

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARC YOR

Sur un processus associé aux temps locaux browniens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 140-148

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_140_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROCESSUS ASSOCIE AUX TEMPS
LOCAUX BROWNIENS.

Marc YOR
Université de PARIS VI

1. Introduction.

1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien réel, et $(L_t^a ; a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ une version bicontinue de ses temps locaux. On note (\mathcal{B}_t) la filtration naturelle de (B_t) , convenablement complétée.

Plusieurs personnes, dont M. Emery, P.A. Meyer, E. Perkins, ont proposé, depuis quelque temps, de montrer que le processus $Y_t \equiv L_t^{B_t}$ n'est pas une (\mathcal{B}_t) -semi-martingale, ce qui a effectivement été prouvé par M. Barlow [1] en Août 81.

On montre ici un résultat plus faible (une conséquence du Théorème ci-dessous est que, pour tout $t > 0$, $(Y_{s \wedge t}, s \geq 0)$ n'est pas une semi-martingale de H^2), mais qui apporte des informations complémentaires sur (Y_t) .

1.2) On utilise les notations suivantes : A est un réel strictement positif fixé. τ désigne une subdivision finie de $[0, A]$; si $s \in \tau$, s' est le point de τ qui est immédiatement supérieur à s ; enfin, $\phi(\tau) = \sup_{s \in \tau} (s' - s)$.

ξ désignera toujours une variable aléatoire gaussienne, centrée, réduite, dont on note $\gamma(dx)$ la loi $(\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx)$.

1.3) Le résultat principal de cette note est le

Théorème : 1) Pour tout $p \in [2, 4[$, $\sup_{\tau} E \left[\sum_{s \in \tau} |E(Y_{s'}, -Y_s / \mathcal{B}_s)|^p \right] = \infty$.

2) $\lim_{\phi(\tau) \rightarrow 0} E \left[\sum_{s \in \tau} \{E(Y_{s'}, -Y_s / \mathcal{B}_s)\}^4 \right] > 0$.

3) $\sup_{\tau} E \left[\sum_{s \in \tau} (Y_{s'}, -Y_s)^4 \right] < \infty$.

4) Pour tout $p > 4$, $\lim_{\phi(\tau) \rightarrow 0} E \left[\sum_{s \in \tau} |Y_{s'}, -Y_s|^p \right] = 0$.

1.4) Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du théorème .

Le paragraphe 3 est constitué de remarques concernant :

- l'existence du processus de densité de temps d'occupation associé à Y :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ds \, 1_{(x \leq Y_s \leq x+\varepsilon)}$$

- l'identité : $\sup_{s \leq t} Y_s = \sup_a L_t^a$, d'ûe à Emery

- la continuité du processus $(Y_t, t \geq 0)$.

2. Démonstration du théorème.

2.1) Rappelons la formule de Tanaka: pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(1) \quad (B_t - a)^+ = (-a)^+ + \int_0^t 1_{(B_s > a)} dB_s + \frac{1}{2} L_t^a.$$

D'autre part, si pour $t > 0$, on note $\mathcal{B}_s^{(t)} = \mathcal{B}_s \vee \sigma(B_t)$ ($s \geq 0$), le processus

$(B_s ; s \geq 0)$ est une $(\mathcal{B}_s^{(t)})$ -semi-martingale, dont la décomposition canonique, dans cette filtration, est donnée par :

$$(2) \quad B_s = \beta_s^{(t)} + \int_0^{s \wedge t} du \frac{B_t - B_u}{t - u},$$

où $(\beta_s^{(t)}, s \geq 0)$ est un $(\mathcal{B}_s^{(t)}, s \geq 0)$ mouvement Brownien.

On peut donc écrire, dans la filtration $(\mathcal{B}_s^{(t)})$, d'après (1) et (2) :

$$(3) \quad \frac{1}{2} Y_t = - \int_0^t 1_{(B_s > B_t)} dB_s - (-B_t)^+.$$

On en déduit aisément qu'il suffit de prouver les assertions du théorème en rempla-

çant partout (Y_t) par $X_t \equiv \int_0^t 1_{(B_s > B_t)} dB_s$. De plus, on a, pour $0 < s < t$:

$$X_t - X_s = z_{(s,t)} + \int_s^t dB_u \, 1_{(B_u > B_t)},$$

où :

$$(4) \quad z_{(s,t)} = \int_0^s dB_u \{ 1_{(B_u > B_t)} - 1_{(B_u > B_s)} \}.$$

D'autre part, pour tout $p > 0$, on a, d'après (2) :

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_s^t dB_u 1_{(B_u > B_t)} \right|^p \right] &\leq C_p \{ (t-s)^{p/2} + E \left(\int_0^{(t-s)} \frac{du}{u} B_u^+ \right)^p \} \\ &\leq C_p \{ (t-s)^{p/2} + \left(\int_0^{(t-s)} \frac{du}{u} \|B_u^+\|_{L^p} \right)^p \} \leq C_p (t-s)^{p/2}, \end{aligned}$$

où C_p désigne, ici et dorénavant, une constante universelle qui varie de ligne en ligne.

En conséquence, on peut, pour prouver les assertions du théorème, remplacer partout $(Y_s, -Y_s)$ par $Z_{(s, s')}$.

2.2) L'objet de ce sous-paragraphe est la démonstration des assertions 3) et 4). Fixons à nouveau $0 < s < t$. La variable $(B_t - B_s)$ étant indépendante de B_s , on a :

$$E \left[|Z_{(s, t)}|^p \right] = \int \gamma(dx) E \left[|\phi_{(s, t)}^{(1)}(x) + \phi_{(s, t)}^{(2)}(x)|^p \right],$$

où :

$$(5) \quad \begin{cases} \phi_{(s, t)}^{(1)}(x) = \int_0^s dB_u^{(s)} H(u, x) ; \\ \phi_{(s, t)}^{(2)}(x) = \int_0^s \frac{du(B_s - B_u)}{(s-u)} H(u, x) ; \end{cases}$$

et :

$$(6) \quad H(u, x) = 1_{(B_u > B_s + \sqrt{t-s} \cdot x)} - 1_{(B_u > B_s)}.$$

Les assertions 3) et 4) se déduisent immédiatement du

Lemme : Pour tout $p \in [1, \infty[$, il existe une constante universelle C_p telle que,
pour tout x :

$$(i) \quad \|\phi_{(s, t)}^{(1)}(x)\|_{L^p} \leq C_p (t-s)^{1/4} |x|^{1/2} s^{1/4}.$$

$$(ii) \quad \|\phi_{(s, t)}^{(2)}(x)\|_{L^p} \leq C_p (t-s)^{1/2} |x|^{1/2}.$$

Démonstration du lemme : On suppose, pour simplifier la présentation, $x > 0$ (le cas : $x < 0$ s'y ramène aisément), et on pose $y = \sqrt{(t-s)} \cdot x$.

i) On a, d'après les inégalités de Burkholder :

$$\begin{aligned} \|\phi_{(s,t)}^{(1)}(x)\|_{L^p} &\leq C_p \left\| \left(\int_0^s du \mathbb{1}_{(B_{s-u} < B_s < B_s + y)} \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \\ &\leq C_p \left\| \left(\int_{B_s}^{B_s + y} da L_s^a \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \\ &\leq C_p y^{1/2} \left\| (L_s^*)^{1/2} \right\|_{L^p} \quad (\text{où } L_s^* \equiv \sup_a L_s^a) \\ &\leq C_p y^{1/2} s^{1/4} \quad (\text{d'après [2], par exemple}). \end{aligned}$$

ii) Le processus $(B_{s-u} - B_s ; 0 \leq u \leq s)$ étant un mouvement Brownien, on a :

$$\|\phi_{(s,t)}^{(2)}(x)\|_{L^p} = \left\| \int_0^s \frac{du}{u} B_u^+ \mathbb{1}_{(B_u \leq y)} \right\|_{L^p}.$$

Notons $C_u = \frac{1}{y} B_{u \cdot y}^2$, autre mouvement Brownien. Il vient :

$$\int_0^s \frac{du}{u} B_u^+ \mathbb{1}_{(B_u \leq y)} \leq y \int_0^\infty \frac{dv}{v} C_v^+ \mathbb{1}_{(C_v \leq 1)}.$$

Il reste à montrer la finitude de : $\left\| \int_0^\infty \frac{dv}{v} C_v^+ \mathbb{1}_{(C_v \leq 1)} \right\|_{L^p}$.

Cette norme est majorée par :

$$\int_0^\infty \frac{dv}{v} \left\| \xi^+ \mathbb{1}_{\left(\xi \leq \frac{1}{\sqrt{v}}\right)} \right\|_{L^p} = 2 \int_0^\infty dw \left\| \xi^+ \mathbb{1}_{\left(\xi \leq \frac{1}{w}\right)} \right\|_{L^p}.$$

Or, la fonction : $\left\| \xi^+ \mathbb{1}_{\left(\xi \leq \frac{1}{w}\right)} \right\|_{L^p}$ est aisément majorée par : $C_p \frac{1}{w^{1 + \frac{1}{p}}}$, fonction

intégrable à l'infini, d'où le résultat.

2.3) Pour démontrer les assertions 1) et 2) du théorème, on remplace la variable

$Z_{(s,t)}$ par $\tilde{Z}_{(s,t)} \equiv E[Z_{(s,t)} / \mathcal{B}_s] = \tilde{Z}_{(s,t)}^{(1)} + \tilde{Z}_{(s,t)}^{(2)}$, où :

$$(7) \quad \begin{cases} \tilde{Z}_{(s,t)}^{(1)} = \int \gamma(dx) \phi_{(s,t)}^{(1)}(x) = \int_0^s d\beta_u^{(s)} \left\{ \int \gamma(dx) H(u,x) \right\} \\ \tilde{Z}_{(s,t)}^{(2)} = \int \gamma(dx) \phi_{(s,t)}^{(2)}(x). \end{cases}$$

D'après l'inégalité (ii) du lemme, on peut, pour prouver les assertions 1) et 2) du théorème, remplacer les variables $E[Y_s, -Y_s / \mathcal{B}_s]$ par $\tilde{Z}_{(s,s')}^{(1)}$.

Notons enfin qu'il suffit de montrer l'existence d'une fonction $C(s)$, strictement positive sur $]0, A]$, et continue sur $[0, A]$, telle que, pour tous $0 < s < t$:

$$(8) \quad E\left[\left(\tilde{Z}_{(s,t)}^{(1)} \right)^2 \right] \geq C(s) (t-s)^{1/2}.$$

Or, on a, d'après (7) :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{Z}_{(s,t)}^{(1)} \right)^2 \right] &= E\left[\int_0^s du \left(\int \gamma(dx) H(u,x) \right)^2 \right] \\ &= E\left[\int_0^s du \ 2 \iint_{x < x'} \gamma(dx) \gamma(dx') H(u,x) H(u,x') \right]. \end{aligned}$$

D'après (6), on a :

$$H(u,x) H(u,x') = \begin{cases} |H(u,x)|, & \text{si } 0 < x < x' \\ 0, & \text{si } x < 0 < x' \\ H(u,x') \geq 0, & \text{si } x < x' < 0. \end{cases}$$

Ce produit est donc positif ou nul, et on a :

$$E\left[\left(\tilde{Z}_{(s,t)}^{(1)} \right)^2 \right] \geq 2 \int_0^1 \gamma(dx) P(\xi > x) E\left[\int_0^s du \ 1_{(B_{s-u} < B_u < B_s + y)} \right]$$

où on a encore posé $y = \sqrt{t-s} \cdot x$.

Or, on a :

$$E\left[\int_0^s du \ 1_{(B_{s-u} < B_u < B_s + y)} \right] = \int_0^s du \int_0^{y/\sqrt{u}} \gamma(dx)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^s du \int_0^\infty \frac{1}{(u \leq (y/x)^2)} \gamma(dx) = \int_0^\infty \inf\left\{\frac{y^2}{x^2}, s\right\} \gamma(dx) \\
 &\geq \int_0^{y/\sqrt{s}} \frac{s dx e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-y^2/2s} y\sqrt{s})
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$E \left[\left(\tilde{Z}_{(s,t)}^{(1)} \right)^2 \right] \geq C \sqrt{s} \sqrt{t-s} e^{-\frac{(t-s)}{2s}} \geq C \sqrt{(t-s)} e^{-A/2s} \sqrt{s},$$

où C est une constante universelle. Le théorème est démontré.

3. Quelques remarques complémentaires sur (Y_t) .

3.1) (Y_t) possède un processus de "densité de temps d'occupation" très régulier, comme l'indique la

Proposition : Pour tout $t > 0$, P(d ω) p.s, la fonction $\phi_\omega(x) = \int_0^t ds \mathbb{1}_{(L_s^B(\omega) > x)}$

est deux fois continument différentiable sur $(0, \infty)$.

Nous commençons la démonstration de cette proposition par le

Lemme : 1) Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$\int_0^t ds f(L_s^B) = \int dx f(x) \Lambda_t^x, \quad \text{où } \Lambda_t^x = \int_{-\infty}^\infty da \mathbb{1}_{(L_t^a > x)}$$

2) Λ_t^0 est égal à l'amplitude de l'oscillation de la trajectoire Brownienne sur $(0, t)$.

Démonstration du lemme : 1) On a :

$$\int_0^t ds f(L_s^B) = \int da \int_0^t f(L_s^a) d_s L_s^a = \int da F(L_t^a),$$

si $F(x) = \int_0^x dy f(y)$. Le résultat cherché découle alors du théorème de Fubini.

2) découle de l'identité :

$$\{a : L_t^a > 0\} = \left] \inf_{s \leq t} B_s ; \sup_{s \leq t} B_s \right[.$$

Démonstration de la proposition :

Il nous reste à démontrer que : $x \rightarrow \Lambda_t^x$ est p.s continument différentiable sur $(0, \infty)$.

Or, d'après E.Perkins [6] et T. Jeulin [5], $a \rightarrow L_t^a$ ($a \geq 0$) est une semi-martingale par rapport à sa filtration propre (les deux auteurs ont également des résultats relativement à des filtrations plus grosses). On utilisera en fait les propriétés suivantes de cette semi-martingale :

(9) le processus croissant de sa partie martingale continue est :

$$4 \int_0^a L_t^u du \quad (\text{voir, par exemple, [3]}).$$

(10) sa partie à variation bornée est absolument continue par rapport à da

Pour tout $t > 0$ fixé, il existe alors un processus bicontinu $n_a^{+,b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$) tel que, pour tout $b \geq 0$, $(n_a^{+,b}, a \geq 0)$ soit le temps local de $(L_t^a, a \geq 0)$ en b .

En effet, d'après les résultats de [7], et (10), il suffit de montrer que, pour

tout $x > 0$, on a : $\int_0^\infty da \mathbb{1}_{(L_t^a=x)} = 0$.

Or, d'après (9), on a : $4 \int_0^\infty du L_t^u \mathbb{1}_{(L_t^u=x)} = 0$, ce qui entraîne le résultat cherché.

Enfin, on a : $\Lambda_t^x = \int_{-\infty}^\infty da \mathbb{1}_{(L_t^a > x)} = \frac{1}{4} \left\{ \int_x^\infty \frac{db}{b} \{n_\infty^{+,b} + n_\infty^{-,b}\} \right\}$ où $(n_a^{-,b}, a \geq 0, b \geq 0)$

est le processus temps locaux de $(L_t^{-a}, a \geq 0)$.

Le résultat découle alors de la continuité en b (pour $b > 0$) de $n_\infty^{+,b} \equiv n_{S_t}^{+,b}$,

et $n_\infty^{-,b} \equiv n_{-s_t}^{-,b}$, avec : $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ et $s_t = \inf_{s \leq t} B_s$.

3.2) Voici la démonstration, donnée par Emery, de l'identité :

$$\sup_{s \leq t} L_s^B = \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a.$$

On a évidemment : $\sup_{s \leq t} L_s^B \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a$.

Inversement, on a : $\sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a(\omega) = L_t^{a_t(\omega)}(\omega)$, pour un certain réel $a_t(\omega)$. Notons

$$\sigma(\omega) = \sup\{u \leq t / B_u(\omega) = a_t(\omega)\}.$$

Alors, on a : $L_\sigma^{B_\sigma} = L_\sigma^{a_t}$, car $B_\sigma = a_t$
 $= L_t^{a_t}$, car le mouvement Brownien ne passe plus en a_t dans l'intervalle de temps $]\sigma, t[$.

Voici une seconde démonstration de la même identité :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da (L_t^a)^p \right)^{1/p} = \lim_{(p \rightarrow \infty)} \left(p \int_0^t ds (L_s^{B_s})^{p-1} \right)^{1/p} = \sup_{s \leq t} L_s^{B_s}.$$

3.3) Le calcul -ci-dessous- d'un module de continuité (local) de (Y_t) a été suggéré par le travail de M. Barlow [1].

On a le résultat suivant, pour tout $s \geq 0$ fixé :

$$(11) \quad P\text{-p.s.}, \quad \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow s \\ |t-s|=\delta}} \frac{|Y_t - Y_s|}{(\delta \log_2 \frac{1}{\delta})^{1/4} (\log \frac{1}{\delta \log_2 \frac{1}{\delta}})^{1/2}} \leq 2^{3/4} (L_s^*)^{1/2}$$

où $L_s^* \equiv \sup_{a \in \mathbb{R}} L_s^a$.

Démonstration de (11) :

Ecrivons : $Y_t - Y_s = (L_t^{B_t} - L_s^{B_t}) + (L_s^{B_t} - L_s^{B_s})$.

D'après Itô - Mc Kean ([4], 10.b), p. 65), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que, si $|B_t - B_s| \leq \alpha_\varepsilon$, on ait :

$$|L_s^{B_t} - L_s^{B_s}| \leq 2(1+\varepsilon) (L_s^*)^{1/2} (|B_t - B_s| \log \frac{1}{|B_t - B_s|})^{1/2}.$$

La fonction $(x \log \frac{1}{x})$ étant croissante dans un voisinage de 0, on a, d'après la loi usuelle du logarithme itéré, pour δ suffisamment petit :

$$(|B_t - B_s| \log \frac{1}{|B_t - B_s|})^{1/2}$$

$$\leq (1+\varepsilon) \left\{ (2\delta \log_2 \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \log \frac{1}{(1+\varepsilon)(2\delta \log_2 \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} (1+\varepsilon) (\delta \log_2 \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{4}} \left\{ \log \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta \log_2 \frac{1}{\delta}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit alors (11), après avoir utilisé en ce qui concerne $(L_t^B - L_s^B)$, le résultat 10.a), p. 65, de [4] :

$$\lim_{\substack{|t-s|=\delta \rightarrow 0 \\ a \in \mathbb{R}}} \frac{|L_t^a - L_s^a|}{\{\delta (\log \frac{1}{\delta})^2\}^{1/3}} = 0,$$

et le fait que $\delta^{1/3}$ est négligeable devant $\delta^{1/4}$.

Références :

- [1] M. BARLOW : $L(B_t, t)$ is not a semi-martingale.
A paraître Sém. Probas XVI. Springer (1982).
- [2] M. BARLOW, M. YOR : Semi-Martingale Inequalities and Local Times.
Zeitschrift für Wahr, (1981), 237-254.
- [3] N. BOULEAU, M. YOR : Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales.
C.R.A.S Paris, t. 292 (2 Mars 1981).
- [4] K. ITÔ, H.P. Mc KEAN: Diffusion Processes and their Sample paths.
Springer (1965).
- [5] T. JEULIN : Article en préparation.
- [6] E. PERKINS : Local Time is a Semi-Martingale. Preprint.
- [7] M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales.
Astérisque 52-53, Soc. Math. France (1978).