qui concerne la structure de A-module, la topologie suivante sur H semble mieux adaptée. Nous avons besoin d'une nouvelle notion :

Définition 32 : Soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, on dit que N est quasi-borné si tout sous-module de N, de type fini, est borné.

Si N est un objet borné de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors N est quasi-borné. Si A est un anneau borné, tout objet N de $\underline{\mathbf{M}}_A$ est quasi-borné. C'est le cas si A est muni d'une topologie linéaire (par exemple, si A est compact : cf. le corollaire 9 du ¶ 1) ou si A est muni de la topologie discrète. Pour démontrer ce qui précède, on remarque qu'il existe un morphisme continu $A^n \to M$, lorsque M est un module de type fini.

Soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit M un A-module de présentation finie. Munissons $H_A(M,N)$ de la topologie de la convergence uniforme. Un système fondamental de voisinages de 0 est donc donné par les sous-ensembles T(M,U) de $H_A(M,N)$, où U parcourt un système fondamental V(N) de voisinages de 0 de N. On observe alors que $H_A(M,N)$ est un objet de $\underline{\mathbf{M}}$ pour la topologie précédente : la base de filtre des voisinages de 0 dans $H_A(M,N)$ vérifie les axiomes GV'_I, GV'_{II} de [3], ce fait étant une conséquence immédiate des mêmes axiomes vérifiés par V(N).

Lemme 33 : Soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, quasi-borné et soit M un A-module de présentation finie. Muni de la topologie de la convergence uniforme, $H_A(M,N)$ est un A-module topologique.

Preuve : Les axiomes MV_{II} et MV_{III} sont aisément vérifiés. La validité de MV_I résulte des faits suivants : soit $f \in H_A(M,N)$ et soit $U \in V(N)$, puisque

$f(M)$ est un sous-module de type fini de N, il est borné. Il existe donc un élément O de $V(A)$, tel que $Of(M) \subset U$, d'où l'on déduit que $Of \subset T(M,U)$.

Soit maintenant, un A-module M quelconque; on sait que tout module M est limite inductive d'un système inductif filtrant $\{ M_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ de A-modules de présentation finie. On obtient un isomorphisme de A-modules, associé aux morphismes canoniques de A-modules $j_\lambda : M_\lambda \to M$, à savoir le morphisme canonique $H_A(M,N) \to \varprojlim H_A(M_\lambda,N)$ défini par $f \to (f \circ j_\lambda)$. Si l'on munit la limite projective de la topologie canonique déduite des topologies de la convergence uniforme sur $H_A(M_\lambda,N)$, par transport de structure, on obtient un système fondamental de voisinages de 0 dans $H_A(M,N)$; ce dernier est constitué par les intersections finies d'ensembles $T(j_\lambda(M_\lambda),U)$, où $\lambda \in \Lambda$ et U est un élément de $V(N)$. Le système de A-modules étant inductif filtrant, on voit que finalement $H_A(M,N)$ est muni d'une topologie de la Σ-convergence, où $\Sigma = \{j_\lambda(M_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$. Il est clair que $H_A(M,N)$ est un objet de $\underline{M}$; si N est quasi-borné, alors $H_A(M,N)$ est un objet de $\underline{M}_A$. Si N est un objet quasi-borné de $\underline{ML}_A$, alors $H_A(M,N)$ est un objet de $\underline{ML}_A$: en effet, en choisissant un système $V(N)$, constitué de sous-modules U de N, on constate que les ensembles $T(j_\lambda(M_\lambda),U)$ sont des sous-modules.

Pour montrer que la topologie ainsi obtenue est indépendante de la représentation de M en tant que limite inductive, nous avons besoin des notions suivantes.

<u>Définition 34</u> : Soit P un sous A-module d'un A-module P', on dit que l'injection $P \to P'$ est pure si pour tout A-module M on a un morphisme injectif de A-modules $M \otimes_A P \to M \otimes_A P'$.

On dit qu'une suite exacte $0 \to P \to P' \to Q \to 0$ de A-modules est pure si $P \to P'$ est pure.

Si $\{ M_i \}$ est un système inductif filtrant de A-modules, on sait que la limite inductive Q de ce système peut être considérée comme un quotient P'/P de A-modules, où $P' = \oplus M_i$; alors la suite $0 \to P \to P' \to Q \to 0$ est pure, puisque le produit tensoriel commute aux limites inductives et aux sommes directes.

Nous avons maintenant le résultat classique, pour une suite exacte pure du type ci-dessus : pour tout module M de présentation finie le morphisme de A-modules $H_A(M,P') \to H_A(M,Q)$ est surjectif.

Considérons alors un morphisme de A-modules $f : M \to M'$ et supposons que l'on ait $M = \varinjlim M_\lambda$, $M' = \varinjlim M'_\mu$, pour des limites inductives filtrantes de A-modules de présentation finie. Le morphisme de A-modules $h : H_A(M',N) \to H_A(M,N)$ défini par $h(u) = u \circ f$, est continu; en effet, le résultat ci-dessus sur les suites pures entraîne que, pour tout indice λ, il existe un indice μ tel que $f(j_\lambda(M_\lambda)) \subset j_\mu(M'_\mu)$, puisque M_λ est de type fini; on en déduit aisément que l'on a $h(T(j_\mu(M'_\mu),U) \subset T(j_\lambda(M_\lambda),U))$. Si l'on choisit $f = Id_M$, on voit que la topologie sur $H_A(M,N)$ est indépendante de la représentation choisie.

Résumons ce qui a été obtenu :

<u>Définition 35</u> : Soit A un anneau topologique et soient N un objet quasi-borné de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et M un objet de $\underline{M}_A$. On appelle topologie de la présentation finie sur $H_A(M,N)$, ou encore topologie TPr, la topologie dont un système fondamental de voisinages est donné par les sous-ensembles $T(j_\lambda(M_\lambda),U)$, où $\{ M_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ est un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie, de limite inductive M et où $j_\lambda : M_\lambda \to M$ est le morphisme canonique, les ensembles U variant dans un système fondamental de voisinages de 0 de N.

Alors $H_A(M,N)$ est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Si N est un objet de $\underline{\mathbf{ML}}_A$, il en est de même pour $H_A(M,N)$.

Si $f : M \to M'$ est un morphisme de A-modules, alors le morphisme de A-modules $H_A(M',N) \to H_A(M,N)$ est continu.

Supposons maintenant que N soit un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, tel que A soit borné dans N : pour tout $U \in V(N)$, il existe $V \in V(N)$, tel que $AV \subset U$. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas où N est un objet de $\underline{\mathbf{ML}}_A$. On notera que A est borné dans le A-module B(A).

Si A est précompact, l'anneau A est borné dans tout A-module N.

Supposons donc que A soit borné dans M et considérons l'isomorphisme canonique de A-modules $\Phi : N \to H_A(A,N)$, défini par $\Phi(x) = f_x$. On obtient un isomorphisme topologique : si U est un élément de V(N), on a $\Phi(U) \supset T(A,U)$; or A est borné dans N; il existe donc $V \in V(N)$, tel que $\Phi(V) \subset T(A,U)$. De même, l'isomorphisme canonique de A-modules $\Psi : N^n \to H_A(A^n,N)$ est un isomorphisme topologique : si $U_1,.., U_n \in V(N)$, on a la relation $T(A^n,U_1 \cap \cdots \cap U_n) \subset \Psi(T(A,U_1) \times \cdots \times T(A,U_n))$; soit $V \in V(N)$, il existe des éléments $U_1,.., U_n$ de V, tels que $U_1 + \cdots + U_n \subset V$; on en déduit : $\Psi(\prod_{i=1}^{n} T(A,U_i)) \subset T(A^n,V)$.

Soit N un objet quasi-borné de de $\underline{M}_A$ (resp. $\underline{ML}_A$), on peut définir un foncteur contravariant $F_N : \underline{M}_A \to \underline{M}_A$ (resp. $F_N : \underline{M}_A \to \underline{ML}_A$) en posant $F_N(M) = H_A(M,N)$, où $F_N(M)$ est muni de la topologie TPr.

Si de plus A est borné dans N, pour un A-module de présentation finie M, il existe une suite exacte $A^p \to A^n \to M \to 0$, qui donne une suite exacte de morphismes continus de A-modules $0 \to F_N(M) \to N^n \to N^p$.

Rappelons la définition suivante :

<u>Définition 36</u> : Soit L un objet de $\underline{ML}_A$, on dit que L est linéairement compact, si toute base de filtre constituée de variétés linéaires affines de L admet au moins un point adhérent et si la topologie de L est séparée.

Il est bien connu que tout produit de modules linéairement compacts est un module linéairement compact; on a le même résultat pour une limite projective : une telle limite est un sous-espace fermé d'un produit de modules linéairement compacts; il suffit alors d'appliquer le résultat suivant : si L est linéairement compact, un sous-module de L est linéairement compact si et seulement si il est fermé.

<u>Théorème 37</u> : Soit N un objet quasi-borné de $\underline{M}_A$(resp. $\underline{ML}_A$), tel que A soit borné dans N. Soit M un A-module. Alors, si N est compact (resp. précompact, linéairement compact), il en est de même pour $F_N(M)$.

<u>Preuve</u> : Soit M un objet de $\underline{M}_A$, alors $F_N(M)$ est isomorphe topologiquement à une limite projective de A-modules F(P), où P est un module de présentation finie. On peut donc supposer M de présentation finie. Considérons la suite exacte de morphismes continus $0 \to F(M) \to N^n \to N^p$. Les A-modules N^p, N^p sont compacts (resp. linéairement compacts, précompacts) si N l'est. Puisque le morphisme $A^n \to M$ est un morphisme surjectif, le morphisme $F_N(M) \to N^n$ est strict. Ainsi F(M) est isomorphe topologiquement à son image dans N^n, donc au noyau fermé du morphisme $N^n \to N^p$ (dans le cas compact, ou linéairement compact). Le résultat cherché en découle immédiatement.

<u>Remarque</u> : Lorsque N est compact, ou précompact, les conditions : N est quasi-borné et A est borné dans N sont automatiquement vérifiées. Soit un morphisme $A \to B$ de $\underline{\mathbf{A}}$ où B est un objet de $\underline{\mathbf{AL}}$, il est clair que A est borné dans le A-module topologique B. De plus, B est borné : soit J un idéal de B au-dessus d'un idéal I de A et supposons que J soit un élément d'un système fondamental de voisinages de 0 de B; la relation $I \subset J :_A B$ montre que $J :_A B$ est un idéal ouvert de A, puisqu'il en est ainsi de l'idéal ouvert I.

Soit A un objet de $\underline{\mathbf{AL}}$, muni d'une topologie T. Les idéaux fermés I de A tels que A/I soit artinien, forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie linéaire TSLC, moins fine que T. On désigne par SL(A) le séparé complété de A, pour cette topologie. Alors SL(A) est un anneau strictement linéairement compact, cf. [1 , Ch. III, § 2, Ex. 23]. Le morphisme canonique $A \to SL(A)$ fait de SL(A) un A-module topologique strictement linéairement compact, en vertu de [1; Ch. III, § 2, Ex. 19], donc linéairement compact.

<u>Corollaire 38</u> : Soit A un anneau et soit M un A-module, alors :

1) Si A est un objet de $\underline{\mathbf{A}}$, le A-module $F_{B(A)}(M)$ est compact.

2) Si A est un objet de $\underline{\mathbf{AL}}$, le A-module $F_{SL(A)}(M)$ est linéairement compact.

<u>Preuve</u> : On applique le théorème précédent aux A-modules bornés B(A), SL(A), puisque A est borné dans ces A-modules, cf. la remarque ci-dessus.

Corollaire 39 : Soit N un objet quasi-borné de $\underline{\mathbf{M}}_A$ (resp. $\underline{\mathbf{ML}}_A$), tel que A soit borné dans N. Supposons N compact ou précompact (resp. linéairement compact). Soit M un A-module de présentation finie. Alors $\mathbf{H}_A(M,N)$ est compact ou précompact (resp. linéairement compact) pour la topologie TPr.

Preuve : D'après [4 ; § 1, N° 6, Théorème 2], le sous-espace $\mathbf{F}(M,N)$ de $F(M,N)$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme, donc $\mathbf{H}_A(M,N)$ est fermé dans $F_N(M)$.

Remarque : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, tel que $M = \varinjlim M_\lambda$, où les A-modules M_λ sont de présentation finie; pour un indice λ, soit $j_\lambda : M_\lambda \to M$ le morphisme canonique. On suppose que les modules M_λ sont des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et que M est muni de la topologie finale, associée à l'ensemble des applications j_λ. Alors l'isomorphisme $H_A(M,N) \to \varprojlim H_A(M_\lambda,N)$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$, pour la topologie TPr, induit un isomorphisme topologique $\mathbf{H}_A(M,N) \to \varprojlim \mathbf{H}_A(M_\lambda,N)$: en effet, un morphisme $f : M \to N$ est continu si et seulement si $f \circ j_\lambda$ est continu, pour tout indice λ. Dans ce cas, $\mathbf{H}_A(M,N)$ est compact (resp. linéairement compact, précompact) s'il en est de même pour N, cf. le corollaire 39. On notera, toutefois, que les conditions de la remarque sont rarement vérifiées : une topologie finale , associée à des morphismes de $\underline{\mathbf{M}}_A$, n'est pas en général compatible avec la structure de A-module.

Nous allons considérer les foncteurs $\mathbf{H}_A(?,N)^2$ ou F^2, de manière à obtenir un morphisme de M dans son N-bidual. Auparavant, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 40 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit N un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, tel que A soit borné dans N. Tout sous-A-module de type fini de $\mathbf{H}_A(M,N)$ est équicontinu.

Preuve : Supposons que le sous-module L soit engendré par $f_1,\ldots, f_n$. Pour tout voisinage V de 0 dans N, soit U un élément de V(N), tel que $nU \subset V$. Puisque A est borné dans N, il existe un élément O de V(N) tel que $AO \subset U$. On en déduit que $f_1^{-1}(O) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(O) \subset \cap [\ f^{-1}(V)\ ;\ f \in L\ ]$.

<u>Théorème 41</u> : Soient M et N des objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On considère le morphisme de A-modules $\sigma_M : M \to H_A(H_A(M,N),N)$, défini par $\sigma_M(m)(f) = f(m)$, pour $m \in M$ et $f \in H_A(M,N)$.

1) Si M est un espace de Kelley, le morphisme $\boldsymbol{\sigma}_M : M \to \mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(\mathbf{H}_{A,\mathbf{K}}(M,N),N)$, déduit de σ_M est continu.

2) Si A est borné dans N, le morphisme de A-modules $s_M : M \to F_N(\mathbf{H}_A(M,N))$, déduit de s_M, est continu, pour la topologie TPr sur $F_N(\mathbf{H}_A(M,N))$.

<u>Preuve</u> : La partie 1) n'est autre que [8 ; Théorème 2], appliqué à la situation. Montrons 2); un voisinage de 0 dans $F(\mathbf{H}_A(M,N))$, pour la topologie TPr est de la forme $T(L,V)$, où $V \in V(N)$ et L est un sous-module de type fini de $\mathbf{H}_A(M,N)$; en vertu du lemme 40, il existe un voisinage U de 0 dans M, tel que U soit contenu dans $f^{-1}(V)$, pour tout $f \in L$; on contrôle alors aisément que $s_M(U) \subset T(L,V)$.

<u>Remarque</u> : Si l'on a $\mathbf{H}_A(M,N) = H_A(M,N)$, alors σ_M est continu. C'est le cas, par exemple, si M et N sont munis d'une topologie associée à une topologie P-adique sur A, ou munis de la topologie I-adique, I étant un A-module injectif.

Plus généralement, on a un morphisme de A-modules $F_N^2(M) \to F_N(\mathbf{H}_A(M,N))$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(s_M)$ contient $\mathrm{Ker}(\sigma_M)$. Ce dernier sous-module de M n'est autre que le rejet de N dans M, désigné par $\mathrm{Rej}_M(N)$. Il est clair que $\mathrm{Rej}_M(N)$ est égal à $\cap$ [Kerf; $f \in H_A(M,N)$]. Nous appelons rejet topologique de N dans M, le sous-module $\mathbf{Rej}_M(N) = \cap$ [$\mathrm{Ker}(f)$; $f \in \mathbf{H}_A(M,N)$] $= \mathrm{Ker}(s_M)$.

<u>Corollaire 42</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit $b_M : M \to B(M)$ le morphisme canonique de M dans son compactifié de Bohr. Il existe alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "b_M"] \arrow[dr, "s_M"'] & B(M) \arrow[d] \\ & F_{B(A)}(\mathbf{H}_A(M,B(A))) \end{tikzcd}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(b_M)$ est contenu dans $\mathbf{Rej}_M(B(A))$. En particulier, le morphisme b_M est injectif si $\mathbf{Rej}_M(A) = 0$ (par exemple, si M est un A-module topologiquement reflexif) et si le morphisme $A \to B(A)$ est injectif.

<u>Preuve</u> : En vertu du Corollaire 38, le A-module topologique $F_{B(A)}(\mathbf{H}_A(M,B(A)))$ est compact et s_M est un morphisme continu. On en déduit l'existence du diagramme commutatif. Il en découle que $\mathrm{Ker}(b_M)$ est contenu dans $\mathbf{Rej}_M(B(A))$.

Soit un élément f de $\mathbf{H}_A(M,A)$, la fonctorialité de B nous montre qu'il existe un diagramme commutatif de $\underline{\mathbf{M}}_A$:

$$\begin{array}{ccc} M & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(M) & \to & B(A) \end{array}$$

Il existe donc un élément g de $\mathbf{H}_A(M,B(A))$, tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

<u>Remarque</u> : Supposons les objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$ munis d'une topologie, telle que l'on ait $H_A(?,?) = \mathbf{H}_A(?,?)$, par exemple une topologie adique. Dans ce cas, pour un objet M de $\underline{\mathbf{M}}_A$, on a $\mathrm{Rej}_M(A) = \mathbf{Rej}_M(A)$. Il en résulte que pour tout module projectif M, le morphisme b_M est injectif si le morphisme $A \to B(A)$ est injectif.

Grâce aux résultats obtenus, nous pouvons généraliser la théorie des caractères aux A-modules.

Si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, son groupe des caractères est $\mathrm{Ch}(M) = \mathbf{H}_{\mathbf{K}}(M,\mathbf{R}/\mathbf{Z})$.

En fait, comme le montre la proposition 21, si M est un A-module localement compact, Ch(M) est un A-module topologique. En recopiant les résulats de [5], on obtient sans peine le théorème de dualité de Pontryagin.

Nous dirons qu'une suite d'objets $0 \to M \to N \to P \to 0$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$ est topologiquement exacte si elle est exacte dans $\underline{M}_A$ et si les morphismes $M \to N$ et $N \to P$ sont stricts et continus.

<u>Proposition 43</u> : Soit A un anneau topologique, soit $\underline{\mathbf{LC}}_A$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathbf{M}}_A$, constituée des objets localement compacts, alors :

1) Ch est un foncteur contravariant de $\underline{\mathbf{LC}}_A$ dans elle-même. Il est exact.

2) Le morphisme canonique $M \to Ch(Ch(M))$ est un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, fonctoriel.

3) Si M est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, alors M est compact (resp. discret) si et seulement si Ch(M) est discret (resp. compact).

Une construction classique du compactifié de Bohr dans $\underline{\mathbf{M}}$ se fait à l'aide du foncteur Ch. On peut imiter cette construction pour les A-modules M, à condition que Ch(M), muni de la topologie discrète, soit un A-module topologique. La seule condition à vérifier est : pour tout élément $f \in Ch(M)$, il existe un ouvert U de A, tel que $U.f = 0$, id est $f^{-1}(0) :_A M$ est un idéal ouvert de A. Cette condition est évidemment réalisée, lorsque A est muni de la topologie discrète, pour tout A-module M.

Nous désignons par $Ch(M)_d$ le groupe $\mathbf{H}(M,\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, muni de la topologie discrète.

Lemme 44 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On suppose que M est précompact et séparé, alors le morphisme de groupes $Ch(B(M)) \to Ch(M)_d$ est un isomorphisme topologique pour la topologie discrète. Il en résulte que Ch(M), muni de la topologie discrète, est un A-module topologique.

Preuve : Le morphisme $M \to B(M)$ n'est autre que le morphisme $M \to M\hat{}$. Il est donc continu injectif, dense et strict. Le principe de prolongement des identités montre que $Ch(B(M)) \to Ch(M)$ est injectif. Puisque $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est un groupe séparé complet, car compact, par densité du morphisme $M \to B(M)$, on voit que le morphisme $Ch(B(M)) \to Ch(M)$ est surjectif.

Désignons par $\underline{\mathbf{C}}$ la collection des objets M de $\underline{\mathbf{M}}_A$, tels que $\mathbf{H}(M,\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ muni de la topologie discrète, soit un A-module topologique. La collection $\underline{\mathbf{C}}$ contient les objets précompacts séparés et est égale à $\underline{\mathbf{M}}_A$ si A est muni de la topologie discrète.

Théorème 45 : Soit M un élément de $\underline{\mathbf{C}}$, localement compact. Alors le compactifié de Bohr de M est le A-module topologique $Ch(Ch(M)_d)$. De plus le morphisme $M \to Ch(Ch(M)_d)$ est injectif.

Preuve : Si M est un élément de $\underline{\mathbf{C}}$, le A-module $Ch(M)_d$ est topologique. La proposition 43 montre que $Ch(Ch(M)_d)$ est un A-module topologique compact. Soit i le morphisme identique $i : Ch(M)_d \to Ch(M)$, c'est un morphisme de A-modules bijectif et continu, entre modules localement compacts. Considérons le morphisme de A-modules $Ch(i) : Ch(Ch(M)) \to Ch(Ch(M)_d)$, il est injectif puisque i est surjectif; en vertu de [5 ; Ch. II, § 1, Cor. 6], puisque i est injectif, Ch(i) est dense. On obtient donc un morphisme composé : $M \to Ch(Ch(M)) \to Ch(Ch(M)_d)$, où le premier morphisme est un isomorphisme. Finalement, on a obtenu un morphisme dense injectif $M \to Ch(Ch(M)_d)$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$, qui n'est autre que le canonique. Si nous remplaçons M par un module compact P, le morphisme $P \to Ch(Ch(P)_d) = Ch(Ch(P))$ est un isomorphisme. En observant le diagramme commutatif, déduit d'un morphisme $M \to P$, où P est un A-module compact :

$$\begin{array}{ccc} M & \to & Ch(Ch(M)_d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \to & Ch(Ch(P)_d) \end{array}$$

on déduit le reste de la preuve.

Remarque : Dans $\underline{\mathbf{M}}$ le compactifié de Bohr s'obtient dans tous les cas, par la méthode précédente : il est facile de voir que Ch(M) et $Ch(B_A(M))$ sont isomorphes algébriquement, donc isomorphes topologiquement pour la topologie discrète, donc nécessairement $B(M) = Ch(Ch(M)_d)$

¶ 3 - PROPRIETES DU COMPACTIFIE DE BOHR

On se propose, tout d'abord, de donner le calcul du compactifié dans certaines situations assez générales.

Proposition 1 : Soit $f : M \to N$ un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On suppose que f est injectif, dense et strict. Alors $B_A(N)$ est un compactifié de Bohr de M. Le résultat analogue est vrai dans $\underline{\mathbf{A}}$.

Preuve : On peut appliquer [17; Théorème 13.1]; en effet, on peut considérer que M est un sous-module de N. De plus, si $u : M \to P$ est un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, où P est compact, alors P est séparé complet. Il existe alors une factorisation unique de u à travers f.

Proposition 2 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit une factorisation du morphisme canonique $b_M : M \to B_A(M)$, à travers un morphisme dense $d : M \to M'$ de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Alors le morphisme canonique $B_A(M) \to B_A(M')$ est un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Le résultat analogue est vrai pour $\underline{\mathbf{A}}$.

Preuve : On constate que l'on a un diagramme commutatif de $\underline{\mathbf{M}}_A$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[dr] & B_A(M') \arrow[d] \\ & & B_A(M) \end{tikzcd}$$

Soit $M \to P$ un morphisme, où P est un module compact. Il se factorise à travers b_M. On en déduit une factorisation de $M \to P$, à travers le morphisme dense $M \to B_A(M')$. Le résultat en découle.

Corollaire 3 : Le morphisme b_M se factorise à travers les morphismes denses qui suivent :

1) Le morphisme canonique $M \to M^\wedge$ de M dans son séparé complété.

2) Le morphisme $M \to M/\mathrm{Ker}(b_M)$

3) Le morphisme $M \to s(M)$

On en déduit que $B_A(M) = B_A(M^\wedge) = B_A(M/\mathrm{Ker}(b_M)) = B_A(s(M))$.

Les mêmes résultats sont vrais dans $\underline{\mathbf{A}}$. Si I_C est composante connexe de 0 dans A, le morphisme $A \to A/I_C$ est dense et se factorise à travers $A \to B(A)$. On a donc $B(A) = B(A/I_C)$.

Preuve : Pour 1), 2), 3), on utilise la propriété universelle d'un séparé complété. Soit $b : A \to B(A)$ le morphisme canonique, on a $b(I_C) = 0$, puisque B(A) est totalement discontinu.

Proposition 4 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On suppose que le compactifié de Bohr B(M) du groupe Abélien M vérifie $M \to B(M)$ est strict et injectif. On suppose aussi que le morphisme $A \to B(A)$ est strict et injectif. Alors B(M) est le compactifié de Bohr dans $\underline{\mathbf{M}}_A$ et B(M) est un objet de $\underline{\mathbf{M}}_{B(A)}$.

Preuve : Considérons l'application composée $A \times M \to M \to B(M)$, où la première application est la multiplication par les scalaires. Elle est évidemment $\mathbb{Z}$-bilinéaire continue. Le morphisme $A \times M \to B(A) \times B(M)$ est strict, injectif et dense. En vertu de [3 ; Ch. 3, § 6, Théorème 1], on obtient une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire continue $B(A) \times B(M) \to B(M)$, prolongeant $A \times M \to M$. On obtient ainsi une loi externe continue sur M de domaine d'opérateurs A. Le théorème de prolongement des identités donne les axiomes manquants de la structure de B(A)-module. De plus, $M \to B(M)$ est un morphisme de A-modules. La proposition 1 permet de conclure.

La proposition précédente fait intervenir la condition $M \to B(M)$ est un morphisme strict; il est donc intéressant d'examiner cette condition.

Proposition 5 : Soit b un morphisme de compactification de Bohr dans $\underline{\mathbf{M}}_A$ ou $\underline{\mathbf{A}}$. Soit X un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ ou $\underline{\mathbf{A}}$, soit la factorisation $X \to X/\mathrm{Ker}(b) = X' \to B(X)$. Alors :

1) Le morphisme b est strict si et seulement si le morphisme $X' \to B(X) = B(X')$ est strict.

2) Le morphisme b est strict si et seulement si X' est précompact.

Preuve : La partie 1) résulte du fait que le morphisme $X \to X'$ est ouvert et surjectif. On peut donc supposer le morphisme b injectif. Supposons b injectif et strict. Une remarque suivant la définition 13 du ¶ 2, montre que la topologie de X' est image réciproque de celle de B(X), puisque $Ker(f) \subset z(X)$. Dans ce cas, la topologie de Bohr de X' est égale à la topologie de X'. Il en découle que $B(X') = B(X)$, en vertu du corollaire 3, n'est autre que le complété $X'^{\wedge}$. Ainsi, X' est précompact. Réciproquement, si X' est précompact, nous savons que $B(X') = B(X) = X'^{\wedge}$. Puisque le morphisme $X' \to X'^{\wedge}$ est strict, la réciproque est démontrée.

Remarques : Le noyau de b n'est autre que l'intersection des voisinages de 0, pour la topologie de Bohr. Dans le cas d'un élément A de $\underline{\mathbf{A}}$, ce noyau est égal à l'intersection des idéaux ouverts I de A, tels que A/I soit un anneau fini, cf. ¶ 1.

Si A est précompact, il en est de même pour A'.

Soit A un anneau muni d'une topologie linéaire. Si A est linéairement compact (resp. strictement linéairement compact) le morphisme $A \to B(A)$ est surjectif (resp. surjectif et strict). En effet, en vertu des exercices [1 ; Ch. 3, § 2], puisque B(A) est un A-module linéairement topologisé, le morphisme $A \to B(A)$ a une image fermée (resp. a une image fermée et est strict). Dans le dernier cas A' est égal à B(A).

Supposons A localement compact , si le morphisme $A' \to B(A)$ est strict, c'est un isomorphisme topologique. En effet, son image B dans B(A) est un sous-espace localement compact, dense, de B(A). Un théorème classique affirme que B est ouvert dans B(A), donc fermé. Il en résulte que B = B(A). On a donc encore A' = B(A).

Si A est un anneau muni de la topologie discrète, il est localement compact. Mais $A' \to B(A)$ n'est pas strict en général, sinon la topologie de A' serait la topologie de Bohr. Si $A = \mathbb{Z}$, on a $A' = \mathbb{Z}$ et $\{0\}$ ne contient pas d'idéal I de A, tel que A/I soit fini, cf. ¶ 1, Théorème 29.

<u>Proposition 6</u> : Soit $M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} P \to 0$, une suite exacte de $\underline{M}_A$ (i. e. i et p sont des morphismes stricts et continus et la suite est exacte dans $\underline{M}_A$). Alors la suite $B_A(M) \to B_A(N) \to B_A(P) \to 0$ est exacte dans $\underline{M}_A$.

<u>Preuve</u> : Désignons respectivement $B_A(M) \to B_A(N)$ et $B_A(N) \to B_A(P)$ par j et q. Ces morphismes de A-modules sont continus et stricts, car $B_A(M)$ est compact, de même que $B_A(N)$ et $B_A(P)$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{p} & P \\ b_M \downarrow & & b_N \downarrow & & b_P \downarrow \\ B_A(M) & \xrightarrow[j]{} & B_A(N) & \xrightarrow[q]{} & B_A(P) \end{array}$$

Le morphisme q o b_N est dense, car p est strict et surjectif, donc le morphisme q est dense et fermé, c'est-à-dire surjectif. Une vérification montre que $b_N(Ker(p)) = b_N(Im(i)) \subset Ker(q)$. De j o $b_M(M) \subset Ker(q)$, on déduit que $Im(j) = j(\overline{b_M(M)}) \subset Ker(q)$, puisque Ker(q) est fermé et j est fermée. Puisque Im(j) est fermé, le module $B_A(N)/Im(j)$ est compact. Puisque i et p sont des morphismes stricts, on peut supposer que M est sous-module de N et que P = N/M. On a alors $b_N(M) \subset j(B_A(M))$. Il existe donc un morphisme continu $P \to B_A(N)/Im(j)$; on en déduit une factorisation $P \to B_A(P) \to B_A(N)/Im(j)$. De b_N o i = j o b_M et du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N & \to & B_A(N) \\ \downarrow & & \downarrow g \\ P & \to & B_A(N)/Im(j) \\ & \searrow & \nearrow h \\ & B_A(P) & \end{array}$$

on déduit que h o q o b_N = g o b_N. Puisque b_N est un morphisme dense, on voit que h o q = g. Il en résulte que Ker(q) est contenu dans Im(j).

<u>Corollaire 7</u> : Soit N un objet de $\underline{M}_A$ et soit M un sous-A-module de N, alors $B_A(N/M)$ est égal à $B_A(N)/\overline{b_N(M)}$.

Preuve : Avec les notations de la proposition précédente, où $P = N/M$, on obtient $B_A(N/M) = B_A(N)/\mathrm{Im}(j)$. De $\mathrm{Im}(j) = j(\overline{b_M(M)}) = \overline{b_N(M)}$, on déduit le résultat.

Proposition 8 : Soit $\{ M_i \}_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{\mathbf{M}}_A$. On désigne par S la somme directe de la famille et par P le produit. On a alors :

1) $B_A(S) = B_A(P)$

2) Si l'ensemble d'indices I est fini, le morphisme de compactification de Bohr de P est donné par le morphisme canonique $P = \prod_{i \in I} M_i \to \prod_{i \in I} B_A(M_i) = P'$.

3) Soit, pour tout $i \in I$, le noyau N_i de $M_i \to B_A(M_i)$. Si pour tout indice i, le module M_i/N_i est précompact, alors la conclusion de 2) est encore vraie.

Preuve : Il est bien connu que le morphisme de A-modules $S \to P$ est continu, injectif, strict et dense, cf. [3 ; Ch. 3, § 2, Proposition 25]. La conclusion de 1) résulte aussitôt de la proposition 1. Supposons que I soit égal à $\{ 1,\dots,n \}$. Dans ce cas $S = P$ est égal à $M_1 \times \cdots \times M_n$. Désignons par j_i le morphisme canonique continu $M_i \to P$. Soit $P \to C$ un morphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, où C est un module compact. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \to & B_A(M_i) \\ {\scriptstyle j_i}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle g_i} \\ P & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

Or S est la somme des modules $M_1,\dots, M_n$ dans $\underline{\mathbf{M}}_A$; soit $g : P' \to C$ le morphisme somme des morphismes g_i. On contrôle sans difficulté la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} P & \to & P' \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow {\scriptstyle g} \\ & & C \end{array}$$

Ainsi 2) est démontrée, puisque le morphisme $P \to P'$ est dense. Montrons 3), pour un ensemble I quelconque. L'hypothèse de précompacité revient à dire que les morphismes $M'_i = M_i/N_i \to B_A(M_i)$ sont injectifs, stricts, continus et denses , cf. la proposition 5. Il en est de même pour le morphisme canonique produit. La proposition 1 montre que le morphisme $\prod_{i\in I} M'_i \to \prod_{i\in I} B_A(M'_i)$ est un morphisme de compactification de Bohr. Avec les notations de 2), soit un morphisme $f : P \to C$ dans $\underline{M}_A$, où C est un module compact et soit le morphisme associé $g_i : B_A(M_i) \to C$. De l'existence de g_i résulte que le morphisme continu $\bigoplus_{i\in I} N_i \to \prod_{i\in I} N_i \to C$ a une image nulle. Puisque le premier morphisme est dense, il en résulte que $f(\prod_{i\in I} N_i) = 0$. On obtient alors une factorisation de $P \to C$ à travers le morphisme $P \to \prod_{i\in I} M'_i$. Pour terminer, on utilise le morphisme de compactification exhibé ci-dessus.

Remarque : Nous n'avons su démontrer ou infirmer l'analogue de 2) dans la proposition précédente, pour la catégorie $\underline{A}$. Voici ce qui a pu être obtenu. Soient $A_1,.., A_n$ des anneaux topologiques et soit $p_i : \prod_{j=1}^{n} A_j \to A_i$ le morphisme projection, il existe un diagramme commutatif dans $\underline{A}$:

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times \cdots \times A_n & \xrightarrow{b} & B(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ p_i \downarrow & & \downarrow B(p_i) \\ A_i & \to & B(A_i) \end{array}$$

Soit $b_i : A_i \to B(A_i)$ le morphisme compactification, alors le morphisme $\prod b_i$ se factorise en $\prod b_i = f \circ b$, où l'on a $f : B(\prod A_i) \to \prod B(A_i)$. On en déduit aisément que $f = \prod B(p_i)$. D'autre part, les morphismes $c = \prod b_i$ et b ont même noyau, égal à $\cap$ [$I_1 \times \cdots \times I_n$; I_i idéal ouvert de A_i et $\mathrm{Card}(A_i/I_i)$ fini]. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(b) = \{0\}$. De plus, f est surjectif.

Remarque : Une somme directe de modules compacts n'est un module compact que lorsque cette somme est composée d'un nombre fini de modules : en effet, si S est la somme et P le produit d'une famille de modules, le morphisme $S \to P$ est dense, injectif. Si les modules de la famille sont compacts, ainsi que S, on obtient alors $S = P$.

<u>Proposition 9</u> : Soit A un anneau topologique, alors le compactifié de Bohr B(A) dans $\underline{\mathbf{A}}$ n'est autre que le compactifié de Bohr $B_A(A)$ dans $\underline{\mathbf{M}}_A$. La structure de A-module de $B_A(A)$ est définie par le morphisme b : A → B(A).

<u>Preuve</u> : Il est clair, qu'étant donnée une topologie sur un anneau A, ce dernier est un anneau topologique si et seulement si il est un A-module topologique. Donc la topologie de Bohr sur A, en tant qu'anneau, est la même que la topologie de Bohr sur A, en tant que A-module. Si $A^\wedge$ est le séparé complété de A, alors $B_A(A)$ est muni d'une structure de $A^\wedge$-module qui définit, à travers le morphisme d'anneau $A \to A^\wedge$, la structure de A-module de $B_A(A)$. Désignons par B les groupes Abéliens égaux $B_A(A)$ et B(A). La loi externe e de A-module de B prolonge celle du A-module A, puisqu'il en est ainsi pour le $A^\wedge$-module B. On obtient donc le diagramme commutatif (1) suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \rightarrow & A \\ {\scriptstyle Id_A \times b} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle b} \\ A \times B & \underset{e}{\rightarrow} & B \end{array} \quad (1) \qquad (2) \quad \begin{array}{ccc} A \times A & \rightarrow & A \\ {\scriptstyle Id_A \times b} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle b} \\ A \times B & \underset{f}{\rightarrow} & B \end{array}$$

La loi externe f de A-module définie par b sur B, prolonge encore celle du A-module A, parce que b est un morphisme d'anneaux. On obtient donc le diagramme commutatif (2), ci-dessus. Puisque le morphisme $Id_A \times b$ est dense, le théorème de prolongement des identités donne e = f.

<u>Thèorème 10</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Alors $B_A(M)$ est muni d'une loi externe $\bullet$, de domaine d'opérateurs B(A), induisant sur M, à travers le morphis- d'anneaux b : A → B(A), la loi externe de A-module de M. Pour cette loi externe $B_A(M)$ est un B(A)-module, en général non topologique. Tout morphisme $f \in \mathbf{H}_A(M,N)$ induit un morphisme de B(A)-modules, continu, $B(f) \in \mathbf{H}_A(B_A(M),B_A(N))$.

<u>Preuve</u> : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et soit $x \in B_A(M)$. Il existe un morphisme continu de A-modules $f_x : A \to B_A(M)$, défini par $f_x(a) = a.x$. Puisque B(A) est égal à $B_A(A)$, il existe un morphisme continu de A-modules $f'_x : B(A) \to B_A(M)$,

unique tel que $f'_x \circ b = f_x$. Si β est un élément de $B(A)$, on définit la loi externe par $\beta\bullet x = f'_x(\beta)$. Puisque f'_x est un morphisme de A-modules, on obtient $(\beta + \beta')\bullet x = \beta\bullet x + \beta'\bullet x$. Soit $x' \in B_A(M)$; de $f_x + f_{x'} = f_{x+x'}$, on déduit $\beta\bullet(x + x') = \beta\bullet x + \beta\bullet x'$, pour $\beta \in B(A)$. De $f'_x \circ b = f_x$, on déduit que l'on a $a.x = b(a)\bullet x$, pour $(a,x) \in A \times B_A(M)$. Avant de vérifier l'axiome d'associativité mixte, nous regardons ce qui se passe pour un élément f de $\mathbf{H}_A(M,N)$. Soit x un élément de $B_A(M)$ et posons $y = B(f)(x)$. Des relations suivantes : $f'_x \circ b = f_x$, $f'_y \circ b = f_y$ et $B(f) \circ f_x = f_y$, il découle que $B(f) \circ f'_x \circ b = f'_y \circ b$; puisque b est un morphisme dense, on voit que $B(f) \circ f'_x = f'_y$. Pour un élément β de $B(A)$, on a donc $B(f)(\beta\bullet x) = \beta\bullet B(f)(x)$. Considérant encore un élément x de $B_A(M)$, on obtient un diagramme commutatif de $\underline{\mathbf{M}}_A$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_x} & B_A(M) \\ b \downarrow & & \downarrow b' \\ B(A) & \xrightarrow[B(f_x)]{} & B_A^2(M) \end{array}$$

où b' est un isomorphisme topologique de $\underline{\mathbf{M}}_A$ et un morphisme pour la loi externe $\bullet$, puisque $b' = B(b_M)$; il en est donc de même pour b'^{-1}. L'unicité de f'_x donne $f'_x = b'^{-1} \circ B(f_x)$, donc f'_x est un morphisme pour la loi externe $\bullet$. Montrons maintenant que la loi externe $\bullet$ sur $B(A) = B_A(A)$ n'est autre que la multiplication de $B(A)$. Soit β un élément de $B(A)$, on a alors $f'_\beta \circ b = f_\beta$; soit $g_\beta : B(A) \to B(A)$, définie par $g_\beta(\alpha) = \alpha\beta$; cette application est continue, car $B(A)$ est un anneau topologique. Si $a \in A$, on obtient les relations $f'_\beta(b(a)) = a.\beta$ et $g_\beta(b(a)) = b(a)\beta = a.\beta$, en vertu de la proposition 9. De $f'_\beta \circ b = g_\beta \circ b$ découle $f'_\beta = g_\beta$; bref, loi externe et multiplication coïncident sur $B(A)$. En reprenant les considérations ci-dessus, on voit que pour α, $\beta \in B(A)$ et $x \in B_A(M)$, on obtient :

$\alpha\bullet(\beta\bullet x) = \alpha\bullet f'_x(\beta) = f'_x(\alpha\bullet\beta) = f'_x(\alpha\beta) = (\alpha\beta)\bullet x$.

<u>Remarque</u> : Nous remplaçerons désormais la notation $\bullet$ par . . On notera que sur $B(A)$, la loi externe ainsi définie coïncide avec la multiplication.

Avec ces notations, le morphisme f'_x n'est autre que l'homothétie $B(A) \to B_A(M)$, définie par $\alpha \to \alpha.x$.

Lorsque $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$, on notera que la loi externe sur $B_A(M)$ est obligatoirement celle donnée par le théorème précédent.

<u>Lemme 11</u> : Soit M un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) Le B(A)-module $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$.

2) Pour tout voisinage V de 0 dans $B_A(M)$, il existe un voisinage U de 0 dans B(A), tel que $UB_A(M) \subset V$ (id est $B_A(M)$ est borné sur B(A)) et tout élément de $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ est un morphisme de B(A)-modules.

3) L'ensemble $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ est équicontinu.

4) Muni de la topologie $\mathbf{K}$, l'ensemble $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ est compact.

<u>Preuve</u> : Considérons l'application $m : B(A) \times B_A(M) \to B_A(M)$ définie par :

$$m(\beta,x) = f'_x(\beta)$$

Elle se factorise en :

$$B(A) \times B_A(M) \to B(A) \times \mathbf{H}_A(A,B_A(M)) \to B(A) \times \mathbf{H}_A(B(A),B_A(M)) \to B_A(M)$$

La première est déduite de l'application $\Phi : B_A(M) \to \mathbf{H}_A(A,B_A(M))$, définie par $\Phi(x) = f_x$. Elle est bijective et continue, si $\mathbf{H}_A(A,B_A(M))$ est muni de la topologie $\mathfrak{F}$. La deuxième est déduite de l'application :

$$\Psi : \mathbf{H}_A(A,B_A(M)) \to \mathbf{H}_A(B(A),\ B_A(M)),\ \text{définie par } \Psi(f_x) = f'_x.$$

L'application Ψ est continue si $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ est muni de la topologie de la convergence simple sur b(A) et $\mathbf{H}_A(A,B_A(M))$ de la topologie $\mathfrak{F}$, en vertu de la proposition 17 du ¶ 2. La troisième est l'application μ, définie pour $\beta \in B(A)$ et $h \in \mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$, par $\mu(\beta,h) = h(\beta)$. Supposons que $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ soit équicontinu; en vertu de [4 ; § 2, N° 4, Théorème 1], la topologie $\mathbf{K}$ et la topologie de la convergence simple sur b(A) sont identiques. De plus, il résulte de [4 ; § 3, N° 4, Corollaire 1] que l'application μ est continue pour $\mathbf{K}$. Finalement, l'application m est continue. Supposons maintenant que $B_A(M)$ soit un B(A)-module topologique. L'application Ψ est alors surjective; en effet, tout élément h de $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ est un morphisme de B(A)-modules : si β est un élément de B(A), les applications continues g et k de B(A) dans $B_A(M)$, définies par $g(\alpha) = h(\alpha\beta)$ et $k(\alpha) = \alpha.h(\beta)$, pour $\alpha \in B(A)$, coïncident sur la partie dense b(A) de B(A); elles sont donc égales; donc h est égal à f'_x, où $x = h(1)$. Mais $B_A(M)$ est un B(A)-module topologique compact, il est donc borné. Il en résulte facilement que $\mathbf{H}_A(B(A), B_A(M))$ est équicontinu. L'assertion concernant la compacité de $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ n'est autre que le théorème 28 du ¶ 2.

Désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble $\mathbf{H}_A(A,B_A(M))$ et par $\mathcal{H}'$ l'image de Ψ. On a ainsi un morphisme $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ continu, lorsque Ψ est continue.

<u>Corollaire 12</u> : Soit M un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_A$. Alors le B(A)-module $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$ si et seulement si $\mathcal{H}'$ est équicontinu.

<u>Preuve</u> : Une partie se démontre en remarquant qu'une partie d'une partie équicontinue est équicontinue. Supposons que $\mathcal{H}'$ soit équicontinue, on peut reprendre la démonstration du lemme précédent, en remplaçant $\mathbf{H}_A(B(A),B_A(M))$ par $\mathcal{H}'$.

<u>Proposition 13</u> : Soit M un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_A$. Le B(A)-module $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{B(A)}$ si et seulement si pour tout voisinage U de 0, pour la topologie de Bohr de M, il existe un idéal I ouvert de A, tel que le cardinal de A/I soit fini et tel que $IM \subset U$.

<u>Preuve</u> : B(A) et $B_A(M)$ sont les complétés respectifs de A et $B_A(M)$, pour la topologie de Bohr. Il résulte de [4 ; § 2, N° 2, Proposition 4] que $\mathcal{H}'$ est équicontinu si et seulement si $\mathcal{H}$ est équicontinu, A étant muni de la topologie de Bohr. Cette condition est équivalente à la suivante : pour tout voisinage V de 0 dans $B_A(M)$, il existe un élément I de $V_{TB}(A)$, tel que $IB_A(M) \subset V$. Soit $U \in V_{TB}(M)$, il existe $V \in V(B_A(M))$, tel que $b_M^{-1}(V) = U$; de $IB_A(M) \subset V$, on tire $IM \subset U$. La réciproque se montre sans peine en utilisant la densité de b_M et la relation $f_a(\overline{b_M(M)}) \subset \overline{f_a(B_M(M))}$, pour $a \in A$, U étant choisi fermé.

Remarques :

1) Le résultat précédent exprime que $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{M}}_{B(A)}$ si et seulement si M est borné, pour les topologies de Bohr sur A et M. D'autre part, si $B_A(M)$ est un B(A)-module topologique, B(A) est borné dans $B_A(M)$; donc A est borné dans M, pour la topologie de Bohr.

2) Si A et M sont bornés, pour les topologies de Bohr, la loi externe de A-module de M est uniformément continue pour les topologies de Bohr : soit V un voisinage de Bohr de 0 dans M, et soit W un autre voisinage de Bohr, tel que $3W \subset V$; soient encore un voisinage de Bohr U dans M, tel que $AU \subset W$ et un voisinage de Bohr O dans A, tel que $OM \subset W$; soient $a, a' \in A$ et $x, x' \in M$, on obtient, pour $x' \in x + U$, $a' \in a + O$, les relations $a'.x' \in a.x + Ox + aU + OU \subset a.x + 3W \subset a.x + V$. Dans ce cas, la loi externe de A-module de M se prolonge en une loi externe continue $B(A) \times B_A(M) \to B_A(M)$, de manière unique. Le théorème de prolongement des identités algébriques nous montre alors que $B_A(M)$ est un objet de $\underline{\underline{M}}_{B(A)}$.

3) Ce qui précède semble indiquer que la topologie de Bohr sur M fait toujours de A une partie bornée. Nous ne connaissons pas la réponse, faute d'avoir une caractérisation de la topologie de Bohr d'un module.

Toutefois, nous avons le résultat suivant qui résultera du lemme ci-dessous.

Lemme 14 : Soit $f : M \to N$ un morphisme surjectif de $\underline{M}_A$. Si A est borné dans M, pour la topologie de Bohr, il en est de même pour N.

Preuve : Si P est un objet de $\underline{M}_A$, alors A est borné dans P si et seulement si A est borné dans $B_A(P)$. Puisque f est un morphisme surjectif, le morphisme B(f) est surjectif (même si f n'est pas strict) et strict, car $B_A(M)$ et $B_A(N)$ sont compacts. Il est donc ouvert. Par conséquent, si A est borné dans $B_A(M)$, il l'est aussi dans $B_A(N)$.

Il résulte de la proposition 8, 2) que la topologie de Bohr sur un produit fini de A-modules est la topologie produit des topologies de Bohr.

Proposition 15 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ de type fini. Alors A est borné dans M, pour la topologie de Bohr.

Preuve : Il existe un morphisme surjectif continu $A^n \to M$ de A-module , où n est un entier. Puisque A est borné dans lui-même, pour la topologie de Bohr, il en est de même pour A^n. Le lemme précédent permet de conclure.

En ce qui concerne la topologie de Bohr d'un module, nous avons le résultat suivant :

Proposition 16 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, muni d'une topologie T. Il existe une topologie T' sur M, faisant de M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$ telle que M soit précompact et T' moins fine que T : un système fondamental de voisinages $V_{T'}(M)$ est constitué des parties V de M, telles qu'il existe une suite $\{ V_n \}_{n\in\mathbf{N}}$ de parties de M, satisfaisant :

1) $V_0 = V$ et pour $n > 0$, la partie V_n est un voisinage symétrique de 0, relativement dense pour T.

2) Pour $n \geq 0$, on a $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ et $AV_{n+1} \subset V_n$

3) Pour $n > 0$, il existe un voisinage O_n de 0 dans A, tel que $O_nM \subset V_n$.

Si A est borné dans M, pour la topologie TB de M, alors TB = T'.

Preuve : Commençons par remarquer que lorsque $V \in V_{T'}$, il en est de même pour V_n. De $V_1 \subset V$, on déduit que V est relativement dense, donc T' est une topologie précompacte; on en déduit aussi que T' est moins fine que T. Reste à contrôler que T' fait de M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$. Or la famille $V_{T'}$ est une base de filtre : elle contient M et est stable par intersection; ce dernier point se démontre en constatant que la suite associée à $U \cap V$ est donnée par les ensembles $U_n \cap V_n$; la vérification en est immédiate sauf en ce qui concerne la propriété suivante : une intersection de deux parties relativement denses est une partie relativement dense; mais ce résultat est démontré dans [11]. Il est clair que l'addition est continue, car $V_1 \in V_{T'}$.

La loi externe est aussi continue : soient a, $a_0 \in A$ et x, $x_0 \in M$; on a alors $a.x - a_0.x_0 = y + z$, où $y = (a - a_0).x$ et $z = a_0.(x - x_0)$; si $V \in V_{T'}$, on a $AV_2 \subset V_1$ et $O_1M \subset V_1$; on en déduit que $a - a_0 \in O_1$ et $x - x_0 \in V_2$ impliquent $a.x - a_0.x_0 \in V$, puisque $V_1 + V_1 \subset V$. Supposons maintenant que A soit borné dans M pour la topologie de Bohr TB qui est une topologie sur M précompacte et moins fine que T, faisant de M un objet de $\underline{M}_A$. Soit V un élément de V_{TB}, puisque A est borné pour TB, il existe $V_1' \in V_{TB}$ tel que $AV_1' \subset V$ et prenons un voisinage symétrique V_1 dans V_{TB}, tel que $V_1 + V_1 \subset V_1'$; de $V_1' \subset AV_1'$, on déduit que $V_1 + V_1 \subset V$ et de $V_1 \subset V_1'$, on déduit $AV_1 \subset V$; puisque TB est précompacte, V_1 est relativement dense et M est borné, donc il existe un voisinage ouvert O_1 de A, tel que $O_1M \subset V_1$. On peut alors poursuivre la construction par récurrence de la suite V_n. Il découle des considérations précédentes que TB est moins fine que T', donc égale à T'.

Remarque : La condition "A est borné dans M", pour la topologie de Bohr sur M, est réalisée lorsque A est précompact, ou lorsque M est un module de type fini.

Nous avons vu que $B_A(M)$ est un B(A)-module. Nous allons généraliser la construction faite à cet effet, pour obtenir des renseignements supplémentaires sur le foncteur B_A.

Définition 17 : Soient M et N des objets de $\underline{M}_A$. Soient $U \in V(M)$ et $V \in V(N)$, on considère le sous-module $[U;V]$ de $M \otimes_A N$ engendré par les éléments $u \otimes n$ et $m \otimes v$, où $u \in U$, $n \in N$, $m \in M$, $v \in V$. Alors la famille $\{ [U;V] \}_{U \in V(M), V \in V(N)}$ est un système fondamental de voisinages de zéro pour une topologie sur le A-module $M \otimes_A N$, faisant de $M \otimes_A N$ un objet de $\underline{M}_A$.

Cette topologie est dite topologie produit tensoriel. Lorsque V(M) et V(N) sont constitués de sous-modules de M et N, on retrouve la topologie produit tensoriel usuelle : on a $[U;V] = \mathrm{Im}(U \otimes_A N) + \mathrm{Im}(M \otimes_A V)$.

Si M est un objet de $\underline{M}_A$, l'isomorphisme de A-modules $M \to M \otimes_A A$ est continu. Cependant, ce morphisme n'est pas malheureusement un isomorphisme de $\underline{M}_A$ en général. Il en est ainsi si A est borné dans M et M est borné. C'est par exemple le cas, lorsque A est muni d'une topologie linéaire et M de la topologie associée.

Remarquons qu'un produit tensoriel de morphismes continus est un morphisme continu pour la topologie produit tensoriel.

<u>Proposition 18</u> : Soient M et N des objets de $\underline{M}_A$. Il existe un morphisme de (A,B(A))-modules $B_A(N) \otimes_A M \to B_A(N \otimes_A M)$, fonctoriel en N et M, donnant lieu à un diagramme commutatif dans $\underline{M}_A$:

$$\begin{tikzcd} N \otimes_A M \arrow[r] \arrow[dr, "b_N \otimes_A M"'] & B_A(N) \otimes_A M \arrow[d] \\ & B_A(N \otimes_A M) \end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u> : Soit x un élément de M et soit $t_x : N \to N \otimes M$, le morphisme de A-modules défini par $t_x(n) = n \otimes x$, pour $n \in N$. L'ensemble des morphismes t_x est équicontinu, pour la topologie produit tensoriel : on a pour $V \in V(N)$ et $U \in V(M)$ la relation $V \subset t_x^{-1}([V;U])$. On considère alors l'application A-bilinéaire $\mu : B_A(N) \times M \to B_A(N \otimes M)$, définie par $\mu(z,x) = B(t_x)(z)$ pour $z \in B_A(N)$, $x \in M$. On obtient ainsi le morphisme de A-modules θ cherché; il est défini par $\theta(z \otimes x) = B(t_x)(z)$, pour $z \in B_A(N)$ et $x \in M$. C'est aussi un morphisme de B(A)-modules, puisqu'il en est ainsi pour tout morphisme $B(t_x)$.

Si y est un élément de N, on obtient $\theta(b_N(y) \otimes x) = B(t_x)(b_N(y)) = b_{N\otimes M}(y \otimes x)$, d'où la commutativité du diagramme. La vérification de la fonctorialité de θ est une question de routine.

<u>Remarque</u> : Lorsque N = A, on obtient, sans utilisation de la topologie produit tensoriel, un morphisme de (A,B(A))-modules :

$$\tau : B(A) \otimes_A M \to B_A(M)$$

Il est défini par $\tau(\alpha \otimes x) = \alpha . b_M(x)$, pour $\alpha \in B(A)$, $x \in M$. Le morphisme τ est fonctoriel en M.

Lorsque $M = A$, on retrouve l'isomorphisme canonique $B(A) \otimes_A A \to B(A)$.

Nous allons profiter de cette circonstance pour faire le calcul de $B_A(M)$, où M est un A-module de présentation finie. Pour cela, on imite la construction de [7 ; lemmes 9.11 à 9.17].

Définition 19 : Soit C un objet compact de $\underline{M}_A$ et soit L un A-module libre, de rang fini n. Soit un isomorphisme $L \otimes_A C \to C^n$, associé à une base de L. On appelle C-topologie sur $L \otimes_A C$, la topologie image réciproque de celle de C^n. Le produit tensoriel $L \otimes_A C$, muni de la C-topologie est un A-module topologique compact, isomorphe à C^n.

La C-topologie est indépendante de la base de L choisie. Cela résulte du lemme suivant, où l'on prend $f = Id_L$ et $g = Id_C$:

Lemme 20 : Soient L et L' des A-modules libres de rang fini et soient C et C' des objets compacts de $\underline{M}_A$, Si $f : L \to L'$ est un morphisme de $\underline{M}_A$ et si $g : C \to C'$ est un morphisme de $\underline{M}_A$, alors le morphisme $f \otimes g$ est continu pour la C-topologie et la C'-topologie.

Preuve : Soit $(a_{i,j})$ la matrice de f dans une base de L et une base de L'. On a un diagramme commutatif de morphismes de A-modules :

$$\begin{array}{ccc} L \otimes C & \xrightarrow{f \otimes g} & L' \otimes C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^n & \xrightarrow{h} & C'^{n'} \end{array}$$

où h est défini par $h(c_1,\ldots,c_n) = (\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}g(c_i),\ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n'}g(c_i))$

Puisque g est continu, il en est de même pour h.

Définition 21 : Soit C un objet compact de $\underline{M}_A$ et soit M un A-module de présentation finie. Si $L_2 \to L_1 \to M \to 0$ est une présentation finie de M, par les modules libres de rangs finis L_1 et L_2, on définit la C-topologie sur $M \otimes_A C$ comme étant la topologie quotient sur $L_1 \otimes_A C/\mathrm{Im}(L_2 \otimes_A C)$, où $L_i \otimes_A C$ est muni de la C-topologie. En d'autres termes , une partie U de $M \otimes_A C$ est ouverte si et seulement si l'image réciproque de U par le morphisme de A-modules $L_1 \otimes_A C \to M \otimes_A C$ est un ouvert.

De même que dans [7 ; Lemme 9.17], on montre que la C-topologie sur $M \otimes_A C$ est indépendante de la présentation choisie et que $M \otimes_A C$ est compact, pour la C-topologie. De plus, si $f : M \to M'$ est un morphisme de A-modules, entre modules de présentations finies, le morphisme $M \otimes_A C \to M' \otimes_A C$ est continu pour la C-topologie, voir (*) en bas de page.

Théorème 22 : Soit M un objet de $\underline{\mathbf{M}}_A$, admettant une présentation finie du type $A^m \to A^n \to M \to 0$, dont les morphismes sont continus et stricts. Le morphisme canonique $\tau_M : B(A) \otimes_A M \to B_A(M)$ est un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$, lorsque le A-module $B(A) \otimes_A M$ est muni de la B(A)-topologie.

Lorsque A et M sont munis de la topologie discrète, le morphisme τ est un isomorphisme pour tout module M de présentation finie.

Preuve : Soit $A^m \to A^n \to M \to 0$ une présentation finie de M, dont les morphismes sont continus et stricts. Le morphisme τ est fonctoriel en M, le foncteur B_A est exact à gauche sur les suites exactes topologiques. On en déduit un diagramme commutatif, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} B(A) \otimes_A A^m & \to & B(A) \otimes_A A^n & \to & B(A) \otimes_A M & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \tau_M & & \\ B_A(A^m) & \to & B_A(A^n) & \to & B_A(M) & \to & 0 \end{array}$$

Si les deux premiers morphismes verticaux sont bijectifs, il en est de même du dernier, en vertu du diagramme du serpent. Or A^n admet pour morphisme compactification le morphisme canonique $A^n \to B(A)^n$, donc le morphisme τ, associé à A^n, est un isomorphisme. Soit O un ouvert de $B_A(M)$, son image réciproque dans $B(A) \otimes_A A^n$ est un ouvert pour la B(A)-topologie. Par définition de la B(A)-topologie sur $B(A) \otimes_A M$, la partie $\tau_M^{-1}(O)$ est un ouvert pour cette topologie. Donc τ_M est une bijection continue entre

(*) L'hypothèse " C est compact " n'est pas indispensable pour définir la C-topologie.

modules compacts, donc un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$.

Corollaire 23 : Soit A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$, si M est un A-module de présentation finie, le morphisme $B(A) \otimes_A M \to B_A^\circ(M)$ est un isomorphisme de $\underline{\mathbf{M}}_A$ ($B_A^\circ(M)$ désigne le compactifié de M, muni de la topologie canonique, cf. ¶ 1).

Preuve : Une présentation finie de M est $A^m \to A^n \to M \to 0$. La topologie produit sur A^n est la canonique et tout morphisme entre modules de type fini est continu et strict, pour la topologie canonique, cf. Définition 13, ¶ 1.

Remarque : D'après [16 ; 4.3], si M est un A-module de présentation finie, on a $M \otimes_A B(A) = 0$ si et seulement si $B(A) = (0 :_A M).B(A)$. On voit donc que, lorsque M est un A-module de présentation finie :

1) Le A-module $B_A^\circ(M)$ est nul si et seulement si $B(A) = (0 :_A M).B(A)$

2) Le A-module $B_A^d(M)$ est nul si et seulement si $B^d(A) = (0 :_A M).B^d(A)$

Proposition 24 : Soit A un objet de $\underline{\mathbf{A}}$, alors :

Si le morphisme b est pur, pour tout module de présentation finie M, le morphisme b_M est pur, lorsque le module M est muni de la topologie canonique.

Preuve : C'est une conséquence du théorème 22, puisque l'on a une factorisation $M \to B(A) \otimes_A M \to B_A^\circ(M)$ du morphisme b_M.

Proposition 25 : (Warfield) Soit A un anneau, muni de la topologie discrète. Pour tout A-module M, muni de la topologie discrète, le morphisme $M \to B_A^d(M)$ est pur. En particulier, le morphisme $A \to B^d(A)$ est pur.

Preuve : On utilise le théorème 45 du ¶ 2 et la proposition 18, dans le cas où les modules M et N sont munis de la topologie discrète.

On retrouve ainsi un résultat de [18].

Remarque : Si l'anneau A est muni d'une topologie linéaire, la topologie canonique sur un A-module de type fini est la topologie associée, cf. la définition 13 du ¶ 1. Donc, un module M de présentation finie, muni de la topologie associée, a un morphisme compactification pur, s'il en est de même pour le morphisme $A \to B(A)$.

L'étude des morphismes complétions purs de la catégorie $\underline{\mathbf{A}}$ dans [15] nous permet de donner des critères de pureté pour le morphisme b.

Définition 26 : On dit qu'un anneau topologique A vérifie la condition (α) si tout sous-module de type fini d'un A-module A^k, $k > 0$, est fermé pour la topologie produit sur A^k.

On observe alors que :

1) Un anneau linéairement compact, ou compact, vérifie (α)

2) Un anneau Noethérien, muni d'une topologie séparée défini par le système fondamental de voisinages de zéro constitué des produits finis d'idéaux maximaux, vérifie (α)

Ces résultats proviennent de [15].

Théorème 27 : Soit A un anneau topologique de morphisme compactification $b : A \to B(A)$. Soit l'anneau $A' = A/\mathrm{Ker}(b)$, le morphisme $A' \to B(A)$ est pur si et seulement si A', muni de la topologie quotient de celle de Bohr sur A vérifie la condition (α).

Preuve : C'est le corollaire de la proposition 3 de [15], puisque B(A) est un anneau compact.

Exemple : Si nous prenons la situation de 2), ci-dessus, la topologie de Bohr de l'anneau A est défini par le système fondamental de voisinages de 0 suivant : l'ensemble des produits $M_1 \ldots M_n$, où M_i est un idéal maximal tel que A/M_i soit fini. Si cette topologie est séparée, le morphisme b est pur, cf. [15; 1, Exemple 4].

En particulier, si A est un anneau Noethérien, résiduellement fini, de radical nul, le morphisme b est pur.

Dans le même ordre d'idée, soit A un anneau local résiduellement fini, donc nécessairement Noethérien, d'idéal maximal M. Soit $\hat{A}$ son complété pour la topologie M-adique. Le morphisme $A \to \hat{A}$ est fidèlement plat, donc pur. Si A est infini, il résulte de [6 ; 5.3, 5.4] que $B(A) = \hat{A}$, si A n'est pas un corps. Donc le morphisme $A \to B(A)$ est pur.

On termine en donnant une proposition concernant la platitude du morphisme b.

<u>Proposition 28</u> : Soit A un annneau topologique, alors :

1) Si le morphisme $A \to B(A)$ est plat, le foncteur B_A° est exact sur les modules de présentation finie.

2) Si A est un anneau cohérent et si le foncteur B_A° est exact sur les modules de présentation finie, le morphisme $A \to B(A)$ est plat.

<u>Preuve</u> : Soient M et N des modules de présentation finie et soit $f : M \to N$ un morphisme injectif de A-modules; on obtient un diagramme commutatif, dont les morphismes verticaux sont bijectifs :

$$\begin{array}{ccc} B(A) \otimes_A M & \to & B(A) \otimes_A N \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_A^\circ(M) & \to & B_A^\circ(N) \end{array}$$

La partie 1) est alors évidente. Réciproquement, si le foncteur B_A° est exact sur les modules de présentation finie et si A est un anneau cohérent, soit I un idéal de type fini de A (donc de présentation finie), alors le morphisme $B(A) \otimes_A I \to B(A) \otimes_A A$ est injectif; donc le morphisme b est plat.

BIBLIOGRAPHIE

1 - N. BOURBAKI, " Algèbre commutative ", Chaps 3 et 4, Hermann, Paris, 1967.

2 - N. BOURBAKI, " Topologie générale ", Chaps 1 et 2, Hermann, Paris, 1961.

3 - N. BOURBAKI, " Topologie générale ", Chaps 3 et 4, Hermann, Paris, 1960.

4 - N. BOURBAKI, " Topologie générale ", Chap 10, Hermann, Paris, 1961.

5 - N. BOURBAKI, " Théories spectrales ", Chaps 1 et 2, Hermann, Paris, 1967.

6 - CHEW K. L. et LAWN S., Residually finite rings, Canad. J. Math, 22, (1970), 92-101.

7 - EILENBERG S. et STEENROD N., Foundations of algebraic topology, Princeton University Press, Princeton, 1952.

8 - GALE D., Compact sets of functions and functions rings, Proc. Amer. Math. Soc., 1, (1950), 303-308.

9 - GOLDMAN S. et SAH C. H., On a special class of locally compact rings, J. Algebra, 4, (1966), 71-95.

10- HOLM P., On the Bohr compactification, Math. Annalen, 156, (1964), 34-46.

11- HOLM P. et ALFSEN E. M., A note on compact representations and almost periodicity in topological groups, Math. Scand, 10, (1962), 127-136.

12- KELLEY J. L., General topology, D. Van Nostrand Company, Princeton, Toronto, London, Melbourne, 1955.

13- LAMBEK J., Localization and completion, J. Pure Appl. Algebra, 2, (1972), 343-370.

14 - LAMBEK J., Non commutative localization, Bull. Amer. Math. Soc., 79, (1973), 857-872.

15 - LU C.P., Purity of linearly topological rings in overrings, J. Algebra, 59, (1979), 290-301.

16 - STOKES M., Some dual homological results for modules over commutative rings, J. Pure Appl. Algebra, 65, (1950), 153-162;

17 - WARNER S., Topological fields, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1989.

18 - WARFIELD R. B., Purity and algebraic compactness for modules, Pacific J. Math., 28, (1969), 699-719.

PICAVET Gabriel

Université de Clermont II (Blaise Pascal)

Département de Mathématiques Pures

63177 - AUBIERE CEDEX - FRANCE

Manuscrit reçu le 19 Octobre 1992