ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

DOMINIQUE BAKRY

**Semimartingales à deux indices**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 53-54

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_53_0>

# SEMIMARTINGALES A DEUX INDICES

Dominique BAKRY

Université Louis-Pasteur - STRASBOURG

---

Le sujet de cet exposé est un travail à paraître dans le Séminaire de Probabilités XVI. Dans le cadre de l'étude des processus à d ux indices, tel qu'il a été défini par [CW], on étudie les processus permettant de définir une intégrale stochastique de processus prévisible bornés à deux indices, comme mesure à valeurs dans $L^p$ $(p\geq 1)$.

Résumons brièvement les principaux résultats: étant donné un espace de probabilité complet muni de deux filtrations $\mathbb{F}^1_s$ et $\mathbb{F}^2_t$ vérifiant la condition de commutation F.4 de [CW], un processus prévisible élémentaire est une combinaison linéaire de processus de la forme $H(\omega)1_{]s_1,s_2]}(s)1_{]t_1,t_2]}(t)$, où $H(\omega)$ est une variable bornée mesurable par rapport à $\mathbb{F}^1_{s_1}$ et à $\mathbb{F}^2_{t_1}$.

Si K est un processus prévisible élémentaire, et X un processus quelconque à deux indices, on sait définir de manière immédiate l'intégrale stchastique H.X de H par rapport à X .

<u>Définition</u>: On dira qu'un processus $X(\omega,s,t)$ est une semimartingale de $S_p$ si:

-X est nul sur les axes ( $X_{s,0} = X_{0,t} = 0$ ) ;

-X est continu à droite en probabilité;

-X est adapté

- $\|X\|_{S_p}$ = (déf.) $\sup_H \|H.X\|_p < \infty$ , où le sup est pris sur tous les processus prévisibles élémentaires bornés par 1.

On connait différents types de semimartingales de $S_p$:

1) Les processus à variation finie, dont la variation est dans $L^p$

2) Les martingales de $L^p$ $(p>1)$

3) certains processus d'un modèle mixte, étudiés dans [WZ], de la forme $E(A_t/\mathbb{F}^1_s)$, où $A_t$ est un processus à variation finie, adapté à $\mathbb{F}^2_t$ , et satisfait en outre à des conditions assez restrictives; en particulier, les mesures $dA_t(\omega)$ doivent être absolument continues par rapport à une même mesure déterministe sur $R^+$.

4)Evidemment, le modèle symétrique obtenu en échangeant les rôles des deux coordonnées.

On sait donner des exemples de processus $A_t$ à variation bornée, ne satisfaisant pas l'hypothèse d'absolue continuité, et tel que $X_{s,t} = E(A_t / \mathbb{F}^1_s)$ ne soit pas une semimartingale au sens $L^0$ ; d'autre part, il existe des semimartingales de $S_2$ qui ne se décomposent pas en somme de processus de la forme précédente.

On montre que tout élément de $S_1$ se décompose en somme d'un processus prévisible à variation finie et d'une martingale faible de $S_1$. Mais, en général, on ne sait pas si la décomposition a lieu dans $S_p$ $(p>1)$. Pour aller plus loin, on fait des hypothèses supplémentaires qui peuvent être de deux types:

1)X reste une semimartingale quand on remplace la filtration $\mathbb{F}^2_t$ par la filtration constamment égale à $\mathbb{F}^2_\infty$ (on dit alors que X est une 1-semimartingale) : la décomposition précédente a alors lieu dans $S_p$

2)$X_{s,t}$ est, à s (resp.t) fixé, une semimartingale à un indice par rapport à la filtration $\mathbb{F}^2_\cdot$ (resp. $\mathbb{F}^1_\cdot$) ; dans ce cas, X se décompose de manière unique en somme de quatre éléments de $S_p$ , $X = M + A + X^1 + X^2$, où M est une martingale, A un processus prévisible à variation finie, $X^1$ est de la forme $E(A^1_t / \mathbb{F}^1_s)$ , $A^1_t$ étant prévisible à variation finie dans la filtration $\mathbb{F}^2_t$, $X^2$ étant d'un modéle symétrique. En particulier, X admet une version à trajectoires continues à droite.

Enfin, on donne des conditions suffisantes, généralisant celles de [WZ], pour qu'un processus de la dernière forme soit un élémnt de $S_p$.

Références: [CW] Cairoli, R.; Walsh, J.B.; Stochastic integrals in the plane; Acta Math. 134, 1975, 111-183.

[WZ] Wong, E.; Zakai, M.; Weak martingales and stochastic integrals in the plane, ZW 29, 1974, 109-122.