

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAUL-JEAN CAHEN

FULVIO GRAZZINI

YOUSSEF HAOUAT

Intégrité du complété et théorème de Stone-Weierstrass

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 47-58

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_47_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTEGRITE DU COMPLETE ET THEOREME DE STONE-WEIERSTRASS

Paul-Jean CAHEN, Fulvio GRAZZINI et Youssef HAOUAT

Résumé :

Si la clôture A' d'un anneau intègre A , local, noethérien et de dimension 1, est un A -module de type fini, on montre que les assertions suivantes sont équivalentes : a) A' est local, b) le complété \hat{A} de A est intègre, c) l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A est dense dans l'anneau des fonctions continues de \hat{A} sur lui-même. Ceci fournit une généralisation du théorème de Stone-Weierstrass, bien connu dans le cas où A est un anneau de valuation discrète. On donne un contre-exemple dans le cas où A' n'est pas de type fini.

Summary :

In the case where the integral closure A' of a local, Noetherian, dimension 1 domain A is a finitely generated A -module, we show that the following assertions are equivalent : a) A' is a local ring, b) the completion \hat{A} of A is a domain, c) the ring of integral valued polynomials over A is dense in the ring of continuous functions from \hat{A} to itself. This gives a generalisation of the Stone-Weierstrass theorem, which is well-known in the case where A is a discrete valuation ring. We give a counterexample in the case where A' is not finitely generated.

INTRODUCTION :

Si A désigne un anneau de valuation discrète de corps des fractions K , il est classique que l'anneau des polynômes $K[X]$ est dense dans l'anneau des fonctions continues du complété \hat{A} de A à valeurs dans son corps des fractions \hat{K} [(3) V §5 Exercices] [cf. aussi (5)] .

Si, plus généralement A est un anneau noethérien, local, d'idéal maximal \mathfrak{m} on peut considérer le complété \hat{A} de A pour la topologie \mathfrak{m} -adique. Pour que \hat{A} soit compact, il faut que le corps résiduel A/\mathfrak{m} soit fini ; mais \hat{A} n'est pas nécessairement intègre. Pour généraliser le théorème de Stone-Weierstrass, on cherche alors à quelles conditions l'anneau $A_{\mathfrak{S}}$ des polynômes à valeurs entières (c'est-à-dire qui prennent sur A leurs valeurs dans A) est dense dans l'anneau $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ des fonctions continues de \hat{A} dans \hat{A} ; il est nécessaire que A soit un anneau de dimension 1 [(4) § 6 Remarque 6.2].

On montre dans ce cas que si la clôture intégrale A' de A est un A module de type fini, on a de façon équivalente : A' est local, \hat{A} est intègre, $A_{\mathfrak{S}}$ est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

Si A n'est pas intégralement clos, on voit alors que $A_{\mathfrak{S}}$ n'est pas contenu dans $A'_{\mathfrak{S}}$.

On donne enfin un exemple où A' est local, mais n'est pas un A module de type fini ; pour cet exemple, \hat{A} n'est pas intègre et $A_{\mathfrak{S}}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

1. Topologie « \mathfrak{m} -adique » de K .

On désigne par A un anneau intègre de corps de fractions K , noethérien, de radical \mathfrak{m} et de dimension 1.

Les idéaux \mathfrak{m}^k sont des sous-groupes du groupe K . Ils forment une filtration de K et définissent ainsi une topologie, qu'on appelle topologie « \mathfrak{m} -adique » : les \mathfrak{m}^k constituent un système fondamental de voisinages de l'origine [(3), III] (observons que la topologie \mathfrak{m} -adique usuelle du A module K est la topologie grossière). Muni de cette topologie, K est un groupe topologique et même un anneau topologique, car le produit est continu sur $K \times K$. En effet :

$$xy - x'y' = x(y - y') + y'(x - x')$$

avec

$$x - \frac{a}{d} \quad \text{et} \quad y' = \frac{a'}{d'}$$

Puisque A est noethérien et de dimension 1, il existe deux entiers naturels n_1 et n_2

tels que : $\mathfrak{M}^{n_1} \subset \text{Ad}$ et $\mathfrak{M}^{n_2} \subset \text{Ad}'$,

donc si $y - y' \in \mathfrak{M}^{n_1 + n}$ et $x - x' \in \mathfrak{M}^{n_2 + n}$, alors $xy - x'y'$ appartient à \mathfrak{M}^n .

Proposition préliminaire :

On appelle A' la clôture intégrale de A et \mathfrak{M}' le radical de A' où A est un anneau noethérien, de dimension 1, de radical \mathfrak{M} . Soit B un anneau tel que $A \subset B \subset A'$ et qui est un A module de type fini. Soit \mathfrak{N} le radical de B . Alors les topologies « \mathfrak{M} -adique » et « \mathfrak{N} -adique » de K coïncident.

Preuve :

Comme B est un A module de type fini, il existe d dans A tel que $dB \subset \mathfrak{M}$. Puisque B est noethérien et de dimension 1, il existe un entier k strictement positif tel que :

$$\mathfrak{N}^k \subset dB \subset \mathfrak{M}$$

Puisque A est noethérien et de dimension 1, il existe un entier strictement positif k_1 tel que

$\mathfrak{M}^{k_1} \subset \mathfrak{N}^k$. Ainsi, quel que soit l'entier naturel n , on a les inclusions :

$$\mathfrak{M}^{k_1 n} \subset \mathfrak{N}^{k n} \subset \mathfrak{M}^n$$

2. Intégrité du complété.

On suppose désormais A local.

On note \hat{A} et \hat{K} les complétés respectifs de A et K pour la topologie \mathfrak{M} -adique. On a alors :

Proposition :

Soit A un anneau noethérien local, intègre, de dimension 1. On suppose que A' est un A module de type fini.

Alors si \hat{A} est intègre, A' est local.

Soit S la partie multiplicative formée par les éléments non nuls de A . Si \hat{A} est intègre, $S^{-1} \hat{A}$ est intègre et contient \hat{A} .

$S^{-1} \hat{A}$ est un anneau topologique pour la topologie $\hat{\mathfrak{M}}$ -adique dont les voisinages de l'origine sont les $\hat{\mathfrak{M}}^k$ et qui induit sur K la topologie \mathfrak{M} -adique.

On voit que K est dense dans $S^{-1} \hat{A}$ qui est complet.

On a donc :

$$\hat{K} = S^{-1} \hat{A}.$$

Soit maintenant B un anneau tel que : $A \subset B \subset A'$ et qui est un A module de type fini ; B est un anneau semi-local [6], d'idéaux maximaux $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_r$.

On a pour tout k :

$$B/\mathfrak{P}_i^k = \prod_{i=1}^r B/\mathfrak{P}_i^k$$

donc

$$\hat{B} = \varprojlim (B/\mathfrak{P}_i^k) = \prod_{i=1}^r \hat{B}_i$$

où \hat{B}_i est le complété de B pour la topologie \mathfrak{P}_i -adique.

Mais B est un sous-anneau de K et d'après la proposition préliminaire, la topologie \mathfrak{M} -adique de K coïncide avec la topologie \mathfrak{P} -adique, donc $\hat{B} \subset \hat{K}$ et nécessairement \hat{B} est intègre.

Donc B est local.

Comme ceci est vrai pour tout sous-anneau B de A' qui est un A -module de type fini, alors A' est local.

3. Stone - Weierstrass - Condition nécessaire.

Soit $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$ l'ensemble des fonctions continues de \hat{A} dans \hat{A} ; A_S l'ensemble des polynômes à valeurs entières, c'est-à-dire :

$$A_S = \{ P \in K[X] / P(A) \subset A \}$$

Tout élément de A_S peut être considéré comme une application uniformément continue de A dans A . Comme \hat{A} est complet et séparé, cette application est prolongeable par continuité à \hat{A} tout entier [4]. Ainsi l'anneau A_S s'injecte dans l'anneau $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

On suppose le corps résiduel A/\mathfrak{M} fini : c'est une condition nécessaire pour que \hat{A} soit compact.

On dira que « A est S - W» (Stone - Weierstrass) si A_S est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$. Chabert

[4] a démontré qu'une condition nécessaire est que A soit de dimension 1. On établit ici une condition supplémentaire :

Proposition :

Soit A un anneau noethérien, local, intègre, de dimension 1, de corps résiduel fini. Pour que A soit S-W, il faut que \hat{A} soit intègre.

On notera $\chi_{\hat{\mathfrak{m}}^k}$ la fonction caractéristique de $\hat{\mathfrak{m}}^k$ dans \hat{A} et $\chi_{\mathfrak{m}^k}$ la fonction caractéristique de \mathfrak{m}^k dans A .

Puisque A est S-W, $\chi_{\hat{\mathfrak{m}}^k}$ est approché par un polynôme f de A_S . On a donc, en particulier, sur A :

$$\begin{aligned} f(x) &\in \mathfrak{m} & \text{si } x \notin \mathfrak{m}^k \\ f(x) &\in 1 + \mathfrak{m} & \text{si } x \in \mathfrak{m}^k \end{aligned}$$

Soit \mathfrak{m}_1 un des idéaux maximaux de A' .

Alors $A'_{\mathfrak{m}_1}$ est un anneau de valuation discrète.

Le polynôme f est également une fonction continue sur $A'_{\mathfrak{m}_1}$ à valeurs dans K , pour la topologie \mathfrak{m}_1 -adique. Comme $f(0) \in 1 + \mathfrak{m}_1$ (car $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1$), alors dans un voisinage

$\mathfrak{m}_1^{k_1}$ de 0, on a encore :

$$f(x) \in 1 + \mathfrak{m}_1 \quad \text{si } x \in \mathfrak{m}_1^{k_1}$$

et donc en particulier $x \in \mathfrak{m}^k$ (sinon $f(x) \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1$)

D'où

$$\mathfrak{m}_1^{k_1} \cap A \subset \mathfrak{m}^k$$

et comme A est de dimension 1, il existe un entier r , tel que :

$$\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}_1^{k_1} \cap A \subset \mathfrak{m}^k.$$

Ainsi la topologie \mathfrak{m}_1 -adique de $A'_{\mathfrak{m}_1}$ induit sur A la topologie \mathfrak{m} -adique. Si

$\hat{A}'_{\mathfrak{M}_1}$ désigne le complété de $A'_{\mathfrak{M}_1}$ pour la topologie \mathfrak{M}_1 adique, on a donc :

$$\hat{A} \subset \hat{A}'_{\mathfrak{M}_1}$$

Or $\hat{A}'_{\mathfrak{M}_1}$ est intègre (car $A'_{\mathfrak{M}_1}$ est un anneau de valuation discrète) donc \hat{A} est intègre.

4. Stone - Weierstrass - Condition suffisante.

Proposition :

Pour que A soit S-W, il suffit que A' soit local et un A -module de type fini.

Il suffit de montrer que les fonctions caractéristiques $\chi_{a + \hat{\mathfrak{M}}_1^n}$ ($a \in \hat{A}$) peuvent être approchées par des polynômes de A_S : en effet, une fonction continue de \hat{A} dans \hat{A} est approchée par une fonction localement constante qui est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de \hat{A} . (\hat{A} est compact, puisque A/\mathfrak{M} est fini).

Il suffit d'approcher $\chi_{\hat{\mathfrak{M}}_1^n}$ par des polynômes de A_S , car alors par translation, on peut approcher $\chi_{a + \hat{\mathfrak{M}}_1^n}$.

Il suffit d'approcher $\chi_{\mathfrak{M}_1^n}$ par des polynômes de A_S , car A étant dense dans \hat{A} , on peut alors approcher $\chi_{\hat{\mathfrak{M}}_1^n}$.

Pour approcher $\chi_{\mathfrak{M}_1^n}$, modulo \mathfrak{M}_1^k , il suffit de le faire modulo \mathfrak{M}_1 . En effet, si $f \in A_S$ approche $\chi_{\mathfrak{M}_1^n}$ modulo \mathfrak{M}_1 , on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\in 1 + \mathfrak{M}_1 & \text{si } x \in \mathfrak{M}_1^n \\ f(x) &\in \mathfrak{M}_1 & \text{si } x \notin \mathfrak{M}_1^n \end{aligned}$$

Et comme A/\mathfrak{M}_1 est fini, il existe $p \in \mathbb{Z}$, tel que $p \in \mathfrak{M}_1$.

Mais alors, f^p approche $\chi_{\mathfrak{M}_1^n}$, modulo \mathfrak{M}_1^2 , et par récurrence, on montre que $f^{p^{k-1}}$ approche $\chi_{\mathfrak{M}_1^n}$, modulo \mathfrak{M}_1^k .

Il reste donc à montrer que $\chi_{\mathfrak{M}_1^n}$ peut être approché par un polynôme de A_S ,

modulo \mathfrak{m} , sous les hypothèses de la proposition.

Comme A' est de type fini sur A , il existe k tel que $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}$ et donc $\mathfrak{m}^{kn} \subset \mathfrak{m}^n$. Comme A/\mathfrak{m}^n est fini, alors $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{kn}$ est fini et \mathfrak{m}^n est la réunion disjointe de translatés de \mathfrak{m}^{kn} de la forme $a_i + \mathfrak{m}^{kn}$, en nombre fini.

Comme A' est local, c'est donc un anneau de valuation discrète ; il est par conséquent S-W [(3), V], et on peut approcher $\chi_{a_i + \mathfrak{m}^n}$ par f_i dans A'_S , modulo \mathfrak{m}^k , donc

$$\text{si } x \in a_i + \mathfrak{m}^n, f_i(x) \in 1 + \mathfrak{m}^k \text{ d'où } f_i(x) \in 1 + \mathfrak{m}$$

$$\text{si } x \notin a_i + \mathfrak{m}^n \text{ et } x \in A', f_i(x) \in \mathfrak{m}^k \text{ d'où } f_i(x) \in \mathfrak{m}$$

En particulier $f_i \in A_S$ et la somme f des f_i approche $\chi_{\mathfrak{m}^n}$ modulo \mathfrak{m} .

On peut alors rassembler les résultats démontrés :

Théorème :

Soit A un anneau intègre, noethérien de dimension 1, local, d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel fini. \hat{A} son complété pour la topologie \mathfrak{m} -adique. Si la clôture intégrale A' de A est un A module de type fini, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) A' est local ;
- 2) \hat{A} est intègre ;
- 3) A_S est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

Une application :

Si A est noethérien, local, de dimension 1, si A' est local et de type fini sur A , alors $A_S \not\subset A'_S$.

D'après la proposition préliminaire, A est un ouvert fermé de A' et la fonction g de A' dans A' définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= a \quad \text{si } x \in A \\ g(x) &= 1 \quad \text{si } x \notin A, x \in A' \end{aligned}$$

est continue.

On choisit $a \in A$ mais $a^{-1} \notin A$

(donc $a^{-1} \notin A'$).

Il existe deux entiers naturels s et r tels que :

$$\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}^s \subset Aa.$$

Puisque A' est un anneau de valuation discrète, il est S-W. Il existe donc un polynôme f de A_S qui approche g modulo \mathfrak{m}^r :

$$\text{Si } x \in A; f(x) \in a + \mathfrak{m}^r \text{ d'où } f(x) \in a + Aa.$$

$$\text{Si } x \notin A \text{ et } x \in A'; f(x) \in 1 + \mathfrak{m}^r \text{ d'où } f(x) \in 1 + Aa.$$

Alors $a^{-1}f$ est dans A_S mais n'est pas dans A'_S .

Un exemple :

Exemple d'un anneau B où B' est local, mais n'est pas un B -module de type fini. Alors \hat{B} n'est pas intègre et B_S n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\hat{B}, \hat{B})$.

Soit k le corps des fractions rationnelles $F_p(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à une infinité d'indéterminées sur le corps premier F_p .

On considère $k((U))$ muni de la valuation U -adique, dont l'anneau est $k[[U]]$ et qu'on note v .

On note :

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} X_n U^n \quad \text{et} \quad V = T^p = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^p U^{np}$$

U et T , ainsi que U et V sont algébriquement indépendants sur k (parce que T et V font intervenir une infinité de X_i).

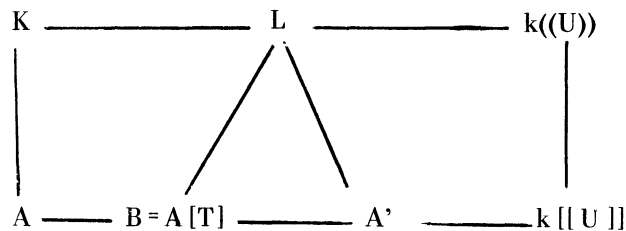
Soient $K = k(U, V)$ et $L = k(U, T) = K(T)$,

L est une extension algébrique radicielle de K et $[L : K] = p$.

La restriction de v à K est une valuation discrète d'anneau A . Cette valuation a un seul prolongement à $L = K(T)$, qui est la restriction de v à $L[[3]]$. L'anneau de la restriction de v à L est la fermeture intégrale A' de A dans L .

On note $B = A[[T]]$, B est un anneau noethérien, local, d'idéal maximal \mathfrak{m} de dimension 1, de corps des fractions L , A' est la clôture intégrale de B .

On peut résumer les inclusions par le diagramme :



Le prolongement de la valuation d'anneau A à L est unique et est une extension immédiate, c'est-à-dire d'indice de ramification $e = 1$ et de degré résiduel $f = 1$.

On a $ef = 1$, alors que le degré de l'extension est p ; A' n'est donc pas un A -module de type fini [3].

Et comme $B = A[T]$ est un A -module de type fini, A' n'est pas un B -module de type fini.

Montrons que \hat{B} n'est pas intègre et que, par conséquent, B n'est pas S-W.

$$\text{Soit } y_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} X_k U^k.$$

Alors y_m est dans \mathfrak{m} et $y_m - y_{m+1} = X_{m+1} U^{m+1}$ est dans \mathfrak{m}^{m+1} .

La suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans B et converge vers un élément y de \hat{B} .

De plus y_m^p est dans A , sa valuation est $p(m+1)$, donc appartient à $\mathfrak{m}^{p(m+1)}$.

D'où $y^p = 0$.

Montrons que y n'est pas nul. Puisque \mathfrak{m}^2 est un ouvert fermé de B , il suffit de montrer que quel que soit m , $y_m \notin \mathfrak{m}^2$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier m , tel que $y_m \in \mathfrak{m}^2$.

Comme \mathfrak{m}^2 est un idéal de B , c'est un A -module de type fini.

Si $y_m \in \mathfrak{m}^2$, on a donc :

$$y_m = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i$$

où $\lambda_i \in A$ et $\alpha_i \in \mathfrak{A}^2$.

Comme A et \mathfrak{A}^2 sont contenus dans $k[[U]]$, on peut développer en série

$$y_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} X_k U^k ; \quad \lambda_i = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda_i) U^n \quad \text{et} \quad \alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha_i) U^n.$$

D'où :

$$X_{\ell} = \sum_{i=1}^r \sum_{n+n'=\ell} C_n(\alpha_i) C_{n'}(\lambda_i) \quad \forall \ell \geq m+2.$$

De plus, λ_i est dans $K = k(U, V)$. C'est une fraction rationnelle à coefficients dans k . Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients et ceux-ci ne font intervenir qu'un nombre fini de variables X_j .

D'où :

$$\lambda_i \in F_p(X_1, \dots, X_N)(U, V).$$

Or $\lambda_i \in k[[U]]$. Quand on développe cette fraction rationnelle dans $k[[U]]$, comme

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^p U^{np}, \quad \text{on voit que } \lambda_i \in k_N[[U]] \text{ où } k_N \text{ est le corps}$$

$F_p(X_1, \dots, X_N, X_{N+1}^p, \dots, X_{N+k}^p, \dots)$. Il s'ensuit que $C_n(\lambda_i)$ appartient à k_N pour tout n .

On prend $N \geq m+1$, par ailleurs, \mathfrak{A} est engendré par U et T comme B -module, \mathfrak{A}^2 est donc engendré par $U^2, U T, T^2$ et comme B est engendré par $1, T, \dots, T^{p-1}$ comme A -module, les générateurs α_i de \mathfrak{A}^2 , peuvent avoir été choisis de la forme $U^k T^{j+k}$ où $0 \leq k \leq 2, 0 \leq j \leq p-1$.

De façon précise :

$$U^k T^{j+k} = U^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n U^n \right)^{j+k}.$$

Le calcul montre que la variable X_{N+1} n'intervient qu'aux degrés strictement

supérieurs à $N + 1$, dans α_i .

Pour finir, si $\ell = N + 1$, on a :

$$X_{N+1} = \sum_{i=1}^{3p} \sum_{n+n'=N+1} C_n(\lambda_i) C_{n'}(\alpha_i).$$

Où $X_{N+1} \notin k_N$ mais $C_n(\lambda_i)$ et $C_{n'}(\alpha_i)$ appartiennent à k_N pour tout n et pour tout n' . Une contradiction !

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. AMICE : Analyse p-adique, Séminaire Delange-Pisot (Théorie des nombres) (1959-1960) N° 4.
- [2] Y. AMICE : Interpolation p-adique, Thèse Université de Paris (1964).
- [3] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Paris - Hermann.
- [4] J.-L. CHABERT : Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières. J. reine angew Math. 293/294 (1977) p. 275-283.
- [5] K. MAHLER : An interpolation séries for continuous functions of p-adic variable, J. reine angew Math. 199 (1958) 23-34.
- [6] M. NAGATA : Local rings New-York (1962).
- [7] P. SAMUEL : Théorie algébrique des nombres, Hermann.
- [8] ZARISKI - SAMUEL : Commutative Algebra. Van Nostrand Company Inc.

*Paul-Jean CAHEN
Dept. de Mathématiques
Faculté des Sciences
TUNIS*