ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. SCHOTT

Marches aléatoires sur les espaces homogènes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 131-139

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_131_0>

MARCHES ALEATOIRES SUR LES ESPACES HOMOGENES.

R. SCHOTT
UNIVERSITE DE NANCY I

I) INTRODUCTION :

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et μ une mesure de probabilité sur G. Nous supposons que μ est adaptée c'est à dire que le sous-groupe fermé engendré par le support de μ est égal à G.
Soit $X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans G indépendantes et de même loi μ, $Y_n^g = g.X_1X_2\dots X_n$ est appelée marche aléatoire partant de $g \in G$, à l'instant 0, c'est une chaîne de Markov dont le noyau de transition est donnée par : $P(g, A) = \varepsilon_g * \mu(A)$ $\forall A$ borélien de G. D'après le théorème de Loynes [9] : tous les états de la marche aléatoire Y_n^g sont soit récurrents (i.e : $P_e\{\sum_{n=o}^{\infty} A_V(Y_n^e) = +\infty\} = 1$ $\forall V$ voisinage de g), soit transitoires. Un groupe qui porte au moins une marche aléatoire récurrente est dit récurrent.
Si G est un groupe de Lie connexe, on sait (cf [2] et [7]) qu'il est récurrent si et seulement si G est à croissance polynomiale dedegré inférieur ou égal à 2.
Soit H un sous-groupe fermé de G, considérons l'espace homogène droit $M = {}_H\backslash^G$, nous noterons par π l'application canonique : $G \to {}_H\backslash^G$. Si Y_n^g est une marche aléatoire sur G, $\pi(Y_n^g) = \pi(g.X_1.X_2.X_3\dots X_n) = \pi(g)\, X_1.X_2\dots X_n = Z_n^{\pi(g)}$ est une marche aléatoire sur M partant du point $\pi(g)$ à l'instant 0. Si la mesure μ est adaptée et étalée (i.e. : $\exists C > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists V$ voisinage tel que : $\mu^{*p} \geqslant C\, 1_V m$ où m est la mesure de Haar à droite sur G) et s'il existe sur M une mesure invariante, on sait que ([8]) tous les états de $Z_n^{\pi(g)}$ sont récurrents ou tous les états sont transitoires.
Sous ces hypothèses a été entreprise la classification des espaces homogènes en utilisant les notions de croissance et de moyennabilité.

II) CROISSANCE D'UN ESPACE HOMOGENE :

Définition II.1 : *Soit G un groupe L.C.D. à génération compacte et H un sous-groupe fermé de G tel que l'espace homogène ${}_H\backslash^G$ possède une mesure invariante λ (i.e : $\lambda(g.A) = \lambda(A)$ $\forall g \in G$ et $\forall A$ borélien de ${}_H\backslash^G$). Soient $x \in {}_H\backslash^G$ et V un voisinage compact de l'élément neutre de G qui engendre G, s'il existe un entier k tel que :*

$0 < \liminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda(x.V^n)}{n^k} \leqslant \limsup\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda(x.V^n)}{n^k} < +\infty$ alors k est unique, k est indépendant du choix de x et de V.

On dit que $H^{\setminus G}$ est a croissance polynomiale de degré k. On notera : $\lambda(x.V^n) \sim n^k$. S'il existe une constante $C > 1$ telle que $\lambda(x.V^n) \sim C^n$ on dira que $H^{\setminus G}$ est à croissance exponentielle.

De plus les espaces homogènes $H^{\setminus G}$ et G/H ont même croissance.

On trouvera la démonstration de ces propriétés dans [5] .

Proposition II.2 : Si H est uniforme dans le sous-groupe fermé H' de G (i.e. : ${}^{H'}/_{H}$ est compact) alors les espace homogènes G/H et G/H' ont même croissance.

Preuve : voir [5]

III) ESPACE HOMOGENE MOYENNABLE :

Définition III.1 : Soit G un groupe L.C.D. et H un sous-groupe fermé de G. On appelle moyenne sur $\mathscr{C}B(G/H)$ (ensemble des fonctions continues bornées sur l'espace homogène G/H) toute forme linéaire m sur $\mathscr{C}B(G/H)$ vérifiant les conditions suivantes : i) $m(1) = 1$

ii) $m(\overline{f}) = \overline{m(f)} \quad \forall f \in \mathscr{C}B(G/H)$

Définition III.2 : On dit qu'une moyenne m sur $\mathscr{C}B(G/H)$ est G-invariante si $\forall f \in \mathscr{C}B(G/H)$ et $\forall s \in G$, on a : $m({}_sf) = m(f)$ où ${}_sf(\dot{x}) = f(s^{-1}.\dot{x}) \ \forall \dot{x} \in G/H$

Définition III.3 : L'espace homogène G/H est dit G-moyennable (nous dirons par la suite moyennable) s'il existe une moyenne G-invariante sur $\mathscr{U}\mathscr{C}B(G/H)$ (l'espace des fonctions uniformément continues bornées sur G/H) ∎

Rappelons la propriété importante suivante dont on pourra trouver la démonstration dans [4] :

Proposition III.4 : Si H est un sous-groupe fermé moyennable de G alors G/H est moyennable si et seulement si G est un groupe moyennable.

Application de la proposition III.4 : Considérons le groupe semi-simple $SL(2, \mathbb{R})$ c.à.d. l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $ad-bc = 1$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

La décomposition d'Iwasawa de $SL(2, \mathbb{R})$ s'écrit : $SL(2, \mathbb{R}) = K\,A\,N$

où $K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} , \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$ est compact, $A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} , \ t \in \mathbb{R} \right\}$

est abélien,

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ u \in \mathbb{R} \right\}$ est nilpotent.

On sait que $SL(2, \mathbb{R})$ n'est pas moyennable, par contre N est moyennable (cf [4]) donc l'espace homogène $SL(2, \mathbb{R})_{/N}$ estnon moyennable.

IV) CLASSIFICATION DES ESPACES HOMOGENES.

Nous indiquons ici, sans démonstration, les résultats que nous avons obtenus :

1°) Espaces homogènes non moyennables.

Tous les espaces homogènes non moyennables portant une mesure invariante sont :

i) transitoires

ii) à croissance exponentielle

Preuve : voir [12] .

2°) Espaces homogènes moyennables.

a) Les espaces homogènes de groupes nilpotents simplement connexes N sont transitoires et à croissance polynomiale (cf [5] et [10]).

b) Les espaces homogènes du groupe $G = K \ltimes N$, extension compacte de N sont récurrents si et seulement si ces espaces homogènes sont à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. (cf [5]).

c) Pas encore de réponse globale pour les espaces homogènes des groupes de Lie de type rigide (rappel : un groupe de Lie est dit de type rigide si les valeurs propres de ad_G sont de module 1).

Conjecture :

Les espaces homogènes des groupes de Lie de type rigide sont récurrents si et seulement si ces espaces homogènes sont à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

La démonstration du point (b) fait appel aux propriétés des groupes algébriques distals mais elle ne s'étend pas aux groupes de type rigide car ces groupes ne sont pas algébriques (en général). Nous allons étudier à présent les marches aléatoires sur certains espaces homogènes du groupe de MAUTNER. Cet exemple, outre son intérêt pédagogique, semble indiquer que la conjecture (c) n'est pas trop osée.

V) ESPACES HOMOGENES DU GROUPE DE MAUTNER :

Définition V.1 : On appelle groupe de Mautner le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{C}^2$, l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}^2$ étant donnée par :

$t.(z_1, z_2) = (z_1 e^{2\pi i t}, z_2 e^{2\pi i \lambda t})$ où λ est irrationnel. Nous noterons : $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^2$.

<u>Propriétés V.2.</u> a) La multiplication dans G est donnée par

$$(t, z_1, z_2).(t', z_1', z_2') = (t+t', z_1+z_1' e^{2\pi it}, z_2+z_2' e^{2\pi i\lambda t})$$

et $(t, z_1, z_2)^{-1} = (-t, -z_1e^{-2\pi it}, -z_2e^{-2\pi i\lambda t})$

b) G est un groupe résoluble de type rigide.

c) G n'est pas un groupe algébrique.

<u>Démonstration</u> :

a) et b) sont évidents :

c) G n'est pas algébrique (dans une représntation matricielle) car l'image de G par la représentation adjointe de $GL(5, \mathbb{C})$ n'est pas fermée dans $GL(5, \mathbb{R})$. Si G était algébrique dans une représentation alors l'image de G par la représentation adjointe serait un groupe algébrique donc fermée ∎

Considérons les sous-groupes fermés connexes de G du type suivant :

$H = \{(t, z_1, z_2),\ t \in \mathbb{R}\ ,\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$; l'une au moins des 3 composantes étant toujours nulle $\}$

Si $H = \{0\} \times \mathbb{C}^2$ alors H est distingué dans G par définition du produit semi-direct de deux groupes. Dans ce cas $M = {}_H\backslash^G$ est un groupe et l'étude des marches aléatoires a déjà été faite.

Un calcul simple montre que les sous-groupes $\{0\} \ltimes (\mathbb{C} \times \{0\})$ et $\{0\} \ltimes (\{0\} \times \mathbb{C})$ sont également distingués.

<u>*Lemme V.3.*</u> : *Les sous-groupes connexes* $H_1 = \{(t, 0, z_2),\ t \in \mathbb{R}\ ,\ z_2 \in \mathbb{C}\ \}$, $H_2 = \{(t, z_1, 0),\ t \in \mathbb{R}\ ,\ z_1 \in \mathbb{C}\ \}$, $H_3 = \mathbb{R} \ltimes \{0\}$ *ne sont pas distingués*

<u>Démonstration</u> : $\forall\ g = (t, z_1, z_2) \in G$ et $\forall\ h = (t', 0, h_2) \in H_1$

$$\begin{aligned} g.h.g^{-1} &= (t, z_1, z_2)(t', 0, h_2)(-t, -z_1e^{-2\pi it}, -z_2e^{-2\pi i\lambda t}) \\ &= (t+t', z_1, z_2 + h_2e^{2\pi i\lambda t})(-t, -z_1e^{-2\pi it}, -z_2e^{-2\pi i\lambda t}) \\ &= (t', z_1-z_1e^{-2\pi it}, z_2-z_2e^{2\pi i\lambda t'} + h_2e^{2\pi it\lambda}) \notin H\ . \end{aligned}$$

On montre de même que H_2 et H_3 ne sont pas des sous groupes distingués

Considérons à présent l'espace homogène $M = {}_H\backslash^G$ avec $H = \{(t, h_1, 0)\ t \in \mathbb{R}\ ,\ h_1 \in \mathbb{C}\ \}$. Soit $(T_1, Z_1^1, Z_1^2),\dots, (T_k, Z_k^1, Z_k^2),\dots, (T_n, Z_n^1, Z_n^2)$ une suite de variables aléatoires sur G , indépendantes de même loi μ . Nous supposons que la mesure μ est adaptée et étalée. Comme d'autre part, il existe sur M une mesure invariante m , l'espace homogène M est dichotomique (i.e. tous les états de la marche aléatoire correspondante sur M sont transitoires ou tous les états sont récurrents).

Théorème V.4 : *Soit* $G = \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ *le groupe de Mautner et* $H = \mathbb{R} \ltimes (\mathbb{C} \times \{0\})$, μ *une mesure de probabilité sur* G *adaptée, étalée alors l'espace homogène* $M = G/H$ *est récurrent et à croissance polynomiale de degré 2.*

Démonstration : Soit $g = (t, z_1^1, z_1^2) \in G$ alors

$\dot{g} = \{(t', h_1, 0)(t, z_1^1, z_1^2)\ ;\ \forall (t', h_1, 0) \in H\}$

or : $(t', h_1, 0)(t, z_1^1, z_1^2) = (t'+t,\ h_1+z_1^1\, e^{2\pi i t'},\ z_1^2\, e^{2\pi i\lambda t})$.

Cet élément s'identifie à un élément d'un supplémentaire de H dans G de la forme $(0, 0, \alpha)$ pourvu que :

$$\begin{cases} t'+t = 0 \\ h_1+z_1^1\, e^{2\pi i t'} = 0 \\ z_1^2\, e^{2\pi i\lambda t'} = \alpha \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \alpha = z_1^2\, e^{-2\pi i\lambda t}$$

et : $\dot{g} = \overline{(t, z_1^1, z_1^2)} \sim (0, 0, z_1^2\, e^{-2\pi i\lambda t})$ on notera simplement : $\dot{g} = z_1^2\, e^{-2\pi i\lambda t}$

d'où l'action du groupe G sur l'espace homogène G/H .

Lemme V.5 : *L'action de* G *sur* G/H *n'est pas polynomiale, elle est donnée par :*

$$G \longrightarrow G/H$$
$$g \longrightarrow 0.g = z_1^2\, e^{-2\pi i\, t} \quad \text{où} \quad g = (t, z_1^1, z_1^2) \qquad (1)$$

Remarque V.6 : $0.g$ désigne le représentant de la classe de g modulo H et les éléments de H s'identifient au zéro de $\mathbb{R}^2$.

Lemme V.7 : *Identifions* G/H *à* $\mathbb{R}^2$. *Alors la mesure invariante de* G/H *est la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}^2$

Démonstration : m étant une mesure invariante sur G/H , on sait qu'il existe des mesures de Haar dg sur G et dh sur H bien choisies telles que pour toute f mesurable positive ou nulle on ait (cf [3]) :

$$(2) \qquad \int_G f(g)dg = \int_{G/H} \left(\int_H f(hg)dh \right) dm \quad .$$

Nous noterons par $|A|$ la mesure de Haar d'un borélien A de G . Comme G est un groupe de Lie, il existe une section mesurable s de la surjection canonique $\pi : G \to G/H$ (i.e. une application mesurable $s : G/H \to G$ telle que : $\pi_o s = Id_{G/H}$) et pour tout borélien A de G , on notera : $\overline{A} = s(\pi(A))$. On a alors le résultat suivant dont on pourra trouver la démonstration dans [5] .

<u>Lemme V.8</u> : *Soit H_1 un compact de H de mesure de Haar égale à 1 (i.e : $dh(H_1) = 1$). Alors pour tout borélien A de G on a : $m(\pi(A)) = |H_1\bar{A}|$* ■

Désignons par $|B|$ la mesure de Lebesgue du borélien $B \subset G/H\,(\simeq \mathbb{R}^2)$. Il faut montrer que pour tout $g \in G$, $|B.g| = |B|$.

Or ceci résulte de (2) et du fait que si : $g_1 = (t_1, z_1^1, z_1^2)$, $g_2 = (t_2, z_2^1, z_2^2)$

$$\int_{\mathbb{R}\ltimes C^2} f(g_1.g_2)dg = \int_{\mathbb{R}\ltimes \mathbb{C}^2} f(t_1+t_2,\ z_1+z_2^1,\ e^{2\pi i t_1},\ z_1^2+z_2^2\ e^{2\pi i\lambda t_1})\ dg$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}\ltimes \mathbb{C}^2} f(t_1+t_2,\ z_1^1+z_2^1\ e^{2\pi i t_1},\ z_1^2+z_2^2\ e^{2\pi i\lambda t_1})dt\ dz^1\ dz^2$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}\ltimes \mathbb{C}^2} f(t_1+t_2,\ z_1^1+z_2^1\ e^{2\pi i t_1},\ z_1^2+z_2^2\ e^{2\pi i\lambda t_1})dz^1)dz^2)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}\ltimes \mathbb{C}^2} f(g_1)dg \quad \text{à cause de la forme des 3 composantes.}$$

<u>Lemme V.9</u> : *L'espace homogène G/H est à croissance polynomiale de degré égal à 2* □

<u>Démonstration</u> : Soit V un voisinage compact de l'élément neutre de G qui engendre G , $0.V^n = 0.\ \{g_1g_2\ldots g_n\ ;\ g_i \in V\ ,\ i = 1, 2,\ldots, n\}$

or : $g_1.g_2\ldots g_n = (t_1+t_2+\ldots+t_n,\ z_1^1+z_2^1\ e^{2\pi i t_1}+\ldots+\ z_n^1\ e^{2\pi i(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})}$
$z_1^2+z_2^2 e^{2\pi i\lambda t_1}+\ldots+\ z_n^2\ e^{2\pi i\lambda(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})}$,

et $0.(g_1.g_2\ldots g_n) \sim (z_1^2+z_2^2\ e^{2\pi i\lambda t_1}+\ldots+\ z_n^2\ e^{2\pi i\lambda(t_1+t_2+..+t_{n-1})}).e^{-2\pi i\lambda(t_1+t_2+..+t_n)}$

Il est facile de voir qu'il existe des voisinages V_1 et V_2 tels que : $nV_1 \subset 0.V^n \subset n.V_2$. On a donc : $C_1n^2 \leqslant |0.V^n| \leqslant C_2n^2$ pour n assez grand (C_1 et C_2 sont des constantes > 0) ce qui prouve que G/H est à croissance polynomiale de degré 2 ■

Considérons la marche aléatoire $Y_n = (T_1, Z_1^1, Z_1^2)\ldots(T_k, Z_k^1, Z_k^2)\ldots(T_n, Z_n^1, Z_n^2)$ sur G , alors la marche aléatoire sur $M = G/H$ partant de $0 \in M$ à l'instant zéro a pour expression :

$$0.Y_n^e = (T_1+T_2+\ldots+T_n,\ Z_1^1+Z_2^1\ e^{2\pi i T_1}+\ldots+Z_n^1\ e^{2\pi i(T_1+T_2+\ldots+T_{n-1})}$$
$$Z_1^2+Z_2^2\ e^{2\pi i\lambda T_1}+\ldots+\ Z_n^2\ e^{2\pi i\lambda(T_1+\ldots+T_{n-1})})\ ,$$

D'après (1) : $0.Y_n^e \sim (Z_1^2+Z_2^2\ e^{2\pi i\lambda T_1}+\ldots+Z_n^2\ e^{2\pi i\lambda(T_1+\ldots+T_{n-1})}).e^{-2\pi i\lambda(T_1+T_2+\ldots+T_n)}$

c'est la composante sur $\mathbb{R}^2$ d'une marche aléatoire sur $T \ltimes \mathbb{R}^2$ (T étant le tore) or le groupe $T \ltimes \mathbb{R}^2$ est récurrent (cf [7]). Ceci achève la démonstration.
Remarquons que si $H = \mathbb{R} \ltimes (\{0\} \times \mathbb{C})$ on obtient le même résultat.

<u>Théorème V.10</u> : *Soit $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^2$ le groupe de Mautner et $H = \mathbb{R} \ltimes \{0\}$, μ une mesure de probabilité sur G adaptée, étalée alors l'espace homogène $M = G/H$ est transitoire et à croissance polynomiale de degré 4.* ■

<u>Démonstration</u> : Soit $g = (t, z_1^1, z_1^2) \in G$ alors $\dot{g} = \{ (t', 0,0)(t,z_1^1,z_1^2), \forall t' \in \mathbb{R}\}$
or : $(t', 0, 0)(t, z_1^1, z_1^2) = (t+t', z_1^1\ e^{2\pi i t'}, z_1^2\ e^{2\pi i\lambda t'})$

Cet élément s'identifie à un élément d'un supplémentaire de H dans G de la forme $(0, \alpha, \beta)$ pourvu que :

$$\begin{cases} t+t' = 0 \\ z_1^1\ e^{2\pi i t'} = \alpha \\ z_1^2\ e^{2\pi i\lambda t'} = \beta \end{cases}$$

donc $\dot{g} = \overline{(t, z_1^1, z_1^2)} \sim (0, z_1^1\ e^{-2\pi i t}, z_1^2\ e^{-2\pi i\lambda t})$ (3)

On notera simplement : $\dot{g} = (z_1^1\ e^{-2\pi i t}, z_1^2\ e^{-2\pi i\lambda t})$.

Identifions G/H à $\mathbb{R}^4$, on montre alors que la mesure invariante de G/H est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^4$. (La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme V.7).

<u>Lemme V.11</u> : *L'espace homogène G/H est à croissance polynomiale de degré égal à 4* ■

<u>Démonstration</u> : Soit V un voisinage compact de l'élément neutre de G qui engendre G , $0.g_1\ g_2\ldots g_n = (t_1+t_2+\ldots+t_n,\ z_1^1+z_2^1\ e^{2\pi i t_1}+\ldots+z_n^1\ e^{2\pi i(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})}$,

$$z_1^2+z_2^2\ e^{2\pi i\lambda t_1}+\ldots+z_n^2\ e^{2\pi i\lambda(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})})$$

D'après (3) : $0.g_1\ldots g_n \sim ((z_1^1+z_2^1\ e^{2\pi i\lambda t_1}+\ldots+z_n^1\ e^{2\pi i\lambda(t_1+t_2+\ldots+t_{n-1})}e^{-2\pi i\lambda(t_1+t_2+\ldots+t_n)})$

Il est facile de voir qu'il existe des voisinages V_1' et V_2' de $\mathbb{R}^4$ tels que : $nV_1' \subset 0.V^n \subset n.V_2'$.

On a donc : $C_1' n^4 \leq |0.V^n| \leq C_2'\ n^4$ pour n assez grand (C_1', C_2' sont des constantes strictement positives) ■

La marche aléatoire sur $M = {}^{G}\!/_{H}$ partant de $0 \in M$ à l'instant zéro a pour expression

$$Z_n = 0.Y_n^e \sim \left(\left(Z_1^1 + Z_2^1\, e^{2\pi i\, T_1} + .. + Z_n^2\, e^{2\pi i\, (T_1 + ... + T_{n-1})} \right) e^{-2\pi i\, (T_1 + T_2 + ... + T_n)} , \right.$$

$$\left. \left(Z_1^2 + Z_2^2\, e^{2\pi i \lambda T_1} + .. + Z_n^2\, e^{2\pi i \lambda (T_1 + ... + T_{n-1})} \right) e^{-2\pi i \lambda (T_1 + T_2 + ... + T_n)} \right)$$

C'est la composante sur C^2 d'une marche aléatoire sur le groupe $T \times C^2$ (T est le tore) or ce groupe est transitoire (cf [7]) C.Q.F.D.

B I B L I O G R A P H I E

[1] L. AUSLANDER : An exposition of the structure of solv manifolds. Bulletin of the A.M.S. n° 2, march 73.

[2] P. BALDI, N. LOHOUE, J. PEYRIERE : Sur la classification des groupes récurrents. Note aux C.R.A.S. série A, p. 1103 (1977).

[3] N. BOURBAKI : Eléments de Mathématique. Livre VI. Intégration chapitre 7. Herman, Paris 1963.

[4] P. EYMARD : Moyennes invariantes et représentations unitaires. Lecture Notes n° 300.

[5] L. GALLARDO, R. SCHOTT : Marches aléatoires sur les espaces homogènes de certains groupes de type rigide. ASTERISQUE N° 74, (1980), p. 149-170.

[6] Y. GUIVARC'H : Croissance polynomiale et période des fonctions harmoniques Bulletin soc. Math. de France 101, (1973), p. 333-379.

[7] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE : Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Lecture Notes n° 624.

[8] H. HENNION, B. ROYNETTE : Un théorème de dichotomie pour les marches aléatoires sur les espaces homogènes. Astérisque n° 74 (1980) p. 99-122.

[9] R.M. LOYNES : Products of independant random elements in a topological group. Z.W. (1963) p. 446-455

[10] D. PREVOT, R. SCHOTT : Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes de Lie nilpotents simplement connexes. Lecture Notes n° 739, p. 404-427.

[11] R. SCHOTT : Croissance et moyennabilité des espaces homogènes. Prépublication, Institut Elie Cartan, Nancy, (1981).

[12] R. SCHOTT : Irrfahrten auf nicht mittelbaren homogenen Räumen.Zeitung des mathematisches Institüt der Universität SALZBURG. Arbeitsbericht 1-2 (1981) seite 63-76.

[13] S. TOURE : Sur les espaces homogènes moyennables. Thèse ABIDJAN (1975)

R. SCHOTT
E.R.A. n° 839 du C.N.R.S.
U.E.R. Sciences mathématiques
UNIVERSITE DE NANCY I
54037 NANCY CEDEX