

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PIERGIULIO CORSINI
(I.P.S.) Ipergruppi di ordine 6

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 81-104

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_81_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

(I.P.S.) IPERGRUPPI DI ORDINE 6 (*)

Piergiulio CORSINI

Summary :

All the (i.p.s.)-hypergroups of ordre 6 are determined.

Introduzione :

In un lavoro precedente [6] si e' dimostrato che gli (i.p.s.)-ipergruppi (cioe' gli ipergruppi canonici soddisfacenti alla condizione : $x + y \ni x \Rightarrow x + y = x$) di ordine ≤ 5 coincidono con quelli fortemente canonici (che soddisfano in piu' alla condizione $[(x + y) \cap (z + w) \neq \emptyset] \Rightarrow [(x + y) \subset (z + w) \text{ oppure } (x + y) \supset (z + w)]$), ma che esistono (i.p.s.)-ipergruppi di ordine 9 e 10 non fortemente canonici. In questo lavoro si determinano, a meno di isomorfismi, tutti gli (i.p.s.)-ipergruppi di ordine 6 (anche questi fortemente canonici).

Nota : Con H denotero' nel seguito un (i.p.s.)-ipergruppo di ordine 6. Numerero' con interi progressivi gli (i.p.s.)-ipergruppi non isomorfi.

(*) Ricerca finanziata dal M.P.I.

Poniamo $H = \{0, a, 1, 2, 3, 4\}$ e sia $\forall j, I_{ps}(j) = I_p(j)$

1) Supponiamo $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad I_{ps}(j) = \{0, a\}$ e $j \circ j \ni 0$.

Abbiamo $1 \circ 2 \cap \{1, 2\} = \emptyset$, e inoltre :

$$1 \circ 2 \ni a \Rightarrow 1 \in 2 \circ a = 2 \quad A^{(*)}$$

$$1 \circ 2 \ni 3 \Rightarrow 1 \in 2 \circ 3 \text{ e } 2 \in 1 \circ 3.$$

Allora $(1 \circ 2) \circ 2 \supset 3 \circ 2$, ma $1 \circ (2 \circ 2) = 1$ quindi $2 \circ 3 = 1$.

D'altra parte $2 \circ (3 \circ 3) = 2$ e $(2 \circ 3) \circ 3 \supset 1 \circ 3$

perciò $1 \circ 3 = 2$.

Ancora $(2 \circ 2) \circ 3 = 3$, $2 \circ (2 \circ 3) = 2 \circ 1$, ne segue $1 \circ 2 = 3$.

Infine $1 \circ 4 \cap \{1, 4\} = \emptyset$ e si ha

$$1 \circ 4 \ni 2 \Rightarrow 1 \circ 2 \ni 4 \quad A$$

$$1 \circ 4 \ni 3 \Rightarrow 4 \in 1 \circ 3 \quad A$$

dunque 1) non dà luogo a ipergruppi.

2) Sia $I_{ps}(1) = \{0, a\}$, $I_{ps}(j) = 0$ se $j > 1$.

Risulta $1 \circ 2 \ni a \quad A$

$$1 \circ 2 \ni 3 \Rightarrow 1 \circ 2 = 3 \text{ e } 1 \circ 3 = 2$$

essendo $\{2, 3\} \subset SC(H)^{(**)}$

Allora $1 \circ 4 \cap H = \emptyset \quad A$

In modo analogo si verifica che anche negli altri casi :

$$\forall t \in \{1, 2, 3, 4\}, t \circ t \ni 0, I_{ps}(1) = \dots = I_{ps}(k) = \{0, a\},$$

$I_{ps}(j) = 0$ per $j > k$, non si hanno ipergruppi.

3) Sia ancora $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad I_{ps}(j) = \{0, a\}$, ma si supponga

$$1 \circ 4 \ni 0 \in 2 \circ 3.$$

(*) «A» qui e nel seguito è abbreviazione di «Assurdo».

(**) $SC(H)$ è il gruppo degli scalari di H .

Si ha : $1 \circ 4 = 2 \circ 3 = \{0, a\}$

Risulta $1 \circ 1 \ni 1 \Rightarrow 1 = 1 \circ 4 \Rightarrow 4 = 1 \circ 4$ A

I) Supponiamo $1 \circ 1 = \{2, 3, 4\}$

Abbiamo

$1 \circ 1 \ni 3 \Rightarrow 1 \in 3 \circ 4 \Rightarrow 4 \in 1 \circ 2 \Rightarrow 2 \in 4 \circ 4$

$1 \circ 1 \ni 2 \Rightarrow 1 \in 2 \circ 4 \Rightarrow 4 \in 1 \circ 3 \Rightarrow 3 \in 4 \circ 4$

e si ha allora :

$1 \circ (3 \circ 4) \supset 1 \circ 1 \ni 4,$

$(1 \circ 3) \circ 4 \supset 4 \circ 4$, ne segue $4 \circ 4 \ni 4$ da cui $4 = 1 \circ 4$ A.

II) Sia ora $1 \circ 1 = \{2, 3\}$

Si ha $1 \circ (1 \circ 4) = 1$

$(1 \circ 1) \circ 4 = 2 \circ 4 \cup 3 \circ 4$

quindi $2 \circ 4 = 3 \circ 4 = 1$ da cui $1 \circ (2 \circ 4) = 1 \circ 1 = \{2, 3\}$,

ma $(1 \circ 4) \circ 2 = 2$ dunque un assurdo.

III) Supponiamo $1 \circ 1 = \{2, 4\}$, allora $1 \in 2 \circ 4 \cap 4 \circ 4$, di qui $4 \in 1 \circ 3$ e perciò $3 \in 4 \circ 4$, ne segue : $(1 \circ 1) \circ 4 = 2 \circ 4 \cup 4 \circ 4 \ni 3 \notin 1 \circ (1 \circ 4)$.

IV) Sia $1 \circ 1 = 4$ da cui $1 \in 4 \circ 4$ ma $1 \circ (1 \circ 4) = 1$ e

$(1 \circ 1) \circ 4 = 4 \circ 4$ perciò $4 \circ 4 = 1$

Risulta $1 \circ 2 \ni 1 \Rightarrow 2 \in 1 \circ 4$ A

$1 \circ 2 \ni 2 \Rightarrow 1 \in 2 \circ 3$ A

$1 \circ 2 \ni 4 \Rightarrow 2 \in 4 \circ 4$ A

Quindi $1 \circ 2 = 3$ da cui $1 \in 3 \circ 3$.

Allora $1 \circ (2 \circ 3) = 1 = (1 \circ 2) \circ 3 = 3 \circ 3$ e perciò $3 \circ 3 = 1$.

Inoltre $2 \circ 4 \ni 1 \Rightarrow 2 \in 1 \circ 1$ A

$2 \circ 4 = 2 \Rightarrow 4 \in 2 \circ 3$ A

$2 \circ 4 = 4 \Rightarrow 2 \in 1 \circ 4$ A

Perciò $2 \circ 4 = 3$. Ne segue $4 \in 3 \circ 3$ A

V) Sia $1 \circ 1 = 2$, da cui $1 \in 2 \circ 4$, $4 \in 1 \circ 3$, $3 = 4 \circ 4$

Risulta

$1 \circ (1 \circ 4) = 1$, $(1 \circ 1) \circ 4 = 2 \circ 4$, quindi $2 \circ 4 = 1$.

Poichè $1 \circ 3 \ni 2 \Rightarrow 3 \in 2 \circ 4$, ne segue $1 \circ 3 = 4$.

Inoltre $2 \circ 2 \cap \{0,1,2\} = \emptyset$

i) Si supponga $2 \circ 2 \ni 3$, allora $3 \circ 3 \ni 2$

D'altra parte $2 \circ (2 \circ 3) = 2$

$$(2 \circ 2) \circ 3 \supset 3 \circ 3$$

perciò $3 \circ 3 = 2$ e quindi $2 \circ 2 = 3$.

Ma si ha $3 \circ 4 \cap \{0,1,3,4\} = \emptyset$, ne segue $3 \circ 4 = 2$ da cui $4 \in 2 \circ 2$ A

ii) Si consideri ora il caso $2 \circ 2 = 4$, allora $3 \circ 3 = 1, 3 \in 1 \circ 2$ e $2 \in 3 \circ 4$.

Abbiamo perciò $(2 \circ 2) \circ 3 \supset 4 \circ 3$ e da $2 \circ (2 \circ 3) = 2$, segue

$3 \circ 4 = 2$ e quindi $2 \circ 1 = 3$.

Si ottiene l'ipergruppo

	0	a	1	2	3	4
0	0	a	1	2	3	4
a		0	1	2	3	4
1			2	3	4	0,a
2				4	0,a	1
3					1	2
4						3

(1)

VI) L'ipotesi $1 \circ 1 = 3$ porta a un ipergruppo isomorfo a quello del caso V).

4) Sia $1 \circ 4 = \{0,a\}$, $2 \circ 3 = 0$.

Risulta :

$$1 \circ 2 = 1 \Rightarrow 2 \in 1 \circ 4 \quad \mathbf{A}$$

$$1 \circ 2 = 2 \Rightarrow 1 \in 2 \circ 3 \quad \mathbf{A}$$

$$1 \circ 2 = a \Rightarrow 2 \in 4 \circ a = 4 \quad \mathbf{A}$$

$$1 \circ 2 = 3 \Rightarrow 2 = 3 \circ 4 \Rightarrow 2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 2 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{allora} \\ 1 \circ (2 \circ 2) = 1 \circ 4 = \{0,a\} \\ (1 \circ 2) \circ 2 = 3 \circ 2 = 0 \end{array} \right\} \mathbf{A}$$

Perciò $1 \circ 2 = 4$

Ma $1 \circ 2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2 \in 4 \circ 4 & 3 \in 1 \circ 1 \\ 1 = 3 \circ 4 & \Rightarrow \end{cases}$

Inoltre: $(3 \circ 4) \circ 4 = 1 \circ 4 = \{0, a\}$

$$3 \circ (4 \circ 4) \supset 3 \circ 2 = 0$$

quindi $4 \circ 4 \supseteq \{2\}$

Sia $4 \circ 4 = \{1, 2\}$. Allora $3 \circ (4 \circ 4) = 3 \circ \{1, 2\} = 0 \cup 3 \circ 1$.

Ne segue $3 \circ 1 = a$ ma allora $3 \in a \circ 4 = 4$ A.

Sia ora $4 \circ 4 = \{2, 3\}$ Segue $4 = 1 \circ 3$ e inoltre

$3 \circ (4 \circ 4) = 0 \cup 3 \circ 3$ perciò $3 \circ 3 = a$, da cui $3 = 2 \circ a$, $2 = 3 \circ a$, $2 \circ 2 = a$

Si ottiene l'ipergruppo

	0	a	1	2	3	4
0	0	a	1	2	3	4
a		0	1	3	2	4
1			2,3	4	4	0,a
2				a	0	1
3					a	1
4						2,3

(2)

L'ipotesi $4 \circ 4 = \{1, 2, 3\}$ implica $3 \circ (4 \circ 4) = \{0, a\} = 3 \circ 1 \cup 3 \circ 2 \cup 3 \circ 3 \cup \{0\}$

Ne segue $3 \circ 1 = a$ A

Poniamo ora $H = \{0, a_1, a_2, x_1, x_2, x_3\}$ e sia $\forall j \quad I_{ps}(x_j) = I_p(x_j)$

5) Sia $I_{ps}(x_1) = I_{ps}(x_2) = \{0, a_1\}$

$$I_{ps}(x_3) = \{0, a_2\}$$

Abbiamo: $a_1 + x_3 = x_1 \Rightarrow a_1 + a_1 + x_3 = a_1 + x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$ A

$$a_1 + x_3 = x_2 \Rightarrow x_3 = x_2 \quad A$$

$$a_1 + x_3 = a_2 \Rightarrow x_3 \in SC(H) \quad A$$

$$6) I_{ps}(x_1) = \{0, a_1\}, I_{ps}(x_2) = \{0, a_2\}$$

$$I_{ps}(x_3) = 0.$$

Si ha : $(a_2 + x_1) \cap \{a_1, a_2, x_1\} = \emptyset$, e inoltre

$$a_2 + x_1 = x_2 \Rightarrow a_2 + a_2 + x_1 = x_2 + a_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad A$$

$$a_2 + x_1 = x_3 \Rightarrow x_1 \in SC(H) \quad A$$

$$7) I_{ps}(x_1) = \{0, a_1, a_2\}, I_{ps}(x_2) = 0 = I_{ps}(x_3)$$

Risulta :

$$x_1 + x_2 \in \{0, a_1, a_2, x_2, x_3\} \Rightarrow x_1 \in SC(H) \quad A$$

$$x_1 + x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 \in x_1 - x_1 \quad A$$

$$8) I_{ps}(x_1) = \{0, a_1, a_2\} = I_{ps}(x_2) = I_{ps}(x_3)$$

i) Sia $x_1 + x_1 \ni 0$, allora $\forall i \in \{1, 2\} \quad x_1 + x_2 \ni a_i$

implica $x_1 + x_1 + x_2 \supset a_i + x_1 = x_1$, allora

$$\{0, a_1, a_2\} + x_2 \ni x_1 \quad \text{da cui } x_2 = x_1 \quad A$$

Inoltre $x_1 + x_2 \ni x_1 \Rightarrow x_2 \in x_1 - x_1 \quad A$

$$x_1 + x_2 \ni x_2 \Rightarrow x_1 \in x_2 - x_2 \quad A$$

Dunque abbiamo $x_1 + x_2 = x_3$ da cui $x_1 \in x_3 - x_2$ e $x_2 \in x_3 - x_1$

Se si suppone ora anche $x_2 + x_2 \ni 0$ (e quindi $x_3 + x_3 \ni 0$)

si ottiene l'ipergruppo

x_i	0	a_1	a_2	x_1	x_2	x_3
0	0	a_1	a_2	x_1	x_2	x_3
a_1		a_2	0	x_1	x_2	x_3
a_2			a_1	x_1	x_2	x_3
x_1				$0, a_1, a_2$	x_3	x_2
x_2					$0, a_1, a_2$	x_1
x_3						$0, a_1, a_2$

(3)

ii) Se si suppone invece $x_1 + x_2 \ni 0$, e quindi $x_1 + x_2 = \{0, a_1, a_2\}$, si ha :

$$x_1 + x_3 \ni a_i \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \ni a_i + x_2 = x_2 \Rightarrow x_3 = x_2 \quad A$$

quindi $x_1 + x_3 = x_2$ da cui $x_3 \in x_2 - x_1 = x_2 + x_2$ e $x_2 + x_3 = x_1$,
e anche $x_1 + x_1 \ni x_3$.

Se fosse $x_2 + x_2 \ni a_i$, seguirebbe $x_2 \in a_i - x_2 = x_1 \quad A$

Inoltre : $x_2 + x_2 \ni x_1 \Rightarrow x_2 + x_2 + x_1 = x_2 \supset x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 - x_2 \ni x_1 \quad A$

Dunque : $x_2 + x_2 = x_3$, $x_1 + x_1 = x_3$, $x_1 + x_3 = x_2$.

Si ottiene così l'ipergruppo :

	0	a_1	a_2	x_1	x_2	x_3
0	0	a_1	a_2	x_1	x_2	x_3
a_1		a_2	0	x_1	x_2	x_3
a_2			a_1	x_1	x_2	x_3
x_1				x_3	$0, a_1, a_2$	x_2
x_2					x_3	x_1
x_3						$0, a_1, a_2$

(4)

9) $I_{ps}(x_1) = \{0, a_1, a_2\}$, $I_{ps}(x_2) = \{0, a_1\}$

$$I_{ps}(x_3) = \{0, a_2\}$$

Risulta in questo caso : $x_1 + x_1 = \{0, a_1, a_2\}$,

$x_2 + x_2 = \{0, a_1\}$, $x_3 + x_3 = \{0, a_2\}$; ne segue

$a_1 + a_1 = 0 = a_2 + a_2 = a_1 + a_2$ e quindi

$$a_2 = (a_1 + a_1) + a_2 = a_1 + (a_1 + a_2) = a_1 \quad A$$

10) $I_{ps}(x_1) = \{0, a_1, a_2\} = I_{ps}(x_2), I_{ps}(x_3) = \{0, a_2\}$
 come in 8) si perviene a un assurdo.

11) $I_{ps}(x_1) = \{0, a_1, a_2\}$, $I_{ps}(x_2) = I_{ps}(x_3) = \{0, a_1\}$
 Assurdo come in 8) e in 9).

12) $I_{ps}(x_1) = \{0, a_1, a_2\}$, $I_{ps}(x_2) = \{0, a_1\}$
 $I_{ps}(x_3) = 0$.

$$\text{Risulta : } a_2 + x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \quad A$$

$$a_2 + x_2 \in \{a_1, a_2, x_3\} \Rightarrow x_2 \in SC(H) \quad A$$

$$a_2 + x_2 = x_2 \Rightarrow a_2 \in x_2 \cdot x_2 \quad A$$

13) $I_{ps}(x_1) = I_{ps}(x_2) = \{0, a_1, a_2\}$, $I_{ps}(x_3) = 0$

$$\text{Si ha : } a_1 + x_3 = x_2 \Rightarrow x_2 \in SC(H) \quad A$$

$$a_1 + x_3 = x_1 \Rightarrow x_1 \in SC(H)$$

$$a_1 + x_3 = a_2 \Rightarrow x_1 + a_1 + x_3 = x_1 + a_2 \Rightarrow x_3 \in x_1 \cdot x_1 \quad A.$$

$$\text{Poniamo } H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

14) e sia $I_{ps}(4) = 4 \circ 4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Se $j < 5 > k$ si ha

$$j \circ 5 = k \Rightarrow 5 = j^{-1} k \in I_{ps}(5) \quad A$$

$$\text{Ne segue : } \forall j < 5 \quad j \circ 5 = 5$$

$$\text{e perciò } 5 \circ 5 = H_5$$

15) Se invece si suppone $I_{ps}(4) = I_{ps}(5) = \{0, 1, 2, 3\}$ allora $4 \circ 5 = I_{ps}(4)$,

e inoltre si ha :

$$[k < 4, \quad 4 \in 5 \circ k] \Rightarrow 4 = 5 \quad A,$$

$$\text{d'altra parte } 4 \circ 4 \ni 4 \Rightarrow 4 \in 4 \circ 5 \quad A,$$

dunque $4 \circ 4 = 5$;

analogamente si vede $5 \circ 5 = 4$.

Conformemente a quanto visto in 14) e 15) si hanno due ipergruppi per ogni caso a seconda che $I_{ps}(4)$ sia isomorfo a \mathbf{Z}_4 o a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$

Allora gli ipergruppi che si ottengono nei casi 14) e 15) sono i seguenti :

14)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		2	3	0	4	5
2			0	1	4	5
3				2	4	5
4					0,1 2,3	5
5						0,1 2,3,4

(5)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	3	2	4	5
2			0	1	4	5
3				0	4	5
4					0, 1 2, 3	5
5						0, 1 2,3,4

(6)

15)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		2	3	0	4	5
2			0	1	4	5
3				2	4	5
4					5	0,1 2,3
5						4

(7)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	3	2	4	5
2			0	1	4	5
3				0	4	5
4					5	0,1 2,3
5						4

(8)

16) Sia $|I_p(x)| = 3$, $x \neq -x$

$$z \in B = I_p(x) \cup \{x, -x\}$$

Allora

1) $z = -z$

Immediati perchè $B = -B$

2) $I_p(x) \subset z - z$

Sia $a \in I_p(x)$. Esiste $\lambda \in H$: $a \in z + \lambda$

Se $\lambda \in I_p(x)$, seguirebbe $z \in I_p(x)$.

Se $\lambda \in x, -x$ seguirebbe $z \in \{x, -x\}$.

Dunque poichè $|B| = 5$, si ha $\lambda = z$

3) o $x \in z - z$

o $x - x = z - z$

E' chiaro che $x \notin z + x$ e $\forall a \in I_p(x)$,

$$x \notin z + a$$

Sia $x \in z - x$, allora $x + x \subset z - x + x = z + I_p(x) \subset z + I_p(z) = z$

dunque $x + x = z$.

Ne segue $x + x + (-x - x) = z - z$ da cui $x - x + x - x = z - z$ e quindi

$$x - x = z - z.$$

17) Sia ora $|I_p(x)| = 3$ $x = -x$

$$z \notin B = I_p(x) \cup \{x\}$$

allora $z \neq -z$

Si ha $I_p(x) \subset z - z$.

Infatti :

$$x + z \ni x \Rightarrow z \in x - x \quad A$$

$$x + z \ni z \Rightarrow x \in z - z \Rightarrow x - x \subset z - z$$

$$x + z \ni a \in I_p(x) \Rightarrow z = x, \quad A$$

$$x + z \ni -z \Rightarrow x \in -z - z \Rightarrow x - x \subset z + z - z - z = z - z.$$

Anche in questo caso

o $x \in z - z$

o $x - x = z - z$.

Infatti $x \notin z - z \Rightarrow x \in -z + \{I_p(x)\} \cup \{x\} \cup \{-z\}$

$x \in -z + I_p(x) \Rightarrow x = -z \quad A$

$x \in -z + x \Rightarrow z \in x - x \Rightarrow z - z \subset x - x$

$x \in -z - z \Rightarrow -x = x \in z + z$

$z \in x - z \Rightarrow z + x \subset x + x - z = -z$

Dunque

$z + x = -z$ e si ha $z + z \ni x$

D'altra parte

$z + z \ni z \Rightarrow z + z = z, \quad A$

$z + z \ni a \in I_p(x) \Rightarrow z = -z \quad A$

Sia $z + z \ni -z$ allora $z + z - z \supset -z - z$

ne segue $z - z - z$ da cui $z + z = -z \quad A$

Quindi $z + z = x$ perciò $-z - z = x$ e

$z - z = z + z + x = x + x = I_p(x).$

Nel caso 16) a seconda che si supponga $3 \in 5 \circ 5$, o $3 \circ 4 = 5 \circ 5$ si ottengono rispettivamente gli ipergruppi (a) e (b)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		2	0	3	4	5
2			1	3	4	5
3				4	0, 1, 2	5
4					3	5
5						H_5

a) (9)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		2	0	3	4	5
2			1	3	4	5
3				5	0,1,2	4
4					5	3
5						0,1,2

b) (4)

Nel caso 17), a seconda che si supponga $3 \in 4 \circ 5$, o $4 \circ 5 = 3 \circ 3$ si ottengono gli ipergruppi (c) e (d)

(c)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		2	0	3	4	5
2			1	3	4	5
3				0, 1, 2	4	5
4					5	0,1,2,3
5						4

(10)

(d)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		2	0	3	4	5
2			1	3	4	5
3				0, 1, 2	5	4
4					3	0, 1, 2
5						3

(4)

18)

Sia per $1 < k < 5$, $I_{ps}(k) = I_p(k) = \{0, 1\}$

Inoltre si supponga $4 \circ 4 \ni 0$

Si ha : $1 \circ 5 = k \Rightarrow 5 = 1 \circ k = k \quad A$

Perciò $1 \circ 5 = 5$ e quindi $\{0, 1\} \subset 5 \circ 5$

Inoltre $4 \circ 5 \cap \{0, 1, 4\} = \emptyset$

Sia ora $4 \circ 5 \ni 2$, allora $5 \in 2 \circ 4$ e anche $5 \in (-2) \circ 4$

Risulta : $2 = 2 \circ (4 \circ 4) = (2 \circ 4) \circ 4 \supset 5 \circ 4$, ne segue $5 \circ 4 = 2$ e anche $5 \circ 4 = -2$.

Perciò $2 = -2$.

Si vede analogamente che $4 \circ 5 \ni 3$ implica $4 \circ 5 = 3$;

quindi $4 \circ 5 \neq \{2, 3\}$

D'altra parte si ha $3 \circ 4 \cap \{0, 1, 3, 4\} = \emptyset$

Supponiamo $4 \circ 5 = 2$, allora $3 \circ 4 \ni 5 \Rightarrow 3 \in 4 \circ 5 \quad A$.

quindi $3 \circ 4 = 2$ da cui $3 \in 2 \circ 4$ e perciò $2 \circ 4 = \{3, 5\}$.

Ne segue $(2 \circ 4) \circ 5 = 3 \circ 5 \cup 5 \circ 5$

$2 \circ (4 \circ 5) = \{0, 1\}$

Allora $3 \circ 5 \ni 1$ da cui $5 \in 1 \circ 3 = 3 \quad A$.

Dunque $4 \circ 5 = 5$, analogamente si vede che $2 \circ 5 = 3 \circ 5 = 5$
e allora $5 \circ 5 = H_5$.

a) Consideriamo il caso $2 = -2$;
poichè $2 \circ 3 \cap \{0, 1, 2, 3, 5\} = \emptyset$, poniamo $2 \circ 3 = 4$ e analogamente
 $2 \circ 4 = 3, 3 \circ 4 = 2$. Verificando l'associatività si ottiene l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			0, 1	4	3	5
3				0, 1	2	5
4					0, 1	5
5						H ₅

(11)

b) Sia ora $-2 = 3$. Si ha $2 \circ 4 = 3$ e $3 \circ 4 = 2$.

Se $2 \circ 2 = 3$, allora $(2 \circ 2) \circ 4 = 3 \circ 4 = 2$ e $2 \circ (2 \circ 4) = 2 \circ 3 = \{0, 1\}$

Poniamo dunque $2 \circ 2 = 3 \circ 3 = 4$.

Verificando l'associatività si ottiene perciò l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			4	0, 1	3	5
3				4	2	5
4					0, 1	5
5						H_5

(12)

19) Sia $I_p(2) = I_{ps}(2) = I_{ps}(3) = I_p(3) = \{0, 1\}$

e $|I_p(4)| > 2 < |I_p(5)|$

Si ha $2 \circ 3 \cap \{2, 3\} = \emptyset$

inoltre $\left. \begin{array}{l} k > 3 \\ h \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \circ k = h \Rightarrow k = h \quad A$

Si supponga inoltre $4 \circ 4 \ni 0$ da cui $5 \circ 5 \ni 0$

Se $1 \circ 4 = 5$, allora $1 \in 4 \circ 5$

$4 \circ 4 \ni 1 \Rightarrow 4 = 1 \circ 4 = 5 \quad A$

$4 \circ 4 \ni h \in \{2, 3\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = 1 \circ 4 \in 1 \circ h \circ 4 = h \circ 4 \\ 4 = 4 \circ h \end{array} \right. \quad A$

$4 \circ 4 \ni 5 \Rightarrow 4 = 4 \circ 5 \quad A$

dunque $4 \circ 4 = 0 \quad A$

Dunque poichè $1 \circ 4 \cap \{0, 1, 2, 3, 5\} = \emptyset$ si ha $1 \circ 4 = 4$ e quindi

$4 \circ 4 \supset \{0, 1\}$, analogamente si ottiene $5 \circ 5 \supset \{0, 1\}$

Se supponiamo $4 \circ 4 \cap \{2, 3\} = \emptyset$, allora $4 \circ 4 = \{0, 1, 5\}$

ne segue $4 = 4 \circ 5$ e quindi $4 \circ 4 = \{0, 1, 5\} = 4 \circ 4 \circ 5 = 5 \circ 5 \cup \{5\}$

perciò $5 \circ 5 = \{0, 1\}$ A

Sia allora $4 \circ 4 \ni 2$ ne segue $4 = 2 \circ 4$

a) Supponiamo $4 \circ 4 = \{0, 1, 2\}$, in questo caso $3 \circ 4 \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} = \emptyset$
quindi $3 \circ 4 = 5$, da cui $4 \in (-3) \circ 5$.

i) Sia $2 \circ 2 \ni 0$, allora $2 \circ 3 \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} = \emptyset$ da cui $2 \circ 3 = 5$, quindi
 $2 \in 3 \circ 5$ e perciò $3 \circ 5 = \{2, 4\}$.

Quindi $2 \circ (3 \circ 5) = 2 \circ \{2, 4\} = \{0, 1, 4\}$, $(2 \circ 3) \circ 5 = 5 \circ 5$,

ne segue $5 \circ 5 = \{0, 1, 4\}$.

D'altra parte $5 \circ 5 \ni 4 \Rightarrow 5 \in 4 \circ 5 \Rightarrow 5 = 4 \circ 5$, ma

$3 \circ 4 = 5 \Rightarrow 3 \in 4 \circ 5$ A

ii) Sia ora $2 \circ 3 \ni 0$. Allora si ha :

$$2 \circ 2 \ni 4 \Rightarrow 2 \in 3 \circ 4 \Rightarrow 3 \in 2 \circ 4 \quad A$$

$$2 \circ 2 \ni 5 \Rightarrow \begin{cases} (2 \circ 2) \circ 3 \supset 5 \circ 3 \Rightarrow 3 \circ 5 = 2 \Rightarrow 2 \circ 5 = 3 \\ 2 \circ (2 \circ 3) = 2 \end{cases}$$

ma si ha anche $(2 \circ 3) \circ 4 = 4$

$$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 5 = 3 \quad A$$

Dunque l'ipotesi $4 \circ 4 = \{0, 1, 2\}$ e' da scartare.

b) Sia allora $4 \circ 4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Poichè manifestamente $5 \circ 4 \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} = \emptyset$, si ha $5 \circ 4 = 5$.

D'altra parte $2 \circ 3 = 5 \Rightarrow (2 \circ 3) \circ 4 = 5 \circ 4 = 5$

ma $2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 4 = 4$. perciò $2 \circ 3 \cap \{2, 3, 5\} = \emptyset$.

Inoltre $2 \circ 3 \ni 4 \Rightarrow 3 \in (-2) \circ 4 = 4 \quad A$

Ne segue $2 \circ 3 = \{0, 1\}$, da cui $3 \circ 3 = 2$, $2 \circ 2 = 3$.

Si ottiene così l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			3	0,1	4	5
3				2	4	5
4					0,1,2,3	5
5						H_5

(13)

20) Sia ora $I_{ps}(2) = I_{ps}(3) = I_p(2) = I_p(3) = \{0,1\}$ e

$$I_p(4) = 4 \circ 5 \quad |I_p(4)| > 2$$

Sia $4 \circ 5 \ni 2$.

$$4 \circ 5 \supset I_p(2) = 2 \circ (-2).$$

Si supponga $3 \circ 4 = 5$, allora $3 \in 5 \circ 5$. Se $5 \circ 5 \ni 4$, segue

$$5 = 5 \circ 5 \circ 4 \supset 4 \circ 4 \quad \text{da cui } 4 \circ 4 = 5 \quad \text{ma } 3 \in 5 \circ 5 \Rightarrow 4 \circ 4 \ni -3 \neq 5,$$

perciò $5 \circ 5 = 3$ da cui $4 \circ 4 = -3$.

Inoltre $4 \circ 5 \ni 3 \Rightarrow 4 = 3 \circ 4$, quindi si ha $4 \circ 5 = \{0,1,2\}$ e di conseguenza

$$-2 = 2, \quad -3 = 3.$$

Ma allora $2 \circ 3 \cap \{0,1,2,3,4,5\} = \emptyset$ dunque $3 \circ 4 = 4$ da cui $4 \circ 5 = \{0,1,2,3\}$

ne segue $4 \circ 4 = 5$, $5 \circ 5 = 4$. Inoltre poichè $2 \circ 3 \cap \{2,3\} = \emptyset$, si ha

$2 \circ 3 = \{0,1\}$. Si ottiene l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			3	0, 1	4	5
3				2	4	5
4					5	0,1,2,3
5						4

(14)

21)

Sia ora $I_{ps}(2) = \{0,1\} = I_p(2)$, e se $k > 2$. $|I_p(k)| > 2$

a) Supponiamo $3 \circ 3 \cap 4 \circ 4 \ni 0$ (da cui $5 \circ 5 \ni 0$).

Se $4 \circ 4 \ni 3$ e $4 \circ 4 \not\ni 2$, allora otteniamo $3 \circ 4 = 4 \neq 2 \circ 4$

allora $2 \circ 4 \cap \{0,1,2,4\} = \emptyset$, quindi $2 \circ 4 \subset \{3,5\}$

$2 \circ 4 \ni 3 \Rightarrow 2 \in 3 \circ 4$ A

$2 \circ 4 = 5 \Rightarrow 5 = 2 \circ 4 = 2 \circ 4 \circ 3 = 5 \circ 3 \Rightarrow 5 \circ 5 \ni 3$.

Inoltre $2 \circ 4 = 5 \Rightarrow 2 \circ 5 \ni 4$ e poichè $2 \circ 5 \cap \{0,1,2,3,5\} = \emptyset$,

si ha $2 \circ 5 = 4$.

D'altra parte si ha $5 = 2 \circ 4 \Rightarrow 1 \circ 5 = 1 \circ 2 \circ 4 = 2 \circ 4 = 5$.

$4 = 2 \circ 5 \Rightarrow 1 \circ 4 = 1 \circ 2 \circ 5 = 2 \circ 5 = 4$

Allora $4 \circ 4 = 2 \circ 5 \circ 4 = 5 \circ 5 = \{0,1,3\}$.

Si ha anche $4 \circ 5 \ni 2$ e $4 \circ 5 = \{0,1,3,4,5\} = \emptyset$.

Dunque $4 \circ 5 = 2$

Perciò $5 \circ 5 = 2 \circ 4 \circ 5 = 2 \circ 2$ A.

Si perviene evidentemente a un assurdo anche supponendo, posto

$$\{3,4,5\} = \{x,y,z\}, \quad y \in x \circ x \ni 2$$

Dunque resta da esaminare il caso $3 \circ 3 \cap 4 \circ 4 \cap 5 \circ 5 \ni 2$

Se fosse $1 \circ n = y$, si avrebbe $x = 2 \circ x = 2 \circ 1 \circ x = 2 \circ y = y$ A

Percio' $\forall k > 2, \quad k \circ k \supset \{0,1,2\}$

i) Sia ora $x \circ y \ni z$, allora $x \circ x \circ y \supset x \circ z$. Supponiamo

$$|y \circ y| \geq |x \circ x| \leq |z \circ z|.$$

Allora $x \circ x = \{0,1,2\}$, in questo caso $y = x \circ z$, di qui

$y \circ x = z$ e $y \circ y \circ x = z \circ y$ da cui $x \in z \circ y$

Poichè allora $z \circ y \cap \{z,y,0,1,2\} = \emptyset$, segue $z \circ y = x$

Percio' $x \circ x = x \circ z \circ y = y \circ y = z \circ z$

Dunque si ottiene l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			0,1	3	4	5
3				0, 1, 2	5	4
4					0, 1, 2	3
5						0, 1, 2

(15)

ii) Sia ora $x \circ y = y$, allora $x \in y \circ y$

Inoltre, poichè' $y \circ z = x \Rightarrow z \in y \circ x = y$, si ha $y \circ z \in \{y,z\}$

Supponiamo $y \circ z = z$, allora $y \in z \circ z$ e $x \circ z = x \circ y \circ z = y \circ z = z$,

dunque si ottiene l'ipergruppo.

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			0, 1	3	4	5
3				0, 1, 2	4	5
4					0, 1 2, 3	5
5						H_5

(16)

b) Sia ora $3 \circ 4 \ni 0$ da cui $3 \circ 4 = I_p(3)$. Segue anche $5 \circ 5 \ni 0$.

Supponiamo $3 \circ 4 \ni 5$ e $3 \circ 4 \not\ni 2$ allora $3 = 3 \circ 5$,

$4 = 4 \circ 5$, $5 \circ 5 \not\ni 3$, $3 \neq 2 \circ 3$.

Poiche' per ipotesi $|5 \circ 5| > 2$, e $5 \circ 5 \cap \{3, 4, 5\} = \emptyset$

si ha $5 \circ 5 = \{0, 1, 2\}$.

Inoltre $3 \circ 4 \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset$, allora $3 \circ 4 = \{0, 1, 5\}$. Ne segue

$(3 \circ 4) \circ 5 = \{0, 1, 5\} \circ 5 = \{5, 0, 1, 2\}$

$3 \circ (4 \circ 5) = 3 \circ 4 = \{0, 1, 5\}$.

Dunque $3 \circ 4 \ni 2$ ne segue

$2 \circ 3 = 3$, $2 \circ 4 = 4$, se fosse $1 \circ 3 = 4$ si avrebbe

$2 \circ 1 \circ 3 = 2 \circ 4$ da cui $3 = 2 \circ 4$ A

i) Se si suppone $3 \circ 4 \ni 5$ segue $1 \circ 3 \neq 5$ e percio' $3 \circ 4 = \{0, 1, 2, 5\}$

allora $5 \circ 5 = \{0, 1, 2\}$ e si ottiene l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			0, 1	3	4	5
3				4	0, 1, 2, 5	3
4					3	4
5						0, 1, 2

(17)

ii) Sia ora $3 \circ 4 \neq 5$, allora $3 \circ 4 = \{0, 1, 2\}$

E' chiaro che $5 \circ 5 \supset \{0, 1, 2\}$

D'altra parte $3 \circ 5 \cap \{0, 1, 2, 3\} = \emptyset$

u) Se $3 \circ 5 = 5$ si ottiene l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			0, 1	3	4	5
3				4	0, 1, 2	5
4					3	5
5						H_5

(18)

v) Sia ora $3 \circ 5 = 4$, allora $3 = 4 \circ 5$ e $5 \in 4 \circ 4$.

da cui $5 \in 3 \circ 3$.

Inoltre $4 \circ 4 \cap \{0,1,2,4\} = \emptyset$ e si ha $4 \circ 4 \ni 3 \Rightarrow 5 \circ 4 \circ 3 = 3 \circ 4 \supset 5 \circ 3 = 4$ A

Dunque $4 \circ 4 = 5 = 3 \circ 3$

Allora $4 \circ 4 \circ 5 = 5 \circ 5 = 4 \circ 3 = \{0,1,2\}$

Si ottiene perciò l'ipergruppo

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1		0	2	3	4	5
2			0, 1	3	4	5
3				5	0, 1, 2	4
4					5	3
5						0, 1, 2

(19)

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. BONANSINGA - *Un teorema su gli ipergruppi canonici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 57, (1981).
- [2] P. BONANSINGA, P. CORSINI - *Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi*, BUMI, 1-B, (1982).
- [3] P. CORSINI - *Hypergroupes et groupes ordonnés*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 48, (1973).
- [4] P. CORSINI - *Homomorphismes d'hypergroupes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 52, (1974).
- [5] P. CORSINI - *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi*, BUMI, 2-A, (1983).
- [6] P. CORSINI - *Sugli ipergruppi canonici finiti con identità parziali scalari*, in corso di stampa su Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
- [7] P. CORSINI - *Prolegomeni alla teoria degli ipergruppi* - Quaderni dell'Istituto di Matematica, Informatica e Sistemistica dell'Università degli Studi di Udine (1986).
- [8] J. MITTAS - *Hypergroupes canoniques, valués et hypervalués. Hypergroupes fortement et supérieurement canoniques*, Math Balk, 8, (1978).
- [9] Y. SUREAU - *Thèse de Doctorat d'Etat (contribution à la théorie des hypergroupes, etc.)* Université de Clermont II (1980).

Reçu le 26 janvier 1987.

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 Aubière, France.

Indirizzo dell'autore : Istituto di Matematica, Informatica e Sistemistica, Via Zanon 6, 33100 UDINE.