ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

YVES SUREAU

# Normalité et théorème de Jordan-Holder en théorie des hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 75-86

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_75_0>

*Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 21, 1982, pp. 75-86*

# NORMALITE ET THEOREME DE JORDAN-HOLDER EN THEORIE DES HYPERGROUPES OPERANT TRANSITIVEMENT SUR UN ENSEMBLE

Yves SUREAU

Université de CLERMONT II

**Résumé.**

Cet article est une suite de celui intitulé «HYPERGROUPES OPERANT TRANSITIVEMENT SUR UN ENSEMBLE» (Ann. Sci. Univ. Clermont II, sér. Math., Fasc. 18, 1979, pp. 83-96). Dans un premier paragraphe on donne des résultats techniques. Puis dans le second, on définit une notion de normalité, relativement à un sous-ensemble, et l'on vérifie qu'elle est conservée (sous certaines conditions) relativement à un «translaté» et par «produit» et l'on démontre un lemme de ZASSENHAUS. Enfin, le troisième paragraphe est consacré à un théorème de raffinement de ZASSENHAUS ainsi qu'à un théorème de JORDAN-HOLDER pour des chaînes (resp. suites de compositions) normales de sous-ensembles ultra-conservatifs $M = M_o \supset M_1 \supset \dots \supset M_s$ où $M_s$ est le sous-ensemble ultra-conservatif de M engendré par un point de M.

**Introduction.**

Cet article est la suite de celui publié dans cette même revue en 1979 et intitulé «HYPERGROUPES OPERANT TRANSITIVEMENT SUR UN ENSEMBLE» (Ann. Sci. Univ. Clermont II, ser. Math., Fasc. 18, 1979, pp. 83-96) que l'on citera par [HT] et qui est lui-même un prolongement d'une thèse de troisième cycle [2] que l'on désignera en abrégé par [HM]. On utilise ici les mêmes notations et la même terminologie que dans [HT]. En particulier H est un hypergroupe multiplicatif opérant transitivement sur un ensemble M (non vide). $M_1$, $M_2$ ; M', M", ... ; N', N", ... ; et P sont des sous-ensembles conservatifs de M par rapport à H dont les sous-hypergroupes de stabilité sont respectivement notés $h_1$, $h_2$ ; h', h", ... ; k', k", ... ; et h (on sait qu'ils sont inversibles à droite et clos dans H).

Si A et B sont deux sous-hypergroupes de H, on note, lorsqu'il existe, (A, B) le sous-hypergroupe de H engendré par A et B (cf. [3] et [6]) et, si B est A-conjugable (cf. [4] et [6]) on pose $(B)_A^* = \bigcap_{a \in A} a B \bar{a}$ (où le couple $(\bar{a}, a) \in A \times A$ est tel que $\bar{a}\, a \subset A \cap B$). Enfin, un sous-ensemble ultra-clos dans M pour H (resp. ultra-conservatif pour M par rapport à (H,M)) est plus simplement appelé ici un sous-ensemble ultra-clos (resp. ultra-conservatif).

**§ 1 - Quelques résultats techniques.**

Compte-tenu des résultats démontrés dans [HT], on peut donner une démonstration beaucoup plus simple que celle faite dans [HM] (théorème 5) du

**Théorème 1.1.**

*Si M' et M" sont ultra-clos, alors il y a équivalence entre :*

*i) M'M" est ultra-clos et* $M' \cap M'' \neq \emptyset$

*ii)* $M'M'' = M''M'$

Puisque M' et M" sont conservatifs, il suffit, en vertu du théorème 2.5 de [H.T] de démontrer que ii) implique l'ultra-clôture de M'M".

On sait que $h'h'' = h''h'$ est un sous-hypergroupe de H et, comme h' et h" sont ultra-clos à droite dans H, il en est de même pour h'h". On sait aussi que M'M" est conservatif dans M par rapport à H donc :

$$(\forall \alpha \in H), \quad \alpha.M'M'' \cap M'M'' \neq \emptyset \iff \alpha.M'M'' = M'M''.$$

De plus, puisque M' et M'' commutent, l'intersection $M' \cap M''$ est non vide et :

$(\forall m \in M' \cap M'')$, $M'M'' = h'h''.m$ et $M - M'M'' = (H - h'h'').m$.

Ainsi, s'il existe $\alpha \in H$ tel que $\alpha.M'M'' \cap \alpha.(M - M'M'') \neq \emptyset$, alors, quel que soit $m \in M' \cap M''$ on a $\alpha\, h'h''.m \cap \alpha\,(H\text{-}h'h'').m \neq \emptyset$ et il existe donc $\beta \in \alpha h'h''$ et $\gamma \in \alpha(H\text{-}h'h'')$ tels que $\beta.m \cap \gamma.m \neq \emptyset$, d'où (puisque h'h'' est inversible à droite dans H) $\beta\, h'h''.m \cap \gamma\, h'h''.m \neq \emptyset$ soit $\beta\, h'h'' = \gamma\, h'h''$ (car M'M'' est conservatif). Il s'ensuit $\alpha\, h'h'' = \beta\, h'h'' = \gamma\, h'h'' \subset \alpha\,(H\text{-}h'h'')$, ce qui contredit l'utra-clôture à droite de h'h''. Ainsi, $\forall \alpha \in H$, on a $\alpha.M'M'' \cap \alpha\,(M - M'M'') = \emptyset$ et donc M'M'' est ultra-clos.

On va donner maintenant une version un peu améliorée du théorème 3.2 de [HT] que nous aurons à utiliser dans le paragraphe suivant. Pour cela il nous faut le

**Lemme 1.1.**

*Soient A et B deux sous-hypergroupes inversibles à droite et clos de H tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et $AB \subset BA$.*

*Alors $AB = BA$ est un sous-hypergroupe inversible à droite et clos dans H.*

On remarque tout d'abord que $A \cap B$ est un sous-hypergroupe de H et que l'on a $A \cap B = (A \cap B)(A \cap B) \subset AB$, d'où $A \subset AB \subset BA$ et $B \subset AB \subset BA$ ; il s'ensuite $BA \subset BAB \subset BA$ et $BA \subset ABA \subset BA$, soit $BA = BAB = ABA$.

Par conséquent, toute expression du type $C^{(1)} C^{(2)} \ldots C^{(s)}$ ($s \in N$, $s \geq 3$, $C^{(i)} = A$ ou $B$, $C^{(i+1)} \neq C^{(i)}$) se réduit à BA. En définitive, BA est le sous-hypergroupe engendré par A et B, il est inversible à droite et clos dans H et AB = BA (cf [3] et [6])

**Théorème 1.2.**

*Si M' et M'' sont conservatifs et si M'' est ultra-conservatif pour M' par rapport à (H,M), alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i) M'M'' = M''M' et la bijection canonique*

$\psi : M'M''/_{M''} \longrightarrow M'/_{M' \cap M''}$ *est une similitude entre*

$(h'h'', M'M''/_{M''})$ *et* $(h', M'/_{M' \cap M''})$

*ii)* $h''h' = h'(h'')^{*}_{h'}$, *et* $M' \cap M'' \neq \emptyset$.

D'après le théorème 3.2 de [HT], il suffit de démontrer que ii) implique M'M'' = M'' M'. Tout d'abord on remarque que $M' \cap M'' \neq \emptyset$ implique $h' \cap h'' \neq \emptyset$ et qu'alors h'' est h'-conjugable (cf [HT] théorème 3.1). Ainsi, pour tout $\alpha \in h' \cap h''$ et $\bar{\alpha} \in h'$ tels que $\bar{\alpha}\,\alpha \subset h' \cap h''$ on a $\bar{\alpha} \in h' \cap h''$ et $\alpha\, h''\bar{\alpha} = h''$ ; d'où $(h'')^{*}_{h'} \subset h''$ donc $h''h' = h'(h'')^{*}_{h'} \subset h'h''$ et le lemme 1.1 précédent permet de conclure à l'égalité

$h'h'' = h''h'$. Il s'ensuit l'égalité M'M'' = M''M'.

**Remarque :**

On peut démontrer que sous les hypothèses et conditions du théorème précédent

$$(h'(h'')^{*}_{h'} \big/ (h'')^{*}_{h'}\ ,\ M'M''/_{M''}) \quad \text{et} \quad (h'/_{h' \cap (h'')^{*}_{h'}}\ ,\ M'/_{M' \cap M''})$$

sont alors des groupes de multitransformations isomorphes.

Enfin, on utilisera souvent le résultat suivant :

**Lemme 1.4.**

*Si A et B sont deux sous-hypergroupes de H tels que A soit B-conjugable, alors, pour tout sous-hypergroupe, C, de B vérifiant*

$A \cap C \neq \emptyset$, *A est C-conjugable.*

Trivial, car pour tout $\alpha \in C$, il existe $\bar{\alpha} \in C$, tel que $\bar{\alpha}\,\alpha \cap A \cap C \neq \emptyset$ et, puisque C est contenu dans B et que A est B-conjugable, on a

$\bar{\alpha}\,\alpha \subset C \cap (B \cap A) = C \cap A$.

## § 2 - Normalité. Lemme de ZASSENHAUS.

**Définition 2.1.**

*On dit que M'' est normal pour P lorsque :*

*1) M" est ultra-conservatif pour P (par rapport à (H,M))*

*2) M"P = PM"*

*3)* $h"h = h(h")^*_h$

En vertu du théorème 1.2 précédent, on peut remplacer 2) par 2') $M" \cap P \neq \emptyset$. De plus, la bijection canonique $PM"/_{M"} \longrightarrow P/_{M" \cap P}$ est une similitude entre $(hh", PM"/_{M"})$ et $(h, P/_{M" \cap P})$.

Les deux lemmes suivants montrent que la normalité est conservée (sous certaines conditions) pour un «translaté» de P et par produit.

**Lemme 2.1.**

*Si M" et P sont inclus dans M' et ultra-conservatifs pour M' et tels que M" soit normal pour P, alors, quel que soit* $\alpha \in h'$ *vérifiant* $\alpha .P \cap M" \neq \emptyset$, *M" est normal pour* $\alpha .P$.

Par hypothèse on a $h(h")^*_h = h"h = hh" = (h,h")$. D'autre part, $\alpha \in h"h$ ; en effet, $\alpha .P \cap M" \neq \emptyset$ implique $\alpha .P \subset M"P$, soit $\alpha .P \subset h"h.P$, d'où $\alpha \in h"h$. On a aussi $h' \cap h" \neq \emptyset$, $h \subset h'$, $h" \subset h'$, $hh" = h"h \subset h'$ et h" et h sont h'-conjugables et donc ultra-clos dans h'.

Pour tout $\bar{\alpha} \in h'$ tel que $\bar{\alpha}\alpha \subset h \cap h'$, $\alpha h \bar{\alpha}$ est aussi h'-conjugable et inclus dans h' et, comme $\alpha .P$ est ultra-clos et admet $\alpha h \bar{\alpha}$ pour sous-hypergroupe de stabilité, il en résulte que $\alpha .P$ est ultra-conservatif pour M'. D'autre part, puisque $\alpha h \bar{\alpha} \cap h"$ est non vide (car $\alpha .P \cap M" \neq \emptyset$) h" est $\alpha h \bar{\alpha}$ -conjugable d'après le lemme 1.4. Ainsi M" est ultra-conservatif pour $\alpha .P$ et, $\alpha .P \cap M"$ étant non-vide, il reste à démontrer (d'après 2')) l'égalité $\alpha h \bar{\alpha}(h")^*_{\alpha h \bar{\alpha}} = h" \alpha h \bar{\alpha}$ .

On a établi ci-dessus $\alpha \in h"h$ ; donc il existe $\beta \in h"$ tel que $\alpha h = \beta h$, d'où $h" \alpha h = h" \beta h = h"h$. Par ailleurs, $h" \cap h$ étant non-vide et h étant h'-conjugable et contenu dans h', h est h"-conjugable (Lemme 1.4) ; il existe donc $\beta \in h"$ tel que $\bar{\beta}\beta \subset h$. Par conséquent, $\bar{\beta}\alpha \subset \bar{\beta}\alpha h = \bar{\beta}\beta h = h$, d'où $h\bar{\alpha} = h\bar{\beta} \subset hh"$, et l'on déduit $h"\alpha h\bar{\alpha} = h"\beta h\bar{\alpha} = h"h\bar{\alpha} = h"h\bar{\beta} = h"hh" = h"h = (h,h")$ ; ainsi $h" \alpha h\bar{\alpha}$ est un sous-hypergroupe de H qui contient $\alpha h \bar{\alpha}$ (car h", étant ultra-clos dans h', est inversible dans h') et h", c'est donc $(h", \alpha h\bar{\alpha})$ et l'on a $h"\alpha h\bar{\alpha} = \alpha h\bar{\alpha} h" = hh"$ (cf. [3]).

On va démontrer maintenant l'égalité $(h'')^*_h = (h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$ et pour cela on considère $(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha} = \bigcap_{\gamma \in \alpha h\bar\alpha} \gamma h'' \tilde\gamma$ où $(\gamma, \tilde\gamma)$ est un couple d'éléments de $\alpha h\bar\alpha$ tel que $\tilde\gamma\gamma \subset h'' \cap \alpha h\bar\alpha$. Puisque $\alpha h\bar\alpha$ est inclus dans hh", pour tout $\gamma \in \alpha h\bar\alpha$, il existe $\delta \in h$ tel que $\delta h'' = \gamma h''$ et, si $\hat\delta \in h$ vérifie $\hat\delta\delta \subset h''$ ($\hat\delta$ existe car h" est h-conjugable), on a $\hat\delta \gamma h'' = \hat\delta \delta h'' = h''$ ; donc $\hat\delta\gamma \subset h''$ et $h'' \hat\delta \gamma = h''$. Il s'ensuit $h'' \tilde\gamma = h'' \hat\delta$ et l'égalité $\gamma h''\tilde\gamma = \delta h'' \hat\delta$. Ainsi, pour tout $\gamma \in \alpha h\bar\alpha$ il existe $(\tilde\gamma, \delta, \hat\delta) \in \alpha h\bar\alpha \times h \times h$ tel que $\hat\delta\delta \subset h'' \cap h$, $\tilde\gamma\gamma \subset h'' \cap \alpha h\bar\alpha$ et $\delta h'' \hat\delta = \gamma h \tilde\gamma$, d'où l'inclusion $\bigcap_{\delta \in h} \delta h'' \hat\delta \subset \bigcap_{\gamma \in \alpha h\bar\alpha} \gamma h'' \tilde\gamma$ soit $(h'')^*_h \subset (h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$. D'autre part, l'égalité $hh'' = \alpha h\bar\alpha h''$ permet par un raisonnement analogue (en remplaçant h par $\alpha h\bar\alpha$) d'établir que pour tout $\delta \in h$ il existe $(\hat\delta, \gamma, \tilde\gamma) \in h \times \alpha h\bar\alpha \times \alpha h\bar\alpha$ vérifiant $\delta h'' \hat\delta = \gamma h''\tilde\gamma$ d'où l'inclusion inverse et en définitive l'égalité annoncée $(h'')^*_h = (h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$.

Les résultats précédents conduisent aux égalités $hh'' = h(h'')^*_h = h(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$. Mais on a $\bar\alpha \in h\bar\alpha \subset hh''$, donc il existe $\varepsilon \in (h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$ vérifiant $h\bar\alpha = h\varepsilon$ et l'on a $h(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha} = h\,\varepsilon(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha} = h\,\bar\alpha\,(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$, d'où les égalités $hh'' = \alpha hh'' = \alpha\, h(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha} = \alpha h\bar\alpha\,(h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$. Ainsi $h''(\alpha h\bar\alpha) = \alpha h\bar\alpha\ (h'')^*_{\alpha h\bar\alpha}$.

**Lemme 2.2.**

*Si $M_1$ et $M_2$ sont normaux pour P et vérifient $M_1M_2 = M_2M_1$, et $P \cap M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ alors $M_1M_2$ est aussi normal pour P.*

En effet,

d'une part $h_1$ (et $h_2$) est h-conjugable et comme il est inclus dans $h_1h_2 = h_2h_1$ on en déduit que $h_1h_2$ est aussi h-conjugable. Ainsi, puisque $M_1M_2$ est ultra-clos (cf théorème 1.1), $M_1M_2$ est ultra-conservatif pour P

d'autre part, $M_1M_2 \cap P$ est non-vide car $P \cap M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ et $M_1 \cap M_2 \subset M_1M_2$.

Enfin, soient $(h_1h_2)_h^* = \bigcap_{\alpha \in h} \alpha h_1h_2\bar{\alpha}$ $((\alpha, \bar{\alpha}) \in h \times h$ et $\bar{\alpha}\alpha \subset h \cap h_1h_2)$ et $(\alpha, \hat{\alpha}) \in h \times h$ tel que $\hat{\alpha}\alpha \cap h \cap h_1 \cap h_2 \neq \emptyset$. Par la h-conjugabilité de $h_1$ et $h_2$ on a $\hat{\alpha}\alpha \subset h_1 \cap h$ et $\hat{\alpha}\alpha \subset h_2 \cap h$, donc $\hat{\alpha}\alpha \subset h_1h_2 \cap h$, d'où $\alpha h_1h_2\bar{\alpha} = \alpha h_1h_2\hat{\alpha} = \alpha h_1\hat{\alpha}\ \alpha h_2\hat{\alpha}$ et $(h_1)_h^*(h_2)_h^* = (\bigcap_{\alpha \in h} \alpha h_1\hat{\alpha})(\bigcap_{\beta \in h} \beta h_2\hat{\beta})$ $\subset \bigcap_{\alpha \in h} \alpha h_1\bar{\alpha}\ \alpha h_2\bar{\alpha} = (h_1h_2)_h^*$ ; par suite $h_1h_2h = h_1h(h_2)_h^* = h(h_1)_h^*(h_2)_h^*$ $\subset h(h_1h_2)_h^*$. Or $h \cap h_1 \cap h_2$ étant non-vide, l'inclusion $h(h_1h_2)_h^* \subset hh_1h_2$ est trivial ; par conséquent $h_1h_2h \subset hh_1h_2$ et le lemme 1.1 permet de conclure à l'égalité $h_1h_2h = hh_1h_2$ et donc à $h_1h_2h = h(h_1h_2)_h^*$ qui en résulte.

**Définition 2.2.**

*Si M' et M" sont ultra-conservatifs et tels que M" ⊂ M', M" est dit M'-normal si et seulement si M" est normal pour tout sous-ensemble P, de M', ultra-conservatif qui lui soit non-disjoint (et donc en particulier pour M').*

Le lemme technique suivant prépare au lemme de ZASSENHAUS.

**Lemme 2.3.**

*Si M', M", N' et N" sont ultra-conservatifs tels que M" ⊂ M', N" ⊂ N', N" ∩ M" ≠ ∅, M" est M'-normal et N" est N'-normal alors :*

*M' ∩ N", M' ∩ N', (M' ∩ N")M' et (M' ∩ N')M"*

*sont ultra-conservatifs ; M' ∩ N" est M' ∩ N'-normal et (M' ∩ N")M" est (M' ∩ N')M"-normal.*

*Et les résultats analogues en permutant M' et N', et, M" et N".*

Les sous-hypergroupes h', h", k' et k" de H sont conjugables ; alors h' ∩ k" et h' ∩ k' le sont aussi. Donc M' ∩ N" et M' ∩ N' sont ultra-conservatifs et, comme ils sont inclus dans M', ils commutent avec M", qui est M'-normal par hypothèse ; il s'ensuit que $(h' \cap k'')h'' = h''(h' \cap k'') = (h' \cap k'', h'')$ et $h''(h' \cap k') = (h' \cap k')h'' = (h' \cap k', h'')$ sont des sous-hypergroupes conjugables et qu'alors (M' ∩ N") M" et (M' ∩ N')M" sont ultra-conservatifs.

Soit P, ultra-conservatif, contenu dans M' ∩ N', et non-disjoint de M' ∩ N", il est alors trivial que N" est ultra-conservatif pour P (k" étant conjugable est a fortiori h-conjugable) et que l'on a $h \subset h' \cap k'$, $hk'' = k''h = h(k'')^*_h$ (car N'' est N'-normal).

On considère $(h' \cap k'')^*_h = \bigcap_{\alpha \in h} \alpha(h' \cap k'')\overline{\alpha}$

(avec $(\overline{\alpha}, \alpha) \in h \times h$, $\overline{\alpha}\,\alpha \subset h \cap h' \cap k'' = h \cap k''$). La clôture de h' entraîne l'égalité $\alpha\ (h' \cap k'')\overline{\alpha} = h' \cap \alpha\, k''\overline{\alpha}$ ; par suite $(h' \cap k'')^*_h = h' \cap (k'')^*_h$ et, $h(h' \cap k'')^*_h =$

$h(h' \cap (k'')^*_h) = h' \cap h(k'')^*_h = h' \cap hk'' = h(h' \cap k'')$ or,

$h(h' \cap k'') = h' \cap hk'' = h' \cap k''h = (h' \cap k'')h$ d'où l'égalité

$(h' \cap k'')h = h(h' \cap K'')^*_h$ . Ainsi, M' $\cap$ N'' est M' $\cap$ N'-normal.

On suppose maintenant que P est ultra-conservatif, contenu dans A'= (M' $\cap$ N') M'' et non-disjoint de A'' = (M' $\cap$ N'') M''. On va démontrer que A'' est normal pour P. (Comme P est arbitrairement choisi, on démontrera donc la A'-normalité de A''). On remarque tout d'abord que l'on a $M'' \cap N'' \subset M' \cap N'' \subset (M' \cap N'')M'' = (h' \cap k'')h''.(P \cap (M' \cap N'')M'')$ ; il existe donc $\alpha \in (h' \cap k'')h'' = g''$ tel que $\alpha .P \cap M'' \cap N'' \neq \emptyset$. Or, d'après le lemme 2.1, si A'' est normal pour $\alpha$.P, il l'est pour $\overline{\alpha}\,.(\alpha .P) = P$ (où $\overline{\alpha}$ est un élément de g'' tel que $\overline{\alpha}\alpha \subset g'' \cap h$, dont l'existence est assurée par l'ultra-conservativité de P, c'est-à-dire par la conjugabilité et donc la g''-conjugabilité de h). On peut donc supposer pour la suite $P \cap M'' \cap N'' \neq \emptyset$ soit $h \cap h'' \cap k'' \neq \emptyset$. Ainsi, $\forall \alpha \in h$, il existe $\hat{\alpha} \in h$ vérifiant $\hat{\alpha}\,\alpha \cap h'' \cap k'' \neq \emptyset$ ; mais, h'' étant conjugable, il s'ensuit $\hat{\alpha}\,\alpha \subset h''$, donc $\hat{\alpha}\alpha \subset h'' \cap h$ et $\hat{\alpha}\alpha \subset g'' \cap h$ (car $h'' \subset g''$). Par ailleurs g'' est conjugable, il est donc a fortiori h-conjugable et, $\forall \alpha \in h$, il existe $\overline{\alpha} \in h$ tel que $\overline{\alpha}\alpha \subset g'' \cap h$. Ainsi,
$(h'' \cap h)\,\hat{\alpha} \subset (g'' \cap h)\,\hat{\alpha} = (g'' \cap h)\overline{\alpha}$ d'où $\alpha\, h''\hat{\alpha} \subset \alpha g''\hat{\alpha} = \alpha\, g''\overline{\alpha}$ ; par conséquent $(h'')^*_h \subset (g'')^*_h$ et $h(h'')^*_h \subset h(g'')^*_h$ .

D'autre part, puisque P est inclus dans M' et que M'' est M'-normal, PM'' = M'' P est ultra-clos et $hh'' = h''h = h(h'')^*_h$ . Mais M' $\cap$ N' est ultra-clos, d'où

N = PM'' $\cap$ M' $\cap$ N' = PM'' $\cap$ N' l'est aussi ; de plus h'' et k'' étant conjugables, il en est de même de $h'' \cap k''$ et donc du sous-hypergroupe de stabilité de N, $k = hh'' \cap h' \cap k' = hh'' \cap k'$ qui le contient. Ainsi N est ultra-conservatif et comme il est inclus dans M' $\cap$ N' il commute avec M' $\cap$ N'' (qui est M' $\cap$ N'-normal) et l'on a $k(h' \cap k'') = (h' \cap k'')k = k(h' \cap k'')^*_k$ .

Or $h''k = h''h = hh'' = kh''$ (car $h \subset (h' \cap k')h'' = h''(h' \cap k')$)

donc $g''h = (h' \cap k'')h''h = (h' \cap k'')h''k = h''(h' \cap K'')k = h''k(h' \cap k'')^*_k =$
$h''h(h' \cap k'')^*_k = h(h'')^*_h (h' \cap k'')^*_h$, et il suffit de démontrer maintenant l'inclusion
$(h' \cap k'')^*_k \subset (g'')^*_k$, puisqu'elle entraîne $g''h = h(h'')^*_h (h' \cap k'')^*_h \subset h(g'')^*_h$ et,
comme l'inclusion inverse $h(g'')^*_h \subset hg'' = g''h$ est triviale, on a $g''h = h(g'')^*_h$
c'est-à-dire que A'' est normale pour P :

Soit $\alpha \in h$. Il existe $\bar{\alpha} \in h$ tel que $\bar{\alpha}\alpha \subset g'' \cap h$. Or, pour tout $\alpha \in h \subset (h' \cap k')h''$ il existe $\beta \in h' \cap k'$ tel que $\alpha h'' = \beta h''$, d'où $\beta \in \alpha h'' \subset hh''$, soit $\beta \in hh'' \cap h' \cap k' = k$. Mais il existe $\hat{\beta} \in k$ tel que $\hat{\beta}\beta \cap h'' \cap k'' \neq \emptyset$ (car $\emptyset \neq h'' \cap k'' \subset k$) alors on a $\hat{\beta}\beta \subset h'' \cap k''$
soit $\hat{\beta}\beta \subset h'' \cap k'' \cap k \subset k \cap h' \cap k'' \subset h' \cap k''$.
Donc $\alpha g''\bar{\alpha} = \alpha(h' \cap k'')h''\bar{\alpha} = \alpha h''(h' \cap k'')\bar{\alpha} = \beta h''(h' \cap k'')\bar{\alpha} =$
$= \beta(h' \cap k'')h''\bar{\alpha}$ et il s'ensuit $\beta(h' \cap k'')\hat{\beta}\alpha g''\bar{\alpha} = \beta(h' \cap k'')\hat{\beta}\beta(h' \cap k'')h''\bar{\alpha}$
$= \beta(h' \cap k'')h''\bar{\alpha} = \alpha g''\bar{\alpha}$ et puisque $\alpha g''\bar{\alpha}$ est clos, on déduit
$\beta(h' \cap k'')\hat{\beta} \subset \alpha g''\bar{\alpha}$, d'où $(h' \cap k'')^*_k \subset \alpha g''\bar{\alpha}$, et ceci quel que soit
$\alpha \in h$, donc $(h' \cap k'')^*_k \subset (g'')^*_h$.

On est en mesure de démontrer maintenant le :

**Lemme de ZASSENHAUS.**

*Si M', M'', N' et N'' sont ultra-conservatifs et tels que $M'' \subset M'$, $N'' \subset N'$, $M'' \cap N'' \neq \emptyset$, M'' est M'-normal et N'' est N'-normal, alors :*

*Les sous-ensembles $A' = (M' \cap N')M''$, $A'' = (M' \cap N'')M''$, $B' = (M' \cap N')N''$ et $B'' = (M'' \cap N')N''$ sont ultra-conservatifs, A'' est A'-normal, B'' est B'-normal et il existe une similitude canonique entre $((h' \cap k')h'', A'/_{A''})$ et $((h' \cap k'')k'', B'/_{B''})$.*

Le lemme 2-3 précédent donne la première partie des résultats.

Par ailleurs, en remarquant que si $M_1$, $M_2$ et $M_3$ sont trois sous-ensembles conservatifs tels que $M_1M_2$ et $M_2M_3$ soient conservatifs et $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \neq \emptyset$ alors
$M_1(M_2M_3) = h_1(h_2h_3) . (M_1 \cap M_2 \cap M_3) = (h_1h_2) h_3 . (M_1 \cap M_2 \cap M_3) = (M_1M_2)M_3$

(c'est-à-dire que le «produit» des sous-ensembles conservatifs est alors associatif), on peut écrire $A' = (M' \cap N')M'' = [(M' \cap N')(M' \cap N'')]M'' = (M' \cap N')[(M' \cap N'')M''] = (M' \cap N')A''$ et corrélativement $B' = (M' \cap N')B''$. Il s'ensuit, d'après le lemme 2-3 précédent et le théorème 1-2 que les bijections canoniques entre $A'/_{A''}$ et $M' \cap N'/_{M' \cap N' \cap A''}$ d'une part, $B'/_{B''}$ et $M' \cap N'/_{M' \cap N' \cap B''}$ d'autre part, sont respectivement des similitudes canoniques entre

$((h' \cap k')h'', A'/_{A''})$ et $(h' \cap k', M' \cap N'/_{M' \cap N' \cap A''})$, et,

$((h' \cap k')k'', B'/_{B''})$ et $(h' \cap k', M' \cap N'/_{M' \cap N' \cap B''})$.

Or, on a les égalités $M' \cap N' \cap A'' = M' \cap N' \cap (M' \cap N'')M'' = M' \cap N' \cap M''(M' \cap N'') =$ $= (M' \cap N' \cap M'')(M' \cap N'') = (N' \cap M'')(M' \cap N'')$ et $M' \cap N' \cap B'' =$ $M' \cap N' \cap (M'' \cap N')N'' = M' \cap N' \cap N''(N' \cap M'') = (M' \cap N' \cap N'')(N' \cap M'') =$ $(M' \cap N'')(N' \cap M'')$ ; mais, $M' \cap N''$ et $N' \cap M''$ sont $M' \cap N'$-normaux, et, comme ils sont ultra-conservatifs inclus dans $M' \cap N'$ et non-disjoints, ils commutent ; de plus, d'après le lemme 2-2, l'ensemble $M' \cap N' \cap A'' = (N' \cap M'')(M' \cap N'') = (M' \cap N'')(N' \cap M'') = M' \cap N' \cap B''$ est $M' \cap N'$-normal. Ainsi, puisque l'inverse des similitudes canoniques précédentes sont aussi des similitudes canoniques et que la composée de telles similitudes est encore une similitude canonique, on a prouvé l'existence d'une similitude canonique entre

$((h' \cap k')h'', A'/_{A''})$ et $((h' \cap k')k'', B'/_{B''})$.

**N. B.**

Si l'on pose $l' = (h' \cap k')h''$, $l'' = (h' \cap k'')h''$, $t' = (h' \cap k')k''$ et $t'' = (h'' \cap k')k''$, on peut démontrer que $\left(l'(l'')^*_{l'} \big/ (l'')^*_{l'}, A'/_{A''}\right)$ et

$\left(t'(t'')^*_{t'} \big/ (t'')^*_{t'}, B'/_{B''}\right)$ sont des groupes de multitransformations isomorphes.

## § 3. Un théorème de JORDAN-HOLDER

Soit $m \in M$. On désigne par $M_m$ l'intersection de tous les sous-ensembles ultra-conservatifs contenant $m$ ($M_m$ est éventuellement égal à $M$) ; $M_m$ est ultra-clos comme intersection (non-vide) d'ultra-clos et son sous-hypergroupe de stabilité est conjugable puisqu'il est intersection de sous-hypergroupes conjugable. Donc $M_m$ est ultra-conservatif ; on dit que c'est le sous-ensemble ultra-conservatif engendré par $m$.

**Définitions 3.1**

*On appelle chaîne ultra-conservative (pour (H,M)) une chaîne* $M_o \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s$ *de sous-ensembles ultra-conservatifs de M. Elle est dite normale si pour tout* $i = 1, \ldots, s$, $M_i$ *est* $M_{i-1}$*-normale.*

*Une suite de composition normale est une chaîne normale entre M et un sous-ensemble ultra-conservatif* $M_m$ *engendré par un élément m de M n'admettant aucun raffinement normal.*

Compte-tenu des résultats précédents, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

**Théorème de raffinement de ZASSENHAUS.**

*Soient :* $Q = M_o \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s = R$

$Q = N_o \supset N_1 \supset \ldots \supset N_t = R$

*Deux chaînes ultra-conservatives normales de (H,M) ayant les mêmes extrémités Q et R. On note* $h_o, h_1, \ldots, h_s$ *et* $k_o, k_1, \ldots, k_t$ *les sous-hypergroupes de stabilité de* $M_o, M_1, \ldots, M_s$ *et* $N_o, N_1, \ldots, N_t$ *respectivement.*

*On pose* $A_{i,j} = (M_i \cap N_j)M_{i+1}$, $B_{i,j} = (M_i \cap N_j)N_{j+1}$ *(en particulier* $A_{i,o} = M_i = A_{i-1,t}$ *et* $B_{o,j} = N_j = B_{s,j-1}$*). Alors il existe une similitude canonique entre* $((h_i \cap h_j)h_{i+1}, A_{i,j} / A_{i,j+1})$ *et* $((h_i \cap k_j)k_{j+1}, B_{i,j} / B_{i+1,j})$ .

*Ainsi :*

$$A_{o,o} \supset A_{o,1} \supset \ldots \supset A_{o,t} = A_{1,o} \supset A_{1,1} \supset \ldots \supset A_{s,t}$$

$$B_{o,o} \supset B_{1,o} \supset \ldots \supset B_{s,o} = B_{o,1} \supset B_{1,1} \supset \ldots \supset B_{s,t}$$

*sont des raffinements normaux des chaînes normales* $(M_i)_{i=1,\ldots,s}$ *et* $(N_j)_{j=1,\ldots,t}$ *ayant les mêmes facteurs à l'ordre et similitude près.*

**Théorème de JORDAN-HOLDER.**

*Deux suites de composition normales de (H,M) qui se terminent au même sous-ensemble ultra-conservatif* $M_m$ $(m \in M)$ *ont les mêmes facteurs à l'ordre et similitude près.*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. KRASNER. Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement («wreath product») de Groupes.
Mathematica Balkanica 3 (1973) 229-280.

[2] et [HM] Y. SUREAU. Thèse de doctorat de troisième cycle.
«Etude des hypergroupes de multitransformation». Clermont-Ferrand (1965).

[3] Y. SUREAU. Sous-hypergroupe engendré par deux sous-hypergroupes et sous-hypergroupe ultra-clos d'un hypergroupe. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977.

[4] Y. SUREAU. Une notion de conjugaison dans les hypergroupes et hypergroupes homomorphes à un groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977.

[5] et [HT] Y. SUREAU. Hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble.
Ann. Sci. Univ. Clermont II, sér. Math., Fasc. 18, 1979, pp. 83-96.

[6] Y. SUREAU. «Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble». Thèse de doctorat d'Etat. Clermont-Fd II (1980).

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.
*Adresse personnelle :* 27, rue d'Aubière, Pérignat les Sarliéves, 63170 - Aubière, France.