ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LANDO DEGOLI

Sulla caratteristica della jacobiana dei sistemi lineari irriducibili di quadriche

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 65-79

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_65_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 24, pp. 65-79

SULLA CARATTERISTICA DELLA JACOBIANA DEI SISTEMI LINEARI IRRIDUCIBILI DI QUADRICHE

Lando DEGOLI

Summary :

A necessary and sufficient condition is shown in ordre that a linear system of quadrics in S_r, irreducible of first and second kind, has a Jacobien with characteristic $\underline{r - k}$.

1 - Nello spazio lineare complesso di S_r dicoordinate proiettive x_i $(i = 0, 1, ..., r)$ si assumano $d+1$ quadriche linearmente indipendenti :

$$f_0 = 0, f_1 = 0, ..., f_d = 0$$

con :

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \qquad (a_q^{ik} = a_q^{ki})$$

Il sistema lineare $L_{d/m}$ di dimensione d e Jacobiana di caratteristica m è espresso dall'equazione :

$$\sum_{q=0}^{d} \rho_q f_q = 0$$

mentre la matrice Jacobiana ad $r+1$ righe e $d+1$ colonne :

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \qquad \begin{pmatrix} q = 0, 1, ..., d \\ i = 0, 1, ..., r \end{pmatrix}$$

si suppone abbia caratteristica m.

Sovente porremo, quando $m < r$, $m = r - k$ e il sistema sarà indicato con $L_{d/r-k}$.

Quando la Jacobiana è indenticamente nulla, l'intero S_r è luogo di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche del sistema. Se la Jacobiana è di caratteristica $r - k$ un punto generico P è coniugato con un S_k.

Il problema di determinare i sistemi lineari di quadriche $L_{d/r-k}$ è piuttosto complesso in quanto i sistemi subordinati presenti in $L_{d/r-k}$ sono didiversa natura.

Per riuscire a dare una risposta definitiva a tale annosa questione abbiamo suddiviso i sistemi in : *riducibili e irriducibili* e questi ultimi in : *irriducibili di prima, di seconda e di terza specie.*

Diremo che un sistema lineare di quadriche $L_{d/m}$ è *riducibile* quando esistono in esso dei sistemi subordinati, privi di quadriche in comune :

$$L_{d_1/m_1}\ ,\ L_{d_2/m_2}\ ,\ \dots\ ,\ L_{d_s/m_s}$$

ed eventualmente p $(p \geq 0)$ quadriche funzionalmente indipendenti, in modo da soddisfare alle uguaglianze :

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_s + s + p - 1$$

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_s + p$$

In caso contrario sarà detto *irriducibile.*

Diremo che il sistema lineare $L_{d/m}$ è *irriducibile di prima specie* quando tutti i suoi sistemi subordinati :

$$L_{d_1/m_1}\ ,\ L_{d_2/m_2}\ ,\ \dots\ ,\ L_{d_s/m_s} \qquad (m_i \leq d_i)$$

soddisfano alla disuguaglianza :

$$m_i \geq m \qquad (i = 1, \dots, s)$$

Lemma

Se il sistema $L_{d/m}$ non è riducibile e nemmeno irriducibile di prima specie allora esistono in esso dei sistemi subordinati :

$$L_{d_1/m_1}\ ,\ L_{d_2/m_2}\ ,\ \dots\ ,\ L_{d_s/m_s} \qquad (m_i \leq d_1)$$

che formano una catena nel senso che L_{d_1} ha almeno una quadrica in comune con un altro, ad esempio L_{d_2} , il loro sistema unione L_a ha almeno una quadrica in commune con un terzo, ad es. L_{d_3} , il sistema L_b unione di L_a con L_{d_3} , ha almeno una quadrica in comune con un quarto e così via fino ad esaurire tutto L_d.

Dimostrazione

Consideriamo un sistema $L_{d/m}$, che non sia riducibile e nemmeno irriducibile di prima specie. Allora esso possiederà almeno un sistema subordinato L_{d_1/m_1} $(m_1 \leq d_1)$ con $m_1 < m$.

Consideriamo le $d\text{-}d_1$ quadriche restanti, che formano un sistema $L_{d-d_1-1/p}$ ed osserviamo che p non può essere $m - m_1$, altrimenti il numero delle quadriche funzionalmente indipendenti di $L_{d/m}$ sarebbe : $m_1 + p < m_1 + (m\text{-}m_1)$, ossia : $m_1 + p < m$, mentre esse sono : m.

Non può nemmeno essere $p = m\text{-}m_1$ perchè i due sistemi subordinati L_{d_1/m_1} ed $L_{d-d_1-1/p}$, non aventi quadriche in comune, soddisferebbero alle uguaglianze :

$$d_1 + (d\text{-}d_1 - 1) + 1 = d$$

$$m_1 + p = m$$

e perciò $L_{d/m}$ sarebbe riducibile contro l'ipotesi.

Dunque dev'essere $p > m - m_1$. Ciò significa che qualche quadrica tra le $d - d_1$ rimanenti ha un legame funzionale con almeno una quadrica di L_{d_1/m_1}, altrimenti il numero delle quadriche funzionalemente indipendenti di $L_{d/m}$ sarebbe $> m$, il che è impossibile.

Perciò esiste un sistema L_{d_2/m_2}, che ha delle quadriche in comune con L_{d_1/m_1}. Indichiamo con $L_{a/n}$ il sistema-unione di L_{d_1/m_1} e di L_{d_2/m_2} e consideriamo le d-a quadriche rimanenti di $L_{d/m}$ linearmente indipendenti. Queste quadriche formano un sistema $L_{d-a-1/q}$ con $q > m\text{-}n$ per gli stessi motivi di prima.

Perciò esisterà un sistema L_{d_3/m_3} che avrà qualche quadrica in comune con $L_{a/n}$, mentre le altre apparterranno ad $L_{d-a-1/q}$.

Proseguendo in tal modo si giunge ad esaurire tutto il sistema lineare $L_{d/m}$.

Dunque $L_{d/m}$ risulta un sistema irriducibile nel quale :

$$L_{d_1/m_1}\ ,\ L_{d_2/m_2}\ ,\ L_{d_3/m_3}\ ,\ \dots\dots\dots$$

formano una catena.

Entro L_d potrà anche esistere più di una catena.

2 - Tra i sistemi subordinati L_{d_1/m_i} $(m_i \leq d_i)$ di un sistema lineare di quadriche $L_{d/m}$, ve ne sono alcuni di particolare importanza del tipo $L_{h/h}$ $(h \leq m)$.

Infatti poichè le quadriche linearmente indipendenti del sistema $L_{d/m}$ sono $d + 1$ e quelle funzionalmente indipendenti sono m, ciò significa che devono esistere :

$$s = d - m + 1$$

legami funzionali compatibili e indipendenti tra le quadriche del tipo :

$$F(f_0, f_1, \dots, f_h) = 0 \qquad (1 < h \leq d + 1)$$

Le quadriche che compaiono in ognuno di questi legami individuano un sistema subordinato di $L_{d/m}$ del tipo $L_{h/h}$ $(h \leq m)$.

Dagli s legami è possibile in :

$$\binom{d+1}{d-m+1} = \binom{d+1}{m}$$

modi estrarre d-m+1 quadriche in funzione delle rimanenti m quadriche tutte funzionalemente indipendenti.

Possono darsi due casi :

a) Tra le $\binom{d+1}{m}$ combinazioni ve n'è una almeno in cui le $d - m + 1$ quadriche risultano funzioni di *tutte* le altre m quadriche funzionalmente indipendenti, e perciò questi sistemi lineari subordinati sono tutti del tipo $L_{m/m}$.

In ciascuno di essi, ferme restando le m quadriche funzionalmente indipendenti, compaiono di volta in volta successivamente tutte le altre d-m+ 1 quadriche. Quando ciò accade il sistema $L_{d/m}$ sarà detto *irriducibile di seconda specie.*

b) Se il fatto precedente non succede, allora compaiono in tutte le $\binom{d+1}{m}$

combinazioni relative ai sistemi subordinati dei sistemi $L_{h/h}$ con $h < m$.

In tal caso il sistema $L_{d/m}$ sarà detto *irriducibile di terza specie.*

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare di quadriche L_d ($d \leq r$) di S_r, irriducibile di prima o di seconda specie, sia a Jacobiana di caratteristica $r - k$ ($k \geq 0$) è che le quadriche del sistema che passano per un punto generico di S_r abbiano in comune un S_{k+1}.

Dimostrazione

Dimostriamo innanzitutto la sufficienza.

Se tutte le quadriche di un sistema lineare L_d di S_r, che passano per un punto generico P, hanno in comune un S_{k+1} è evidente che il punto P ha per coniugato lo stesso S_{k+1} rispetto a tutte le quadriche del sistema L_{d-1}, passanti per P. Un'altra quadrica di L_d, non passante per P, non contiene ovviamente l' S_{k+1} il quale non giace nemmeno nell'iperpiano polare di P rispetto a questa quadrica, altrimenti P starebbe nella quadrica. Perciò l'iperpiano taglierà l'S_{k+1} in un S_k e quindi il punto P ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche del sistema L_d.

Ciò significa che la Jacobiana è di caratteristica $r - k$, come volevasi dimostrare.

Dimostriamo ora la necessità.

Consideriamo il caso particolare $k = 0$ e dimostriamo per ora che :

«*Se il sistema L_d irriducibile di prima o di seconda specie è a Jocobiana di caratteristica r, le quadriche del sistema che passano per un punto generico di S_r hanno in comune una retta.*

Facciamo innanzitutto l'ipotesi che *il sistema lineare sia irriducibile di prima specie.*

Se la Jacobiana è di caratteristica r significa che tutti i determinanti d'ordine $r+1$ estratti dalla matrice sono identicamente nulli.

Consideriamo il determinante individuato da $r+1$ quadriche qualsiasi. Potremo scegliere, senza nuocere alla generalità, le prime $r+1$ quadriche del sistema e si avrà :

$$D = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, ..., r \\ s = 0, 1, ..., r \end{pmatrix} \qquad (1)$$

I minori di ordine r estratti da qualsiasi matrice formata con r colonne del determinante D non sono tutti nulli, altrimenti esisterebbe entro $L_{d/r}$ il sistema subordinato $L_{r-1/r-1}$ contro l'ipotesi che L_d sia irriducibile di prima specie. E' dunque necessario che uno almeno di questi numeri si a $\neq$ 0. Possiamo supporre che sia il minore ottenuto eliminando da D l'ultima riga e l'ultima colonna : lo indichiamo con A_r. Prendiamo in considerazione la matrice estratta da D formata con le prime r righe ed indichiamo con :

$$A_0 , A_1 , \ldots, A_{r-1}$$

i minori d'ordine r che si ottengono sostituendo alla prima, seconda ecc. colonna di A_r l'ultima colonna della matrice, combiata di segno.

Poichè il determinante D è identicamente nullo le r + 1 quadriche sono funzionalmente dipendenti. Si avrà, scegliendo una quadrica generica, ad esempio f_r :

$$f_r = F(f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}) \qquad (2)$$

Questa relazione vale comunque si scelgano le r + 1 quadriche linearmente indipendenti in seno ad L_d. Ma non è mai possibile che gruppi di quadriche linearmente indipendenti di L_d in numero < r + 1 siano funzionalmente dipendenti, altrimenti esisterebbe entro L_d almeno un sistema subordinato L_{d_1/m_1} con m_1 < r contro l'ipotesi.

Quindi una eguaglianza analoga alla (2) è impossibile con un numero di quadriche linearmente indipendenti < r + 1.

Derivando la (2), si ottiene :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, r\text{-}1) \qquad (3)$$

Sistema di primo grado da cui si ricavano le derivate parziali di F :

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} = -\frac{A_i}{A_r} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r\text{-}1) \qquad (4)$$

Consideriamo un punto x di S_r di coordinate $x_0 , x_1 , \ldots\ldots, x_r$ e sia

$x'(x'_0, x'_1, \dots, x'_r)$ il suo coniugato rispetto a tutte le quadriche del sistema. La retta che unisce i due punti è data da :

$$y_i = t_1 x_i + t_2 x'_i \qquad (i = 0, 1, \dots, r) \tag{5}$$

Sostituendo le (5) in tutte le quadriche si ottiene per la quadrica generica f_m :

$$f_m(y) = f_m(x)\, t_1^2 + f_m(x')\, t_2^2 \qquad (m = 0, 1, \dots, r) \tag{6}$$

perchè i termini $2\, a_m^{ik}\, x_i\, x'_k$ sono nulli essendo coniugati i punti x e x'.

Sostituendo le (6) nelle (2) e quindi derivando rispetto a t_1 e t_2 si ha :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial t_1} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_r}{\partial t_2} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial t_2} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Derivando le (6) si ha :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial t_1} &= 2\, t_1 f_m(x) \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_2} &= 2\, t_2 f_m(x') \end{aligned} \qquad (m = 0, 1, \dots, r)$$

Sostituendo nelle (7) :

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} f_s(x) \\ f_r(x') &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} f_s(x') \end{aligned}$$

e infine per la (4) :

$$\sum_{i=0}^{r} A_i f_i(x) = 0 \qquad (8)$$
$$\sum_{i=0}^{r} A_i f_i(x') = 0$$

Le (8) sono delle identità rispetto a t_1 e t_2. Perchè queste due identità coesistano occorre e basta che sia :

$$f_m(x) = c\, f_m(x') \qquad (m = 0, 1, ..., r)$$

con c costante nel nulla.

Infatti nelle (8) le variabili t_1 e t_2 compaiono soltanto nei determinanti $A_0, A_1, ..., A_{r-1}, A_r$ che risultano anche funzioni omogenee dello stesso grado in t_1 e t_2 ed inoltre sappiamo che uno solo al massimo è nullo.

Al rapporto t_1 / t_2 si possono dare infiniti valori a piacere ed in particolare si possono fissare i valori in corrispondenza dei quali ciascuna delle (8) dà origine ad un sistema algebrico di primo grado ad r equazioni ed r incognite.

Queste ultime in entrambi i sistemi risultano gli r rapporti delle $f_k(x)$ od $f_k(x')$ rispetto ad una qualunque di esse, ad esempio rispetto ad $f_r(x)$ ed $f_r(x')$. Si tratta cioè rispettivamente dei rapporti :

$$f_k(x) / f_r(x) \;;\; f_k(x') / f_r(x') \qquad (k = 0, 1, ..., r-1) \qquad (9)$$

Poichè i coefficienti ed i termini noti di queste equazioni sono sempre gli stessi $A_0, A_1, ..., A_{r-1}, A_r$ in entrambi i sistemi, le due soluzioni che si ottengono saranno le stesse. Si avrà :

$$\frac{f_k(x)}{f_r(x)} = \frac{f_k(x')}{f_r(x')} \qquad (k = 0,1, ..., r-1) \quad (10)$$

Ma tale uguaglianza è verificata solo se :

$$f_p(x) = cf_p(x') \qquad (p = 0, 1, ..., r) \qquad (11)$$

Con c costante non nulla.

A rigore nel caso che uno degli A_i $(i = 0, 1, ..., r)$ delle (8), ad esempio A_j $(0 \leq j < r)$, fosse nullo non sarebbe possibile per la sola quadrica f_j dedurre che :

$$f_j(x) = cf_j(x')$$

Ma, in tal caso, consideriamo tutte le r quadriche, le cui derivate parziali compaiono in A_j e la matrice formata con le colonne del determinante D, in cui compaiono dette quadriche.

Sappiamo che almeno un determinante di detta matrice è non nullo. Denominiamo quest'ultimo con A'_r e ripetiamo il ragionamento già fatto usando al posto di A_r il determinante A'_r. Otterremo così i determinanti :

$$A'_0\,, A'_1\,, ..., A'_{r-1}\;\; A'_r$$

e giungeremo a conclusioni analoghe, cioè alle formule :

$$\sum_{i=0}^{r} A'_i\, f_i(x) = 0 \qquad\qquad (i = 0, 1, ..., r) \qquad\qquad (12)$$
$$\sum_{i=0}^{r} A'_i\, f_i(x') = 0$$

Ma questa volta anche la quadrica f_j soddisfa alle (12) perchè A'_r non è nullo. Ripetendo il ragionamento per ogni $A_j = 0$ si ottiene sempre lo stesso risultato. Pertanto ogni eccezione è rimossa.

Se ne deduce che tutte le quadriche del sistema L_d che passano per un punto x, passano anche per il suo coniugato x' e reciprocamente. Se x è situato nella quadrica f_p si avrà :

$$f_p(x) = 0$$

e per le (15) :

$$f_p(x') = 0$$

e quindi :

$$t_1^2\, f_p(x) + t_2^2\, f_p(x') = 0$$

e per la (6) :

$$f_p(y) = 0$$

dove y è il punto generico della retta x x'.

Dunque la retta in questione appartiene alla quadrica f_p. Se ne deduce che tutte le quadriche che passano per x contengono la retta x x'.

Ora supponiamo che il sistema lineare sia irriducibile di seconda specie sempre nell'ipotesi che la caratteristica sia $r \leq d$.

Esisteranno quindi $d - r + 1$ legami tras le $d + 1$ quadriche, da cui dovrà essere possibile estrarre $d - r + 1$ quadriche, ad esempio :

$$f_r, f_{r+1}, \dots, f_d$$

in funzione delle altre r quadriche funzionalmente indipendenti :

$$f_0, f_1, \dots, f_{r-1}$$

in modo che in ogni equazione compaiano tutte le r quadriche funzionalmente indipendenti. Si otterranno così $d - r + 1$ sistemi subordinati del tipo $L_{r/r}$ in ognuno dei quali, ferme restando le r quadriche funzionalmente indipendenti, compariranno successivamente tutte le altre.

Ognuno di questi sistemi lineari $L_{r/r}$ risulta irriducibile di prima specie. Infatti esso non possiede sistemi subordinati L_{d_i/m_i} con $m_i < r$ perchè, se così fosse o le r quadriche $f_0, f_1, \dots, f_r$ funzionalmente indipendenti risulterebbero legate tra loro, il che è assurdo, oppure alcune di esse sarebbero legate con una delle quadriche $f_r, f_{r+1}, \dots, f_d$ e questa quadrica risulterebbe funzione di un numero delle prime $< r$, contro l'ipotasi che il sistema sia irriducibile di seconda specie.

Questi sistemi subordinati $L_{r/r}$ possono essere evidenziati dalle equazioni :

$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_{r-1} f_{r-1} + \mu_r f_r = 0$$
$$\nu_0 f_0 + \nu_1 f_1 + \dots + \nu_{r-1} f_{r-1} + \nu_{r+1} f_{r+1} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_0 f_0 + \sigma_1 f_1 + \dots + \sigma_{r-1} f_{r-1} + \sigma_d f_d = 0$$

mentre il sistema $L_{d/m}$ risulterà :

$$\rho_0 f_0 + \rho_1 f_1 + \dots + \sigma_{r-1} f_{r-1} + \rho_r f_r + \rho_{r+1} f_{r+1} + \dots + \rho_d f_d = 0$$

Se imponiamo alle quadriche questi sistemi di passare per un punto generico P di S_r, eliminando μ_0, ν_0, σ_0, ρ_0 si avrà :

$$\sum_{q=1}^{r-1} \mu_q \left(f_q - \frac{f_q(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \mu_r\left(f_r - \frac{f_r(P)}{f_0(P)} f_0\right) = 0$$

$$\sum_{q=1}^{r-1} \nu_q \left(f_q - \frac{f_q(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \nu_{tr+1}\left(f_{r+1} - \frac{f_{r+1}(P)}{f_0(P)} f_0\right) = 0 \qquad (13)$$

....

$$\sum_{q=1}^{r-1} \sigma_q \left(f_q - \frac{f_q(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \sigma_d\left(f_d - \frac{f_d(P)}{f_0(P)} f_0\right) = 0$$

e infine :

$$\sum_{q=1}^{d} \rho_q \left(f_q - \frac{f_q(P)}{f_0(P)} f_0\right) = 0$$

dove con $f_i(P)$ $(i = 0, 1,\dots,d)$ abbiamo indicato i valori complessi che assumono le quadriche nel punto P.

In tutte queste equazioni le quadriche sono sempre le stesse.

Per la prima parte del teorema le quadriche di ciascuno dei sistemi subordinati che passano per P hanno in comune una retta per P.

Questa retta è sempre la stessa in tutti i sistemi.

Infatti se così non fosse, indichiamo con p_1 e p_2 due rette comuni alle quadriche di due qualsiasi sistemi lineari, ad esempio il primo ed il secondo.

Il sistema subordinato individuato dalle quadriche funzionalmente indipendenti $f_0, f_1, \dots, f_{r-1}$:

$$\sum_{q=1}^{r-1} \omega_q \left(f_q - \frac{f_q(P)}{f_o(P)} f_0\right) = 0$$

per le (13) avrebbero in comune sia la retta p_1 che la retta p_2 e perciò avrebbero un piano tangente in comune : il piano $p_1 p_2$.

Ma allora il punto P rispetto alle quadriche del sistema :

$$\omega_0 f_0 + \omega_1 f_1 + \ldots + \omega_{r-1} f_{r-1} = 0$$

avrebbe per coniugato una retta e la caratteristica del sistema sarebbe r-1, ciòè le r quadriche non risulterebbero più funzionalmente indipendenti, il che è assurdo.

Quindi occorre che la retta comune per P sia sempre la stessa in tutti i sistemi. Ma se la retta è sempre la stessa e passa per tutte le quadriche di L_d aventi in comune il punto P, il teorema è dimostrato.

Supponiamo ora che la Jacobiana L_d abbia caratteristica r-k. Ciò significa che un punto x di S_r ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche di L_d.

Il sistema L_d sarà intersecato da un generico S_{r-k} che passa per x secondo un sistema lineare L'_d di quadriche di S_{r-k}, che a sua volta intersecherà l' S_k in un punto x', che risulta il coniugato di x rispetto a tutte le quadriche di L'_d.

Potremo scegliere per coordinate di S_{r-k} le $x_0, x_1, \ldots, x_{r-k}$, annullando tutte le altre coordinate, cioè scrivendo :

$$x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \ldots = x_r = 0$$

Le equazioni delle quadriche $f_0, f_1, \ldots, f_d$ di S_{r-k} saranno del tipo :

$$f_i\,(x_0, x_1, \ldots, x_{r-k}, 0, 0, \ldots, 0) = 0$$

Le derivate parziali :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_s} \qquad (i = 0, 1, \ldots, d)$$

per $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \ldots = x_r = 0$ saranno tutte nulle. La Jacobiana del sistema L'_d :

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, d \\ s = 0, 1, \ldots, r-k \end{pmatrix}$$

sarà identicamente nulla.

Essa non potrà avere caratteristica superiore ad r-k perchè il numero delle sue righe è r-k + 1, essa non potrà avere caratteristica inferiore ad r-k, altrimenti il punto x avrebbe per coniugato un S_g con $g > 0$ e non solo il punto x'.

Ne segue che il sistema L'_d di S_{r-k} ha caratteristica r-k, questo porta alla conclusion e, per la prima parte del teorema, che le quadriche di L'_d, che passano per x, avranno in comune la retta x x'.

Poichè possiamo dire la stessa cosa per tutti gli S_{r-k} che passano per x, se ne deduce che le quadriche di L_d, che passano per x, avranno in comune l' S_{k+1} congiungente il punto x con l' S_k.

In tal modo il teorema risulta completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERTINI E. *«Sui sistemi lineari»*. Rend. Istit. Lombardo - 15 (2) 1880 - Milano.

[2] BONFERRONI G. *«Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare»*. R. Acc. Scienze di Torino vol. 50 - 1914-15, 425-438.

[3] TERRACINI A. *«Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà»*. R. Acc. Scienze di Torino. 51 (1916), 55 (1919-20) 695-714 e 480-500.

[4] MURACCHINI L. *«Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria»*. (parte II), Riv. Mat. Univ. di Parma, 3 (1952), 75-89.

[5] XAMBO' S. *«On projectives varieties of minimal degree»*. Collectanea Mathematica - vol. XXXII Fasc. 2 - 1981 - Barcelona.

[6] DEGOLI L. *«Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle»*. Demonstratio Mathematica n° 3 Vol. 10 - 1983 - 723-733. Warszawa.

[7] DEGOLI L. *«Sui sistemi lineari di quadriche riducibili ed irriducibili a Jacobiana identicamente nulla»*. Collectanea Mathematica - vol. XXXV Fasc. 2 - 1984 - 131-147 - Barcelona.

Reçu en octobre 1986.

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 Aubière, France.

Indirizzo dell'autore : Via Berengario n° 82/C, 41012 CARPI (Modena) Italia.