

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

P. BALDI

Petites perturbations d'un phénomène Peano

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 41-52

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_41_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PETITES PERTURBATIONS D'UN PHENOMENE PEANO

P. BALDI

Università di PISA (ITALY)

1. Introduction

Considérons dans \mathbf{R}^m l'opérateur différentiel

$$L_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Il est connu depuis les articles de D.W.Stroock et S.R.S. Varadhan [4] et [5] que, si a et b sont continues bornées, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^m$ il existe un processus de diffusion, unique en loi, associé à L_ε et sortant de x_0 . De plus, si P^ε en désigne la loi, la famille $\{P^\varepsilon\}_\varepsilon$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence étroite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et toutes ses valeurs d'adhérence (v.a.) ont leur support contenu dans l'ensemble des trajectoires qui sont solution de l'équation

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x'(t) &= b(x(t)). \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

En particulier si (1.1) a une seule solution il y a une seule v.a., à savoir la delta de Dirac concentrée sur la solution. Par contre on ne peut rien dire si (1.1) n'a pas de solution unique et il y a donc phénomène de Peano.

On va ici exposer l'article [1], écrit en collaboration avec R.Bafico où on a éclairci ce problème pour $m=1$. On verra que, sous des hypothèses convenables, toutes les v.a. sont portées par deux solutions au plus de (1.1), qui dépendent de b et non du particulier v.a. considéré. Ces trajectoires ainsi que leur probabilités relatives seront explicitement individuées.

Ce problème, par ailleurs très naturel, peut être considéré comme un essai de donner une signification physique à l'équation (1.1) en absence d'un théorème d'unicité. En effet la plupart des fois un système dynamique

est régi plutôt que par (1.1), par l'équation stochastique

$$(1.2) \quad dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon) dt + \varepsilon dB_t$$

que l'on obtient de (1.1) en ajoutant une petite perturbation. Ce qui est intéressant d'un point de vue physique est donc, plutôt que les solutions de (1.1), le comportement pour ε petit des solutions de (1.2). On verra d'ailleurs dans les exemples des nombreux cas où la famille $\{P_\varepsilon^\varepsilon\}$ n'a qu'une seule v.a. pour $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui peut permettre, dans un certain sens, de parler d'unicité des solutions pour (1.1) dans des situations où cela n'est pas vrai dans le cas traditionnel.

2. Structure de l'ensemble des solutions

Dans ce paragraphe on va donner une description de l'ensemble des solutions de (1.1) en cas de phénomène de Peano. Pour les détails et les preuves la bonne référence est le livre de Petrovsky [3], chapitre 2.

Proposition 2.1 Considérons le problème (1.1), où $x_0 \in \mathbb{R}$ et b est une fonction continue définie dans un voisinage de x_0 . Alors si $b(x_0) \neq 0$ (1.1) n'a localement qu'une solution. Si $b(x_0) = 0$ et x_0 est un zéro isolé de b , alors il y a des solutions autres que la constante si et seulement si pour quelque $r > 0$ on a

$$b(x) > 0 \text{ pour } x_0 + r < x < x_0 \text{ et } \int_{x_0}^{x_0+r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$$

ou bien

$$b(x) < 0 \text{ pour } x_0 - r < x < x_0 \text{ et } \int_{x_0}^{x_0-r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$$

On peut donner une description explicite des solutions de (1.1) dans le cas où x_0 est un zéro isolé de b , ce que nous supposerons dorénavant.

On dira qu'on est dans le cas uni-directionnel si $b(x) \geq 0$ (ou $b(x) \leq 0$) dans un voisinage de x_0 , dans le cas répulsif si $b(x)(x-x_0) \geq 0$ dans un voisinage de x_0 .

a) Cas uni-directionnel. Supposons $b(x) \geq 0$. Par la proposition 2.1

$$\int_{x_0}^{x_0+r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$$

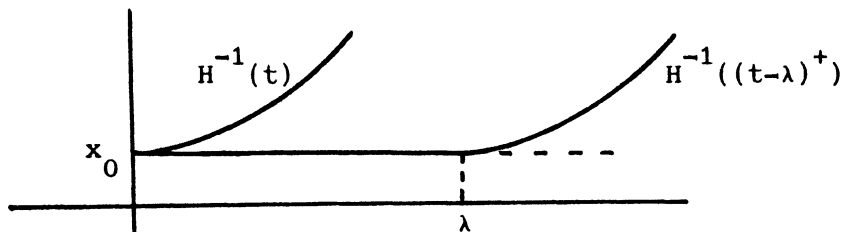
et si

$$(2.1) \quad H(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{b(y)} dy$$

alors H est strictement croissante sur $[x_0, x_0+r]$ et si H^{-1} est la fonction inverse toutes les solutions de (1.1) jusqu'à la sortie de $[x_0-r, x_0+r]$ sont de la forme

$$x_\lambda(t) = H^{-1}((t-\lambda)^+) \quad \lambda \geq 0$$

La solution $H^{-1}(t)$ sera appelée extrémale et indiquée par $\psi(t)$.



b) Cas répulsif. A moins de symétries il n'y a que deux possibilités

$$b_1) \quad \int_{x_0}^{x_0+r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x_0-r} \frac{1}{b(y)} dy = +\infty$$

$$b_2) \quad \int_{x_0}^{x_0+r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x_0-r} \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$$

Dans le cas b_1) l'ensemble des solutions est semblable au cas a). Dans

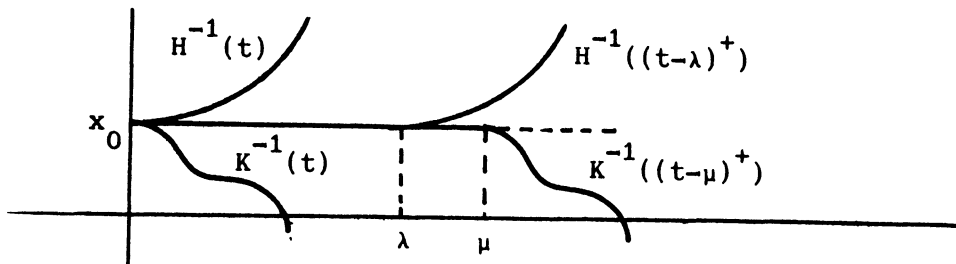
le cas b_2) si

$$K(x) = \int_x^{x_0} \frac{1}{b(y)} dy$$

alors, jusqu'à la sortie de $[x_0-r, x_0+r]$ toutes les solutions sont de l'un des deux types suivants

$$x_\lambda(t) = H^{-1}((t-\lambda)^+) \quad \lambda \geq 0$$

$$y_\mu(t) = K^{-1}((t-\mu)^+) \quad \mu \geq 0$$



Les fonctions $\psi_1(t) = H^{-1}(t)$ et $\psi_2(t) = K^{-1}(t)$ seront appelées extrémale supérieure et inférieure respectivement. Il est important de remarquer que ψ_1 est, parmi les solutions qui quittent $[x_0-r, x_0+r]$ au point x_0+r , celle qui minimise le temps de sortie de $[x_0-r, x_0+r]$. Ce temps de sortie vaut

$$\int_{x_0}^{x_0+r} \frac{1}{b(y)} dy \text{ exactement. De même } \psi_2 \text{ minimise le temps de sortie parmi les solutions qui quittent } [x_0-r, x_0+r] \text{ au point } x_0-r \text{ et ce temps de sortie vaut}$$

$$\int_{x_0}^{x_0-r} \frac{1}{b(y)} dy.$$

3. Estimation du temps moyen de sortie

Soit P_x^ϵ la loi de la diffusion sur \mathbb{R} associée à l'opérateur

$$L_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{2} a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}$$

et issue de x . Nous supposons b continue bornée et a lipschitzienne et strictement positive. P_x^ϵ est donc une loi de probabilité sur l'espace

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Soit τ le temps de sortie de $]x_0-r, x_0+r[$. Les résultats suivants sont alors immédiats.

Proposition 3.1 $\tau: \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement.

Proposition 3.2 Si $P_x^\epsilon \rightarrow P$ étroitement, alors

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_x^\epsilon(\tau) \geq E(\tau)$$

où E_x^ϵ et E désignent les esperances par rapport à P_x^ϵ et P respectivement.

Considérons maintenant le problème à la frontière suivant

$$(3.1) \quad \frac{\epsilon^2}{2} a(x) \phi_\epsilon''(x) + b(x) \phi_\epsilon'(x) = -1 \quad x \in]x_0-r, x_0+r[$$

$$(3.2) \quad \phi_\epsilon(x_0-r) = \phi_\epsilon(x_0+r) = 0$$

Par la formule de Itô on a facilement pour $x \in]x_0-r, x_0+r[$

$$\phi_\epsilon(x) = E_x^\epsilon(\tau)$$

L'idée est la suivante: on va résoudre explicitement (3.1), (3.2) et étudier le comportement de $\phi_\epsilon(x_0)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. Ceci, grâce à la proposition 2.1 nous donnera des renseignements sur les v.a. de P_x^ϵ qui, dans le cas b₂), nous permettront de les identifier. Les cas a) et b₁) seront étudiés à partir du cas b₂) par des théorèmes de comparaison.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on supposera $x_0=0$ et on écrira P^ϵ au lieu de P_0^ϵ .

Les solutions de (3.1) sont de la forme

$$c_1 + c_2 + A_\epsilon(x) - B_\epsilon(x)$$

où

$$(3.4) \quad A_\epsilon(x) = \int_0^x \exp \left[-\frac{2}{\epsilon^2} \int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds \right] dt$$

$$(3.5) \quad B_{\epsilon}(x) = \frac{2}{\epsilon^2} \int_0^x du \int_u^x \frac{1}{a(s)} \exp \left[-\frac{2}{\epsilon^2} \int_u^t \frac{b(s)}{a(s)} ds \right] dt$$

Evidemment

$$E_{\epsilon}^{\tau} = c_1$$

et pour que (3.2) soit satisfaite

$$c_1 = B_{\epsilon}(r) \frac{-A_{\epsilon}(-r)}{A_{\epsilon}(r) - A_{\epsilon}(-r)} + B_{\epsilon}(-r) \frac{A_{\epsilon}(r)}{A_{\epsilon}(r) - A_{\epsilon}(-r)}$$

Proposition 3.3 Supposons $b > 0$ sur $]0, r]$ (resp $b < 0$ sur $[-r, 0[$) et que pour quelque $\delta > 0$ la fonction $h(x) = \min_{[x, x+\delta]} b$ (resp. $h(x) = \max_{[x-\delta, x]} b$) soit

telle que $\int_0^r \frac{1}{h(y)} dy < +\infty$ (resp. $\int_0^{-r} \frac{1}{h(y)} dy < +\infty$). Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_{\epsilon}(r) = \int_0^r \frac{1}{b(y)} dy \quad (\text{resp.} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_{\epsilon}(-r) = \int_0^{-r} \frac{1}{b(y)} dy)$$

La proposition 3.3 nous sera utile dans le calcul du comportement asymptotique de $\phi_{\epsilon}(0)$. On ne sait pas si la condition de la proposition 3.3 est essentielle ou bien technique (voir §5). En tout cas, si on est dans le cas b_2 , qui nous intéresse en ce moment, cette condition est vérifiée dans un grand nombre d'exemples; il suffit en particulier que b soit croissante dans un voisinage de 0, car en ce cas $h(x) = b(x)$.

Considérons maintenant le problème

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{\epsilon^2}{2} a(x) \phi_{\epsilon}''(x) + b(x) \phi_{\epsilon}'(x) &= 0 \\ \phi_{\epsilon}(r) = 1 \quad \phi_{\epsilon}(-r) &= 0 \end{aligned}$$

Encore, par une application de la formule de Itô

$$\phi_{\epsilon}(x) = P_x^{\epsilon} \{ \omega \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \omega(\tau) < +\infty, \omega(\tau) = r \}$$

et donc par un calcul explicite

$$(3.8) \quad P^\epsilon \{\tau < +\infty, \omega(\tau) = r\} = \frac{-A_\epsilon(-r)}{A_\epsilon(r) - A_\epsilon(-r)}$$

et aussi

$$P^\epsilon \{\tau < +\infty, \omega(\tau) = -r\} = \frac{A_\epsilon(r)}{A_\epsilon(r) - A_\epsilon(-r)}$$

Proposition 3.4 Si $P^{\epsilon_n} \rightarrow P$ étroitement alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P^{\epsilon_n} \{\tau < +\infty, \omega(\tau) = r\} \geq P\{\tau < +\infty, \omega(\tau) = r\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P^{\epsilon_n} \{\tau < +\infty, \omega(\tau) = -r\} \geq P\{\tau < \infty, \omega(\tau) = -r\}$$

Si de plus $P\{\tau = +\infty\} = 0$ alors on peut remplacer les inégalités par des égalités et \liminf par \lim .

4. Théorèmes principaux

Soit, comme d'habitude, $X_t: \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Si Q est une probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $Q|_{\mathcal{F}_t}$ désignera la restriction de Q à \mathcal{F}_t .

Théorème 4.1 Supposons que b soit comme dans le cas b_2) du §2 et que pour quelque $\delta > 0$ les fonctions $h(x) = \min_{[x, x+\delta]} b$ et $k(x) = \max_{[x-\delta, x]} b$ soient telles que

$$\int_0^r \frac{1}{h(y)} dy < +\infty \qquad \int_0^{-r} \frac{1}{k(y)} dy < +\infty$$

Alors toutes les v.a. P de $\{P^\epsilon\}_\epsilon$ sont concentrées sur les solutions extrémales dans une intervalle de temps assez petite. Plus précisément pour toute valeur limite α de

$$(4.1) \quad \frac{-A_\epsilon(-r)}{A_\epsilon(r) - A_\epsilon(-r)}$$

pour quelque $t > 0$

$$(4.2) \quad P|_{\mathcal{F}_t} = \alpha \delta_{\psi_1} + (1-\alpha) \delta_{\psi_2}$$

Inversement si P est une valeur limite de $\{P^\epsilon\}_\epsilon$ pour $\epsilon \rightarrow 0$, alors P est de la forme (4.2) où α est une valeur limite de (4.1) pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Démonstration. Soit $\{\epsilon_n\}_n$ une suite telle que $P^{\epsilon_n} \rightarrow P$. Alors grâce à la proposition 3.3 $E^{\epsilon_n}(\tau)$ est bornée et par la proposition 3.2 $P\{\tau = +\infty\} = 0$. Donc par la proposition 3.4 et (3.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-A_{\epsilon_n}(-r)}{A_{\epsilon_n}(r) - A_{\epsilon_n}(-r)} = P\{\omega; \omega(\tau) = r\} = \alpha$$

Par les propositions 3.3 et 3.2

$$E(\tau) \leq \alpha \int_0^r \frac{1}{b(y)} dy + (1-\alpha) \int_0^{-r} \frac{1}{-b(y)} dy$$

Mais si P est une probabilité quelconque concentrée sur l'ensemble des solutions de (1.1) et telle que $P\{\omega, \omega(\tau) = r\} = \alpha$ et $P\{\omega, \omega(\tau) = -r\} = 1-\alpha$, alors par la remarque à la fin du §2

$$E(\tau) \geq \alpha \int_0^r \frac{1}{b(y)} dy + (1-\alpha) \int_0^{-r} \frac{1}{b(y)} dy$$

l'égalité n'étant possible que si P satisfait à (4.2) pour t plus petit où égal aux temps de sortie des extrémales.

Donc les v.a. de $\{P^\epsilon\}_\epsilon$ sont en bijection avec les valeurs limites de $\frac{A_\epsilon(r)}{A_\epsilon(-r)}$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. Par l'expression explicite (3.4) de A_ϵ il est facile de se convaincre que ce qui affecte les valeurs de α est plus précisément le comportement de b dans un voisinage de 0. Intuitivement si $|b(x)|$ croît "plus vite" du côté positif que du côté négatif alors d'autant plus P aura tendance à charger ψ_1 plutôt que ψ_2 . Les exemples suivants seront illuminants à cet égard.

Exemple 4.1

$$b(x) = \begin{cases} x^\gamma & x \geq 0 \\ -|x|^\delta & x < 0 \end{cases}$$

où $0 < \gamma < \delta < 1$. L'expression en (4.1) est convergente vers 1 pour $\epsilon \rightarrow 0$. La seule v.a. de $\{P^\epsilon\}_\epsilon$ est donc δ_{ψ_1} .

Exemple 4.2

$$b(x) = \begin{cases} x^\gamma & x \geq 0 \\ -A|x|^\gamma & x < 0 \end{cases}$$

où $0 < \gamma < 1$. De même il n'y a qu'une v.a. qui est donnée par $\alpha \delta_{\psi_1} + (1-\alpha) \delta_{\psi_2}$ où

$$\alpha = \frac{1}{1+A} \cdot \frac{1}{1+\gamma}$$

La méthode développée dans le théorème 4.1 ne marche pas dans les cas a) et b). Par exemple si

$$b(x) = \begin{cases} x^{1/2} & x \geq 0 \\ |x|^4 & x < 0 \end{cases}$$

un calcul direct donne $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^\epsilon(\tau) = +\infty$, ce qui ne donne aucun renseignement.

Théorème 4.2 Soit b comme dans le cas a) du §2 et supposons que si

$h(x) = \max_{[x, x+\delta]} b$ alors $\int_0^r \frac{1}{h(y)} dy < +\infty$. Alors si P est une v.a. de $\{P^\epsilon\}_\epsilon$ pour $\epsilon \rightarrow 0$ $P|_{\mathcal{F}_t}$ est concentrée sur la solution extrémale pour quelque $t > 0$.

Idée de la démonstration. On pose

$$b_n(x) = \begin{cases} b(x) & x \geq 0 \\ -\frac{1}{n} b(-\frac{1}{n} x) & x < 0 \end{cases}$$

b_n est alors comme dans le cas b), $b_n \leq b$ et évidemment les extrémales supérieures de b et b_n coïncident. Si $P^{\epsilon, n}$ est la loi de la diffusion associée à

l'opérateur

$$L_{\epsilon, n} = \frac{\epsilon^2}{2} a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_n(x) \frac{d}{dx}$$

par le théorème 4.1 on peut voir que, pour $\epsilon \rightarrow 0$, $\{P_\epsilon^\epsilon\}$ a une seule v.a. dans un intervalle de temps assez petit T (qui ne dépend pas de n); cette v.a. est donnée par

$$P^n = \frac{n}{n+1} \delta_{\psi_1} + \frac{1}{n+1} \delta_{\psi_n}$$

où ψ_n est l'extremale inférieure de b_n . Si X^ϵ et $X^{\epsilon, n}$ sont deux solutions fortes des équations différentielles stochastiques associées à L_ϵ et $L_{\epsilon, n}$ respectivement par rapport au même brownien $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_t, (B_t)_t, Q)$, alors par des théorèmes de comparaison standard (voir [2] par exemple) on a $X_t^\epsilon > X_t^{\epsilon, n}$ Q-p.s., ce qui entraîne facilement que toute v.a. de $\{P_\epsilon^\epsilon\}$ donne à ψ_1 une masse plus grande que $\frac{n}{n+1}$; n étant arbitraire on a la thèse.

Par la même méthode on a le résultat suivant, un peu plus faible.

Théorème 4.3 Soit b comme dans le cas b_1) du §2 et supposons que si $h(x) = \min_{[x, x+\delta]} b$ alors $\int_0^r \frac{1}{h(y)} dy < +\infty$. Si de plus pour tout $k > 0$

$$(4.2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b(kx)}{-b(-x)} = +\infty$$

alors toute v.a. de $\{P_\epsilon^\epsilon\}$ est telle que pour quelque $T > 0$ $P|_{\mathcal{F}_T}$ est concentrée sur la solution extremale.

5. Remarques finales

Certains points demeurent obscurs. En particulier

a) Est-ce que la condition de la proposition 3.3 est technique ou bien en son absence des pathologies seraient possibles? On connaît des exemples de fonctions b telles que $\int_0^r \frac{1}{b(y)} dy < +\infty$ mais $\int_0^r \frac{1}{h(y)} dy = +\infty$, malheureusement ils sont assez compliqués pour qu'on ait peur d'aborder les calculs.

b) Dans tous les exemples qu'on connaît pour le cas b_2) il n'y a qu'une seule v.a. dans un intervalle de temps petite, car l'expression en (4.1) a une limite pour $\epsilon \rightarrow 0$. Est-ce que c'est toujours le cas? On serait tentés de le croire car une interprétation physique de l'existence de plusieurs v.a. nous paraît malaisée; les calculs des limites d'expressions du type (4.1) en toute généralité sont pourtant assez compliqués.

c) La technique qu'on vient d'exposer est certainement d'emploi difficile dans les cas de dimension plus grande que 1, surtout parce que on serait confrontés à des problèmes aux dérivées partielles autrement plus difficiles que les équations ordinaires. Néanmoins ces résultats ainsi que des essais de simulation à l'ordinateur suggèrent la possibilité d'un comportement analogue à celui qu'on vient de décrire: existence d'un ensemble de solutions "extremales" sur lesquelles les v.a. seront concentrées. Chaque v.a. sera déterminée par une distribution de probabilité sur l'ensemble des extremales, qui sera en général un continu.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.Bafico, P.Baldi - "Small random perturbations of Peano phenomena" - à paraître sur Stochastics.
- [2] N.Ikeda, S.Watanabe - "A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and applications" - Osaka J.Math. 14, (1977), p.619.
- [3] I.G.Petrowsky - "Ordinary differential equations" - Prentice - Hall, 1966.

- [4] D.W.Stroock, S.R.S.Varadhan - "Diffusion processes with continuous coefficients I" - Comm.Pure Appl.Math. 17, (1967), p.345.
- [5] D.W.Stroock, S.R.S.Varadhan - "Diffusion processes with continuous coefficients II" - Comm.Pure Appl.Math. 17, (1967),p.479.