ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LÉONARD GALLARDO

Comportement asymptotique d'une classe de chaînes de Markov sur ℕ

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 95-101

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_95_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE CLASSE DE CHAINES DE MARKOV SUR $\mathbb{N}$

Léonard GALLARDO

Université de NANCY I (*)

Let X_n be a random walk on the set $\mathbb{N}$ of the positive integers, namely a Markov chain with stationnary transition probabilities given by $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i,i-1} = 1 - p_i$ ($p_i \in]0,1[$ for $i \geq 1$) and $p_{o,1} = 1$. When $p_i = {}^1/_2$ (for every $i \geq 1$), one has the following (well known) results :

$$\text{C.L.T.} \quad \frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-{}^1/_2 x^2}\, dx \ (x > 0) \quad \text{if} \quad n \to +\infty$$

$$\text{I.L.L.} \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2n \operatorname{Log} \operatorname{Log} n}} \overset{a.s}{=} 1 .$$

If we disturb the preceding transition probabilities with asymptotic damping i. e. $p_i = {}^1/2\,(1 + \varepsilon_i)$ and $\varepsilon_i = \lambda/_i + o({}^1/_i)$ $(i \to +\infty)$, then we show that the C.L.T. is completely altered whereas the I.L.L. is unchanged. Our methods of investigation are based on Fourier analysis deriving from Gegenbauer's polynomials and they can be applied to a larger class of Markov chains on $\mathbb{N}$ for which we give the C.L.T. and the I.L.L.

1. INTRODUCTION

Cette note est la rédaction d'un exposé fait à l'Ecole d'Eté de Calcul des Probabilités de Saint-Flour en juillet 1981. Les résultats sont tous donnés sans démonstration, l'auteur se réservant la possibilité de les publier ultérieurement avec des compléments.

Soit X_n l'état à l'instant n d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ ayant une matrice de transition $(p_{i,j})$ donnée par $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i,i-1} = 1 - p_i$ ($p_i \in]0,1[$ pour $i \geq 1$) et $p_{o,1} = 1$. Une telle chaîne sera notée (X_n, p_i) et nous l'appelerons chaîne de Harris dans la suite de l'exposé et principalement au paragraphe 4. Quand $p_i = {}^1/_2$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a les résultats (bien connus) :

$$\text{T.L.C.} \quad \frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-{}^1/_2 x^2}\, dx \ (x > 0) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

$$\text{L.L.I.} \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2n \operatorname{Log} \operatorname{Log} n}} \overset{p.s}{=} 1 .$$

(*) et E.R.A. n° 839 du C.N.R.S.

Si on perturbe les probabilités de transition de la chaîne précédente, avec amortissement quand $i \to +\infty$, i. e. $p_i = {}^1/_2\,(1+\varepsilon_i)$ et $\varepsilon_i \to 0$ quand $i \to +\infty$, le comportement asymptotique de X_n est sensiblement modifié pour ce qui est du T.L.C., alors que la L.L.I. peut rester la même.

L'origine des préoccupations précédentes remonte à Harris (cf. son article [4] de 1952) qui montre que si $\varepsilon_i = \lambda/i + o({}^1/_i)$, la chaîne X_n est récurrente positive si $\lambda < -{}^1/_2$, récurrente nulle si $-{}^1/_2 \leq \lambda \leq {}^1/_2$ et transiente si $\lambda > {}^1/_2$. Toujours dans le même cas, J. Lamperti démontre en 1962 (cf. [5]) que si $\lambda > -{}^1/_2$, on a le

$$\text{T.L.C.} \qquad \frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} x^{2\lambda}\, \frac{e^{-{}^1/_2\, x^2}}{2^{\lambda-{}^1/_2}\,\Gamma(\lambda+{}^1/_2)}\, dx \ (x>0) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

et si on pose $X_n(t) = X_{[nt]}/\sqrt{n}$, la suite des processus $X_n(t)$ converge faiblement (quand $n \to +\infty$) vers un processus de Bessel sur $\mathbb{R}_+$ de générateur infinitésimal $D = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\lambda}{x}\frac{d}{dx}$.

En 1971, H. Brezis, W. Rosenkrantz et B. Singer (cf. [1]) montrent par une méthode à la Trotter-Pinsky (cf. [6]) utilisant des approximations de l'opérateur D , que si $\varepsilon_i = \lambda/i$ et si $0 \leq \lambda < 1$, on a la

$$\text{L.L.I.} \qquad \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2n \operatorname{Log}\operatorname{Log} n}} \overset{p.s}{=} 1 .$$

Nous verrons ci-dessous que plus généralement, si $\varepsilon_i = \lambda/i + o({}^1/_i)$ et $\varepsilon_i \geq 0$, le résultat L.L.I. est encore vrai.

Le but de notre exposé est de montrer que les résultats dont nous venons de parler, s'inscrivent dans le cadre de la théorie des marches aléatoires sur $\mathbb{N}$ associées aux polynômes de Gegenbauer ; théorie introduite par B. Roynette (cf. [3]) et C. George (cf. [2]). Notre article comporte, sur ce sujet, deux résultats nouveaux : une nouvelle version du T.L.C. (théorème 1) plus opérationnelle que celle de [2] et une loi du logarithme itéré (théorème 3) qu'on obtient grâce à une détermination de la vitesse de convergence vers la loi limite dans le T.L.C. (théorème 2).

2. MARCHES ALEATOIRES ET POLYNÔMES DE GEGENBAUER (Rappels)

Les polynômes de Gegenbauer (normalisés) d'indice $\alpha > -1$ sont donnés par

$$(1) \qquad Q_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{2^n(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} (1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\alpha}$$

(cf. [7] pour leurs propriétés élémentaires) et vérifient la formule de multiplication :

$$(2) \qquad Q_1^\alpha(x)\, Q_n^\alpha(x) = \frac{n}{2n+2\alpha+1} Q_{n-1}^\alpha(x) + \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1} Q_{n+1}^\alpha(x) .$$

Si $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$, on a plus généralement (avec $m \leqslant n$) :

$$(3) \qquad Q_m^\alpha(x)\, Q_n^\alpha(x) = \sum_{k=o}^{m} C^\alpha(m,n,k)\, Q_{n-m+2k}^\alpha ,$$

où les $C^\alpha(m,n,k)$ sont tous $\geqslant 0$ et de somme égale à 1 . Ceci nous amène à définir une convolution $\times_\alpha$ sur l'ensemble $M_1(\mathbb{N})$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$ par :

$$(4) \qquad \delta_m \times_\alpha \delta_n = \sum_{k=o}^{m} C^\alpha(m,n,k)\, \delta_{n-m+2k} \qquad (m \leqslant n)$$

et plus généralement si $\mu = \sum_n \mu(n)\, \delta_n$ et $\nu = \sum_n \nu(m)\, \delta_m \in M_1(\mathbb{N})$:

$$(5) \qquad \mu \times_\alpha \nu = \sum_{m,n} \mu(n)\, \nu(m)\, \delta_n \times_\alpha \delta_m .$$

Pour $\mu \in M_1(\mathbb{N})$, la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de noyau

$$(6) \qquad \mathcal{P}(x,A) = (\delta_x \times_\alpha \mu)\,(A) \qquad (x \in \mathbb{N} ,\ A \subset \mathbb{N})$$

est alors appelée marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ de loi μ et de type α $(\geqslant -\frac{1}{2})$
Etant donné $\mu \in M_1(\mathbb{N})$, sa transformée de Fourier de type α $(\geqslant -\frac{1}{2})$ est donnée par :

$$(7) \qquad \mathcal{F}_\alpha\, \mu(\theta) = \sum_n \mu(n)\, Q_n^\alpha(\cos\theta) \qquad (\theta \in [0,\pi]) .$$

On a alors $\mathcal{F}_\alpha(\mu \times_\alpha \nu) = \mathcal{F}_\alpha\, \mu . \mathcal{F}_\alpha\, \nu$ $(\mu , \nu \in M_1(\mathbb{N}))$ et si X_n désigne l'état à l'instant n de la marche aléatoire de loi μ et de type α $(\geqslant -\frac{1}{2})$ partant de $i \in \mathbb{N}$, sa transformée de Fourier est ainsi égale à :

$$(8) \qquad E_i(Q_{X_n}^\alpha(\cos\theta)) = [\,\mathcal{F}_\alpha\, \mu(\theta)]^n\, Q_i^\alpha(\cos\theta) .$$

Dans le cas où $\alpha \in]-1,-{}^1/_2[$ et si $\mu = q\,\delta_0 + p\,\delta_1$ $(p+q = 1)$, on peut encore définir la notion de marche aléatoire de loi μ grâce à la formule (2) et la formule (8) est encore valable sous la forme :

(9) $$E_i(Q^\alpha_{X_n}(\cos\theta)) = (q + p\cos\theta)^n\, Q^\alpha_i(\cos\theta) .$$

Le théorème de la limite centrale suivant est dû à C. George (cf. [2] ou [3], p. 236).

THEOREME. *Soient* $\mu \in M_1(\mathbb{N})$ *ayant un moment d'ordre* 2 *et* C *la constante* $\frac{1}{4(\alpha+1)} \sum_n n(n+2\alpha+1)\,\mu(n)$. *Soit* X_n *l'état à l'instant* n *de la marche aléatoire de loi* μ *et de type* $\alpha > -1$ *partant de* $i \in \mathbb{N}$ *à l'instant zéro (si* $\alpha \in]-1,-{}^1/_2[$, *il faut supposer de plus que* μ *est portée par* 0 *et* 1*). Alors* $\frac{X_n}{\sqrt{2Cn}}$ *converge en loi, quand* $n \to +\infty$, *vers une probabilité concentrée sur* $\mathbb{R}^+$ *et ayant une densité égale à* $\frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)}\, e^{-{}^1/_2\, x^2}$.

3. AUTRE VERSION DU T.L.C.

En symétrisant convenablement la marche aléatoire X_n, on peut obtenir une convergence en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$; c'est l'idée essentielle de ce paragraphe.

Introduisons une v. a. Z_α $(\alpha \geq -{}^1/_2)$ de loi équirépartie sur ± 1 si $\alpha = -{}^1/_2$ et de loi répartie sur $]-1,+1[$ (si $\alpha > -{}^1/_2$), suivant la densité de probabilité

(10) $$f_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+{}^1/_2)}\,(1-t^2)^{\alpha-{}^1/_2} \qquad (t \in]-1,+1[) .$$

Avec ces notations et celles du paragraphe 2, on a :

THEOREME 1. *Soit* $\alpha \geq -{}^1/_2$. *On suppose que la v. a.* Z_α *est indépendante de la marche aléatoire* (X_n) *de type* α *et de loi* μ *ayant un moment d'ordre* 2. *La marche partant d'un point* $i \in \mathbb{N}$, *quelconque, on a :*

$$\frac{Z_\alpha(X_n+\alpha+{}^1/_2)}{\sqrt{2Cn}}$$ *converge en loi, quand* $n \to +\infty$, *vers une loi normale centrée réduite sur* $\mathbb{R}$.

L'idée de la démonstration consiste à "voir" dans la formule (8) la transformée de Fourier ordinaire d'une v. a., mais nous n'entrerons ni dans les motivations de l'idée, ni dans les détails techniques qu'il serait trop long de développer.

<u>THEOREME</u> 2. *Avec les notations précédentes et* μ *ayant un moment d'ordre 4, soient* F_n *la fonction de répartition de la v. a.* $\dfrac{Z_\alpha(X_n+\alpha+{}^1/_2)}{\sqrt{2Cn}}$ *et* G *la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On a alors :*

a) *si* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *ou* $\alpha = \frac{1}{2}$ *, il existe une constante* $C_1^\alpha > 0$ *telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{C_1^\alpha}{\sqrt{n}} ,$$

b) *si* $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$ $(\alpha \neq \pm {}^1/_2)$ *, il existe une constante* $C_2^\alpha > 0$ *telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{C_2^\alpha}{n^{1/4}} .$$

Ces estimations s'obtiennent par une méthode à la Berry-Esseen et sont très techniques.

<u>COROLLAIRE</u> 1. *Si* x_n *est une suite tendant vers* $+\infty$ *et telle que* $\dfrac{x_n\, e^{{}^1/_2 x_n^2}}{n^{1/4}} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *(en particulier, ceci est vérifié si* $x_n = C^{te}\sqrt{\mathrm{Log\ Log}\ n}$*) , on a :*

$$P\left(\left|\frac{Z_\alpha(X_n+\alpha+{}^1/_2)}{\sqrt{2Cn}}\right| \geqslant x_n\right) \sim 2\int_{x_n}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-{}^1/_2 x^2}\, dx \quad (n \to +\infty) .$$

3. <u>LA LOI DU LOGARITHME ITERE</u>

<u>LEMME</u> 1 *(lemme maximal). Avec les notations des paragraphes précédents, si* $\alpha > -\frac{1}{2}$ *, il existe une constante* $C_3 \geqslant 0$ *telle que, quel que soit* $x \in \mathbb{N}$ *, on ait*

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_n \geqslant x\right) \leqslant C_3\ P(X_n \geqslant x) .$$

<u>LEMME</u> 2. a) *Si* $\alpha = -{}^1/_2$ *, on a* $P(X_n \geqslant x) \leqslant P(|Z_\alpha X_n| \geqslant x)$ *, quel que soit* $x > 0$.

b) *Supposons* $\alpha > -{}^1/_2$ *, alors, quel que soit* $\varepsilon > 0$ *, il existe une constante* $C(\varepsilon) > 0$ *telle que, quel que soit* $x \in \mathbb{R}_+$ *, on ait :*

$$P(X_n \geq x) \leq C(\varepsilon)\ P(|Z_\alpha(X_n+\alpha+{}^1/_2)| \geq (1-\varepsilon)\ x)\ .$$

Grâce à ces deux lemmes et au corollaire 1, on obtient :

THEOREME 3. *Soient* $\alpha \geq -{}^1/_2$ *et* X_n *l'état à l'instant* n *d'une marche aléatoire de type* α, *de loi* μ *possédant un moment d'ordre* 4 *et partant d'un point* $i \in \mathbb{N}$, *quelconque. On a alors :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{4Cn\ \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ n}} \leq 1 \quad \textit{presque sûrement.}$$

Nous présumons que l'inégalité précédente (qui est une égalité dans le cas particulier des marches aléatoires de type α qui sont des chaînes de Harris, cf. § 4 ci-dessous) est toujours une égalité, mais nous ne sommes pas encore parvenu à le démontrer.

4. LIEN AVEC LES PROBLEMES DE L'INTRODUCTION

Lorsque $\mu = \delta_1$, la marche aléatoire de type α et de loi μ a des probabilités de transition données par :

$$(11)\qquad \begin{aligned} p_{i,i+1} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{i+\lambda}\right) \\ p_{i,i-1} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{i+\lambda}\right) \\ p_{o,1} &= 1 \end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = \alpha + {}^1/_2$. Ces marches aléatoires sont du type de Harris et elles vérifient le T.L.C. (qui est le même évidemment que celui de Lamperti) et la L.L.I. (théorème 3) avec d'ailleurs $C = {}^1/_2$ $(\forall\ \alpha \geq -{}^1/_2)$. Notre idée est de les utiliser comme une échelle de comparaison. Pour ce faire, il nous faut pouvoir comparer deux chaînes de Harris (X_n,p_i) et (X'_n,p'_i) dont l'une s'éloigne plus vite que l'autre de l'origine. Plus précisément, si $p'_i \leq p_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on notera $(X'_n) \leq (X_n)$. Cette notation est justifiée par le lemme suivant :

LEMME 3. *Soient* (X_n,p_i) *et* (X'_n,p'_i) *deux chaînes de Harris partant de zéro et telles que* $(X'_n) \leq (X_n)$. *Alors on peut les construire sur le même espace probabilisé, de telle manière que* P_o *presque sûrement, on ait :* $X'_n \leq X_n$ *pour tout* $n \geq 0$.

REMARQUE. Si (X'_n, p'_i) est une chaîne de Harris sur $\mathbb{Z}$, (X_n, p_i) une chaîne de Harris sur $\mathbb{N}$, partant toutes les deux de zéro et si $p'_i \leqslant p_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, le résultat précédent est encore valable.

CONSEQUENCE 1. Pour la marche de Harris de type $\alpha = -{}^1/_2$ (i. e. $\lambda = 0$ dans les formules (11)), on a la loi du logarithme itéré complète avec égalité, car on peut la minorer par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle la L.L.I. est bien connue.

CONSEQUENCE 2. Avec les notations de l'introduction, supposons $\varepsilon_i \geqslant 0$ et $\varepsilon_i = \lambda/_i + o({}^1/_i)$, alors la chaîne de Harris correspondante, partant de zéro, vérifie la

$$\text{L.L.I.} \qquad \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2n \operatorname{Log} \operatorname{Log} n}} \stackrel{p.s}{=} 1 \ ;$$

il suffit de choisir λ' suffisamment grand pour que l'on ait $\varepsilon_i \leqslant \lambda'/_{i+\lambda'}$ pour tout $i \geqslant 1$ et utiliser le lemme 3 en minorant cette chaîne par la chaîne de Harris de type $\alpha = -{}^1/_2$ et en la majorant par la chaîne de Harris de type $\alpha = \lambda' - {}^1/_2$.

On a même plus généralement la L.L.I. pour des chaînes de Harris telles que $\varepsilon_i \geqslant 0$, $\varepsilon_i = h(i)/_i$ et $\limsup_{i\to+\infty} h(i) < +\infty$, par la même méthode.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREZIS H., ROSENKRANTZ W. et SINGER B., An extension of Khintchine's estimate for large deviations to a class of Markov chains converging to a singular diffusion. Comm. on Pure and Applied Math., Vol. XXIV (1971), p. 705-726.

[2] GEORGE C., Les chaînes de Markov associées à des polynômes orthogonaux. Thèse de Doctorat d'Etat, Nancy (1975).

[3] GUIVARC'H Y., KEAN M. et ROYNETTE B., Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Lecture Notes in Math. n° 624, Springer Verlag (1977).

[4] HARRIS T. E., First passage and recurrence distribution. Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), p. 471-486.

[5] LAMPERTI J., A new class of probability limit theorems. Journal of Math. and Meca., Vol. 11, n° 5 (1962), p. 749-772.

[6] PINSKI M., An elementary derivation of Khintchine's estimate for large deviations. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 22, n° 1 (1969), p. 288-290.

[7] SZEGÖ G., Orthogonal polynomials. American Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXIII (1939).