ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. ACQUAVIVA

Mesures aléatoires *t*-régulières

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 11-24
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_11_0>

MESURES ALEATOIRES t-REGULIERES

A. ACQUAVIVA

Faculté des Sciences et Techniques de BREST

Résumé : A partir d'une famille compatible $\mu_{A_1 \ldots A_n}$ de lois sur $\{\bar{R}_+^n n \in \mathbb{N}\}$ indexée par les éléments d'un anneau $\mathcal{A}$ on construit une mesure aléatoire, tendue, par rapport à une classe compacte, sur l'anneau puis le prolongement au σ-anneau engendré, sans aucune contrainte de σ-finitude. Application est faite aux espaces Sousliniens.

Introduction : Le théorème d'existence d'une mesure aléatoire bornée sur un espace polonais est maintenant un résultat classique dû à Harris([1]). Sa démonstration repose sur l'existence d'une famille dénombrable de suites monotones telles que la continuité d'une fonction d'ensemble additive bornée sur ces suites implique la continuité sur toute suite monotone. De plus, pour obtenir une mesure aléatoire non nécessairement bornée la méthode classique consiste à considérer une partition dénombrable de l'espace telle que la mesure soit finie sur chaque élément de la partition ([2] pour le cas localement compact) on n'obtient ainsi que des mesures aléatoires uniformément σ-finies. Il nous a donc semblé intéressant d'examiner, d'une part le cas d'un espace de Souslin où l'on ne dispose pas de cette famille dénombrable de suites et d'autre part de donner une formulation abstraite et directe du théorème d'existence d'une mesure aléatoire non nécessairement σ-finie à l'aide de la notion de capacité faible et des suites privilégiées. On peut construire ainsi une mesure aléatoire tendue par rapport à une classe compacte sur un anneau générateur pour la tribu borélienne et obtenir une sélection mesurable parmi les prolongements à la tribu.

I Soit X un ensemble muni d'une σ-algèbre $\mathbb{B}$ de parties. On suppose qu'il existe un treillis dénombrable $\mathcal{T}$ générateur pour $\mathbb{B}$ tel que X appartienne à $\mathcal{T}_\sigma$ et on fait les hypothèses suivantes:

H.0 Il existe $\mathcal{K}$ classe compacte, stable par union et intersection finie telle que si $K \in \mathcal{K}$ et $C \in \mathcal{T}_\sigma$ alors $K - C \in \mathcal{K}$

H.1 $\mathcal{T}$ sépare $\mathcal{K}$: $\forall\, K_1$ et $K_2 \in \mathcal{K}$ tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ $\exists\, T_1$ et $T_2 \in \mathcal{T}$ tels que $K_1 \subset T_1$ $K_2 \subset T_2$ et $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

Introduisons ici une notion essentielle pour la suite :

<u>Définition 1</u> : Une suite $\{T_n\ n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ sera dite privilégiée si $\{T_n\}$ est monotone décroissante de limite non vide et appartenant à $\in \mathcal{K}$ telle que pour tout $C \in \mathcal{T}_\sigma$ tel que $\lim \downarrow T_n \subset C$ il existe n tel que $T_n \subset C$.

On suppose alors :

H.2 $\forall K \in \mathcal{K}$ et $K \neq \emptyset$ il existe $\{T_n\ n \in \mathbb{N}\}$ suite privilégiée telle que $K = \lim\limits_n \downarrow T_n$

<u>Définition 2</u> : Une fonction d'ensemble I^* définie sur $\mathcal{P}(X)$ sera dite capacité faible si pour toute suite croissante (B_n) d'éléments de $\mathcal{P}(X)$ on a $I^*(\lim\limits_n \uparrow B_n) = \lim\limits_n \uparrow I^*(B_n)$ et si pour toute suite privilégiée $\{T_n\ n \in \mathbb{N}\}$ on a $I^*(\lim\limits_n \downarrow T_n) = \lim\limits_n \downarrow I^*(T_n)$. Introduisons alors notre dernière hypothèse.

H.3 La classe compacte $\mathcal{K}$ approche la tribu $\mathbb{B}$ au sens suivant : Pour toute capacité faible I^* et tout élément B de $\mathbb{B}$ on a :
$I^*(B) = \text{Sup}\,\{\ I^*(K)\quad K \subset B ; K \in \mathcal{K}\ \}$

Si $\mathcal{A}$ désigne l'anneau dénombrable engendré par le treillis $\mathcal{T}$ on pose $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ensemble des mesures définies sur $(X, \mathcal{A})$ muni de la tribu $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ engendrée par la famille $\{\{\omega \in \mathcal{M} : \omega(A) < \alpha\}\ A \in \mathcal{A}\ \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ (significations similaires pour $\mathcal{M}(X, \mathbb{B})$ et $\mathcal{Z}_{\mathbb{B}}$).

<u>Définition 3</u>: Une mesure $\omega \in \mathcal{M}(X,\mathbb{B})$ est t-régulière si elle vérifie pour pour tout B de $\mathbb{B}$ $\omega(B) = \operatorname{Sup}\{\omega(K) \quad K \in \mathcal{K} \quad K \subset B\}$ et $\omega(B) = \inf\{\omega(C) \quad B \subset C \quad C \in \mathcal{C}_\sigma\}$

Soit $\mu_{A_1 \ldots A_n}$ une famille compatible de lois sur $\{\bar{\mathbb{R}}_+^n \quad n \in \mathbb{N}\}$ Nous nous proposons donc dans cet article de montrer qu'il existe une loi P sur $(\mathcal{M}(X, \mathbb{B}), \mathcal{I}_{\mathbb{B}})$ portée par le sous-ensemble des mesures t-régulière telle que pour tout borélien B_n de $\bar{\mathbb{R}}_+^n$ et pour toute famille finie $\{A_i \; i=1\ldots n\}$ ou $A_i \in \mathcal{A} \; \forall i$ on ait :

$P\{\omega : (\omega(A_1)\ldots \omega(A_n)) \in B_n\} = \mu_{A_1\ldots A_n}(B_n)$

Dégageons d'abord deux <u>conditions nécessaires</u>

C 1 : Soit $A_n \in \mathcal{A}$ telle que A_n soit monotone croissante vers $A \in \mathcal{A}$ alors $P[\omega(A_n) \in]a,b]] \uparrow P[\omega(A) \in]a,b]]$ c'est-à-dire $\mu_{A_n}(]a,b]) \uparrow \mu_A(]a,b]) \quad \forall$ a et b $\in \mathbb{R}_+$.

C 2 : Soit T_n une suite priviliégiée et $A_n \in \mathcal{A}$ monotone croissante telle que $K = \lim\limits_n \downarrow T_n \subset \lim\uparrow A_n$ et

soit ω t-régulière : si $\omega(K) = \infty$, $\lim\downarrow \omega(T_n) = \lim\uparrow \omega(A_n)$; si $\omega(K) < \infty$ il existe $C \in \mathcal{C}_\sigma$ tel que $K \subset C$ et $\omega(C) < \infty$; mais T_n étant privilégiée $T_n \subset C$ à partir d'un certain rang et donc $\omega(K) = \lim\downarrow\omega(T_n)$ et $\omega(K) \leqslant \lim\uparrow\omega(A_n)$ donc $P\{\omega: \lim\downarrow\omega(T_n) \leqslant \lim\uparrow \omega(A_n)\} =$

Les deux théorèmes suivants montrent que ces deux conditions sont aussi suffisantes.

<u>Théorème 1</u>. Soit $\mu_{A_1\ldots A_n}$ une famille compatible de lois sur $\{\bar{\mathbb{R}}_+^n \; n \in \mathbb{N}\}$ indexée par les éléments de $\mathcal{A}$, définissant sur $\bar{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{A}}$ muni de sa tribu produit $\tilde{\mathcal{I}}_{\mathcal{A}}$, une loi P telle que P.ps $\omega \in \bar{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{A}}$ soit additive sur $\mathcal{A}$. Les conditions suivantes sont suffisantes pour que P soit portée par un sous-ensemble de mesures

C1. Pour toute suite $A_n \uparrow A$ avec A_n et $A \in \mathcal{A}$

P.ps : $\omega(A_n) \uparrow \omega(A)$ (l'ensemble négligeable dépendant de la suite)

C2 . Pour toute suite priviligiée T_n telle que $\lim\downarrow T_n =$
$K \subset \lim\uparrow A_n$ ou $A_n \in \mathcal{A}$: P ps $\lim\downarrow \omega(T_n) \leq \lim\uparrow \omega(A_n)$.

Remarque : les deux conditions C1 et C2 peuvent être exprimées directement à l'aide de la famille $\mu_{A_1 \ldots A_n}$ et on peut noter le lemme suivant :

lemme 1 : Les deux conditions nécessaires et suffisantes du théorème 1 sont équivalentes aux conditions suivantes :

C'1 : $\forall\ A_n \uparrow A, A_n$ et $A \in \mathcal{A}$: $\mu_{A_n}(B) \to \mu_A(B)$ $\forall B \in J_+ = \{\ ]a,b]\quad 0 \leq a < b \leq \infty\}$

C'2 : $\forall\ r \in \mathbb{Q}$ et $\forall p > 0$ tel que $\frac{1}{p} < r$:

$$\lim_n\downarrow \underline{\lim}_k\ \mu_{T_n,\ T_n \cap A_k}\ ([r,\infty] \times [0, r - \frac{1}{p}[) = 0$$

<u>preuve</u> Seule l'implication (C'1) $\Rightarrow$ (C1) n'est pas immédiate. Pour la montrer on considère une application φ continue strictement croissante de $\bar{\mathbb{R}}_+$ sur $[0,1]$ et la fonction d'ensemble $I(A) = \int \varphi[\omega(A)]\ dP$ définie sur $\mathcal{A}$. En approchant φ par une suite croissante de fonction étagée c'est-à-dire

$$\varphi_p = \sum_{k=2}^{2^p} \frac{k-1}{2^p}\ 1_{\{\frac{k-1}{2^p} < \varphi \leq \frac{k}{2^p}\}}$$ et en remarquant que

$\{\frac{k-1}{2^p} < \varphi \leq \frac{k}{2^p}\} \in J_+$ l'utilisation de C'1 mène à l'égalité

$\lim\uparrow I(A_n) = I(A)$ c'est-à-dire $\lim\uparrow \omega(A_n) = \omega(A)$ P.ps.

<u>preuve du théorème</u> La preuve étant longue nous la découpons en plusieurs étapes.

1 - Soit φ une fonction positive continue strictement croissante appliquant $\bar{\mathbb{R}}_+$ sur $[0,1]$ telle que $\varphi(\alpha+\beta+\gamma) + \varphi(\alpha) \leq \varphi(\alpha+\beta) + \varphi(\alpha+\gamma)$.

Pour tout A de $\mathcal{A}$ on pose $I(A) = \int_{\bar{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{A}}} \varphi\ [\omega(A)]\ dP$ (si on prend

$\varphi(x) = 1 - e^{-x}$ on a $I(A) = 1 - \Phi(1_A(\omega))$ ou Φ est la fonctionnelle génératrice de la loi P [3]).

On définit ensuite $\bar{I}(C) = \text{Sup}\,\{I(A) \quad A \subset C\}$ pour $C \in \mathcal{A}_\sigma$
et pour tout $B \subset X$ $\quad I^*(B) = \inf\,\{\bar{I}(C) \quad B \subset C \quad C \in \mathcal{A}_\sigma\}$
on définit de même $J(T) = \int \varphi[\omega(T)]\,dP = I(T)$ pour tout $T \in \mathcal{T}$
$\bar{J}(C) = \text{Sup}\,\{J(T) \quad T \subset C\}$ pour $C \in \mathcal{T}_\sigma$ et $J^*(B) = \inf\,\{\bar{J}(C) \quad B \subset C \quad C \in \mathcal{T}_\sigma\}$
Sur l'anneau $\mathcal{A}$, I est positive, croissante, fortement sous-additive d'après le choix de φ et si $A_n \uparrow A$ avec A_n et $A \in \mathcal{A}$ on a $I(A_n) \uparrow I(A)$ d'après la condition C.1. Il résulte d'un théorème connu ([4] p. 66) que les fonctions d'ensembles I^* et J^* sont croissantes telles que si $B_n \uparrow B$ $\quad I^*(B_n) \uparrow I^*(B)$ (resp.: $J^*(B_n) \uparrow J^*(B)$)

Si T_n est une suite privilégiée de limite K non vide soit $C \in \mathcal{T}_\sigma$ tel que $J^*(K) > \bar{J}(C) - \varepsilon > J(T_n) - \varepsilon$ pour n assez grand donc $J^*(K) = \lim\limits_n \downarrow J(T_n)$ et J^* est une capacité faible : Il en est de même pour I^* d'après l'hypothèse C.2 et puisque I^* et J^* coïncident sur $\mathcal{T}$ elles coïncident sur $\mathcal{K}$ et on conclut d'après l'hypothèse H.3 que $\forall\, B \in \mathbb{B}$: $I^*(B) = J^*(B)$.

2 . Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $I(A) > 0$ $\quad I(A) = I^*(A)$ donc d'après H.3 il existe une suite K_i croissante ($\mathcal{K}$ stable par réunion) telle que $K_i \subset A$ $\forall i$ et $I(A) = \lim\limits_i \uparrow I^*(K_i)$.

D'après H.2 $I^*(K_i) = \lim\limits_j \downarrow I(T_j^i)$ et $K_i \subset T_j^i \cap A \subset T_j^i$ implique $I^*(K_i) = \lim\limits_j \downarrow I(T_j^i \cap A)$ D'autre part, on a l'égalité $I^*(A) = J^*(A)$ donc $I(A) = \lim\limits_n \downarrow \bar{J}(C_n) = \lim\limits_n \downarrow \lim\limits_k \uparrow I(D_{n,k})$ où chaque $D_{n,k} \in \mathcal{T}$

L'application du théorème de Lebesgue donne :

$$\int \varphi\,[\lim_i \uparrow \lim_j \downarrow \omega\,(T_j^i \cap A)]\,dP = I(A) = \int \varphi[\omega(A)]\,dP = \int \varphi[\lim_n \downarrow \lim_k \uparrow \omega(D_{n,k})]\,dP.$$

L'hypothèse C.2 implique que $\lim\limits_j \downarrow T_j^i \subset \lim\limits_k \uparrow D_{n,k}$ entraîne $\lim\limits_j \downarrow \omega(T_j^i) \leqslant \lim\limits_k \uparrow \omega(D_{n,k})$ $\forall\,(i,n)$ d'où les deux relations fondamentales suivantes valables car $\mathcal{A}$ est dénombrable: Il existe N ensemble P-négligeable tel que si $\omega \notin N$

R.1 $\quad 0 < \omega(A) = \lim\limits_i \uparrow \lim\limits_j \downarrow \omega(T_j^i(A) \cap A)$ où $T_j^i(A)$ est une suite
$\forall\, A \in \mathcal{A}$ $\quad$ privilégiée telle que $\forall i$ $\quad T_j^i(A) \downarrow_j K_i \subset A$ et $K_i \in \mathcal{K}$

R.2 $0 < \omega(A) = \lim_n \downarrow \lim_k \uparrow \omega(D_{n,k})$ ou $D_{n,k} \in \mathcal{T}$ $\forall (n,k)$

$D_{n,k} \equiv D_{n,k}(A)$; $A \subset \lim_k \uparrow D_{n,k}(A)$

R.3 $\omega(A) = 0$ (provient du cas où $I(A) = 0$).

Alors $\forall \omega \notin N$ ω est une mesure. Il suffit pour cela de montrer que pour toute suite $A_k \in \mathcal{A}$ telle que $A_k \uparrow A$ ou $A \in \mathcal{A}$ on a $\lim_k \uparrow \omega(A_k) = \omega(A)$.

Distinguons deux cas (celui où $\omega(A) = 0$ étant trivial) :

3 . $0 < \omega(A) < \infty$ on peut se ramener aux suites décroissantes vers $\emptyset$ en posant $D_k = A - A_k$ avec $\omega(D_1) < \infty$ et on suppose que $\omega(D_k) > \varepsilon > 0$ $\forall k$ on applique R.1 : $\omega(D_\ell) - \omega(T_j^i(D_\ell) \cap D_\ell) < \frac{\varepsilon}{2^\ell}$ pour $i \geq i_\ell$ et $\forall j$

$$D_k = \bigcap_{\ell=1}^k D_\ell \subset \bigcap_{\ell=1}^k [D_\ell \cap T_j^i(D_\ell)] \cup \bigcup_{\ell=1}^k [D_\ell - D_\ell \cap T_j^i(D_\ell)]$$

d'où $\omega(\bigcap_{\ell=1}^k T_j^{i_\ell}(D_\ell)) \geq \omega(D_k) - \sum_{\ell=1}^k \omega(D_\ell - T_j^{i_\ell}(D_\ell) \cap D_\ell) > \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall j$

d'où $\bigcap_{\ell=1}^k T_j^{i_\ell}(D_\ell) \neq \emptyset$ $\forall j$ et on en déduit $\bigcap_{\ell=1}^k K_{i_\ell} \neq \emptyset$ chaque K_{i_ℓ} étant non vide d'après R.1. Supposons en effet que $\bigcap_{\ell=1}^k K_{i_\ell} = \emptyset$ et soit n le plus grand entier ($1 \leq n < k$) tel que $\bigcap_{\ell=1}^n K_{i_\ell} \neq \emptyset$ et $\bigcap_{\ell=1}^n K_{i_\ell} \cap K_{i_{n+1}} = \emptyset$

Avec l'hypothèse H.0 on peut trouver u, v, $(u_\ell)_{\ell=1..n}$ éléments de $\mathcal{T}$ tels que $K_{i_\ell} \subset u_\ell$ $\bigcap_{\ell=1}^n u_\ell \subset u$ $K_{i_{n+1}} \subset V$ et $u \cap V = \emptyset$. Les suites $T_j^{i_\ell}(D_\ell)$ étant privilégiées on aurait $\bigcap_{\ell=1}^n T_j^{i_\ell}(D_\ell) \cap T_j^{i_{n+1}}(D_{n+1}) = \emptyset$ pour j assez grand ce qui est impossible. Donc $\bigcap_{\ell=1}^k K_{i_\ell}$ est une suite décroissante non vide d'éléments de $\mathcal{K}$ d'où $\emptyset \neq \bigcap_{\ell=1}^\infty K_{i_\ell} \subset \bigcap_{\ell=1}^\infty D_\ell = \emptyset$ ce qui est impossible et prouve que $\omega(D_k) \downarrow 0$.

4. $\omega(A) = \infty$ Supposons qu'il existe $M < \infty$ tel que pour tout k on ait $\omega(A_k) < M$. l'application de R.1 donne un i_0 tel que $\omega(T_j^{i_0}(A) \cap A) > M$ $\forall j$ alors nécessairement $\omega(T_j^{i_0}(A)) = \infty (\forall j)$ sinon $\omega(T_j^{i_0}(A) \cap A) = \lim \uparrow \omega(T_j^{i_0} \cap A_k)$ et donc $\omega(T_j^{i_0}(A) \cap A) \leq M$ ce qui n'est pas.

On note $K_{i_o} = \lim\downarrow_j T_j^{i_o}(A)$ élément de $\mathcal{K}$ contenu dans A.

D'autre part, $\omega(A_j) = \lim_n \downarrow \lim\uparrow_k \omega(D_{n,k}(A_j))$ (R.2) donc il existe

n_j tel que $\lim\uparrow_k \omega(D_{n_j,k}(A_j)) < M$. Soit $C_j = \lim\uparrow_k D_{n_j,k}(A_j) \{A_j \subset C_j\}$

si on pose $\bar{\omega}(C_j) = \operatorname{Sup}\{\omega(T); T \subset C_j, T \in \mathcal{T}\}$ alors on a $\bar{\omega}(C_j) < M$

en effet : a) si $\bar{\omega}(C_j) < \infty$: $\bar{\omega}(C_j) = \lim\uparrow_n \omega(T_n)$ $T_n \in \mathcal{T}$ $\omega(T_n) < \infty$

mais $T_n \cap D_{n_j,k}(A_j) \uparrow T_n$ implique $\lim\uparrow\omega(T_n) \leqslant \lim\uparrow \omega(D_{n_j,k}(A_j)) < M$

b) si $\bar{\omega}(C_j) = \infty$ alors il existe $T_j \in \mathcal{T}$ $T_j \subset C_j$ et $\omega(T_j) = \infty$

car d'après ce qui précède si $\omega(T) < \infty$ on a nécessairement $\omega(T) < M$;

on a donc la situation suivante : $\omega(T_j) = \infty$; $T_j = \lim\uparrow_k T_j \cap D_{n_j,k}(A_j)$ et

$\omega(D_{n_j,k}(A_j)) < M$ $\forall k$ on réapplique le raisonnement fait pour l'obtention

de $T_j^{i_o}$ et on obtient une suite privilégiée $T_p^{i_1}(T_j)$ telle que

$\omega(T_p^{i_1}(T_j) \cap T_j) = \infty$ $\forall_p$ et soit $K_{i_1} = \lim\downarrow_p T_p^{i_1}(T_j)$ on ne peut pas

avoir : $\exists$ k : $K_{i_1} \subset D_{n_j,k}(A_j)$ car la suite $T_p^{i_1}$ étant privilégiée et

$D_{n_j,k}(A_j) \in \mathcal{T}$, on aurait $K_{i_1} \subset T_p^{i_1}(T_j) \subset D_{n_j,k}(A_j)$ pour p assez grand
ce qui est impossible.

Donc, $K_{i_1} - D_{n_j,k}(A_j)$ est une suite décroissante non vide d'éléments de $\mathcal{K}$ donc d'intersection non vide or $\bigcap_k (K_{i_1} - D_{n_j,k}(A_j))$ inclu dans

$T_j - \lim_k \uparrow D_{n_j,k}(A_j) = \emptyset$ donc une contradiction qui prouve que

$\bar{\omega}(C_j) < M$ et donc que $\bar{\omega}(C_j) = \lim\uparrow_k \omega(D_{n_j,k}(A_j))$.

Soit alors $C_j \cup C_\ell = \lim\uparrow_k (D_{n_j,k}(A_j) \cup D_{n_\ell,k}(A_\ell)) = \lim\uparrow_k T_k^{j,\ell}$

et $\omega(T_k^{j,\ell}) < 2M$ $\forall$ k . On déduit de ce qui précède que $\bar{\omega}(C_j \cup C_\ell) < 2M$

et $\bar{\omega}(C_j \cup C_\ell) = \lim_k \uparrow \omega(T_k^{j,\ell}) \leqslant \bar{\omega}(C_j) + \bar{\omega}(C_\ell)$. On forme alors la suite monotone croissante $D_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ avec $\overline{\omega}(D_n) < \infty$ et $D_n \in \mathcal{T}_\sigma$: il reste à voir que $K_{i_o} - D_n$ est une suite monotone décroissante d'éléments non vides de $\mathcal{K}$ ce qui est clair car $D_n \in \mathcal{T}_\sigma$ et $K_{i_o} \subset D_n$ impliquerait $T_j^{i_o} \subset D_n$ pour j assez grand avec $\omega(T_j^{i_o}) = \infty$ et $\overline{\omega}(D_n) < \infty$ ce qui est impossible.

Donc $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{i_o} - D_n \subset K_{i_o} - \lim\limits_{n} \uparrow D_n$ avec $K_{i_o} \subset A$ et $A_n \subset D_n$. On aboutit à une contradiction qui prouve le théorème. ∎

Soit $\mathcal{M}$ le sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{A}}$ constitué des éléments $\omega = (\ldots\omega(A)\ldots)$ dont les coordonnés définissent une mesure sur $(X, \mathcal{A})$: si on pose $\tau(\omega)(A) = \omega(A)$ pour $\omega \in \mathcal{M}$ on définit une application mesurable de $(\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}^{P}, P)$ ou $\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}^{P}$ est la complétée de $\tilde{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}$ pour P, dans $(\mathcal{M}(X,\mathcal{A}), \mathcal{Z}_{\mathcal{A}})$ et la loi image P_o est une mesure aléatoire sur $(X, \mathcal{A})$.

Etant donné une mesure aléatoire quelconque sur $(X, \mathcal{A})$ il est toujours possible de construire une mesure aléatoire sur $(X, \mathbb{B})$ où $\mathbb{B} = \sigma(\mathcal{A})$ c'est à dire d'obtenir une application mesurable de $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ dans $\mathcal{M}(X, \mathbb{B})$.

lemme 2 : Soit ω une mesure quelconque sur $(X, \mathcal{A})$. On définit les fonctions d'ensembles suivantes :

$$\overline{\omega}(C) = \text{Sup}\ \{\ \omega(T)\ ;\ T \subset C \quad T \in \mathcal{T}\}\ \forall\ C \in \mathcal{T}_\sigma$$
$$\omega^*(B) = \text{Inf}\ \{\ \omega(C)\ ;\ B \subset C \quad C \in \mathcal{T}_\sigma\}\ \forall\ B \subset X$$

et de même pour ω_* en remplaçant dans les formules $\mathcal{T}$ par $\mathcal{A}$. Alors ω^* est une mesure extérieure telle que $\mathbb{B} \subset \mathcal{M}^*$ ensemble des parties ω^*-mesurables et la restriction de ω^* à $\mathbb{B}$ est une mesure régulière.

preuve 1 le fait que ω_* soit une mesure extérieure telle que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_*$ est bien connu. On sait que ([4] p.66| ω^* est aussi une mesure extérieure et il est clair que $\omega_*(B) \leqslant \omega^*(B)$ et que

$\omega_*(T) = \omega^*(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}$ implique $\omega_*(B) = \omega^*(B)$ si $\omega^*(B) < \infty$. On en déduit immédiatement que $\mathbb{B} = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_* \subset \mathcal{M}^*$

2. ω^* restreinte à $\mathbb{B}$ est une mesure t-régulière car il découle de la construction que c'est une capacité faible et on applique H.3.

Théorème 2 Soit P_o une loi quelconque sur $(\mathcal{M}(X,\mathcal{A}), \mathcal{Z}_{\mathcal{A}})$

1 - L'application de $(\mathcal{M}(X,\mathcal{A}), \mathcal{Z}_{\mathcal{A}})$ dans $(\mathcal{M}(X,\mathbb{B}), \mathcal{Z}_{\mathbb{B}})$ qui à ω fait correspondre ω^* définie ci-dessus est mesurable et définit donc une mesure aléatoire sur $(X, \mathbb{B})$

2 - Avec les notations du théorème 1, et sous l'hypothèse C.2 la loi image P_1 sur $(\mathcal{M}(X\ \mathbb{B}), \mathcal{Z}_{\mathbb{B}})$ est une mesure aléatoire t-régulière telle que $P_1\{\omega : \omega(A_1) \in I_1 \ldots \omega(A_k) \in I_k\} = \mu_{A_1 \ldots A_k}(I_1 \times \ldots \times I_k)$ ou les A_i sont dans $\mathcal{A}$

Preuve 1 Soit J^* la capacité faible définie à l'aide du treillis $\mathcal{T}$ et $B \in \mathbb{B}$. on a $J^*(B) = \lim_i \uparrow J^*(K_i)$ et $J^*(K_i) = \lim_j \downarrow I(T_j^i) = \lim_j \downarrow \int \varphi[\omega(T_j^i)]\, dP_o$ (T_j^i privilégiée) mais ω^* est une capacité faible donc P_o p.s : $\omega^*(K_i) = \lim_j \downarrow \omega(T_j^i)$ et donc

$$J^*(B) = \int \lim_i \uparrow \varphi\,[\,\omega^*(K_i)]\quad dP_o$$

D'autre part, par définition,: $J^*(B) = \lim_n \downarrow \int \varphi[\lim_k \uparrow \omega(D_{n,k})]\, dP_o$

ω étant une mesure sur $\mathcal{A}$: $\lim_k \uparrow \omega(D_{n,k}) = \bar{\omega}(C_n)$ d'où

$$J^*(B) = \int \varphi\,[\lim_i \uparrow \omega^*(K_i)]\, dP_o = \int \varphi(\lim_n \downarrow \bar{\omega}(C_n))\, dP_o$$

or $K_i \subset B \subset C_n$ donc P_o ps : $\lim_i \uparrow \omega^*(K_i) = \omega^*(B) = \lim \downarrow \bar{\omega}(C_n)$ c'est-à-dire $\omega^*(B) = \lim_i \uparrow \lim_j \downarrow \omega(T_j^i)$ d'où la mesurabilité de l'application $\omega \to \omega^*$

2 Dans le cas général la mesure ω^* est définie par ω mais n'est pas un prolongement à la tribu car ω et ω^* ne coïncident que sur le treillis $\mathcal{T}$. Cependant sous l'hypothèse C.2 on a P_o.ps : $\omega(A) = \lim_n \downarrow \bar{\omega}(C_n)$ (relation R.2) pour $A \in \mathcal{A}$ et donc d'après ce qui précède $\omega^*(A) = \omega(A)$ c'est-à-dire quel'on a bien un prolongement et donc l'égalité

$P_1 \{ \omega^*: \omega^*(A)_1 \in I_1 \ldots \omega^*(A_k) \in I_k \} = P_0\{\omega(A_1) \in I_1 \ldots \omega(A_k) \in I_k\} =$

$\mu_{A_1 \ldots A_k}(I_1 \times \cdots \times I_k)$ où les A_i sont dans $\mathcal{A}$ ce qui prouve le théorème.

Corollaire : Soit P_1 la mesure aléatoire construite précédemment à l'aide des théorèmes 1 et 2. La loi P_1 est compacte.

Preuve : La preuve s'appuie sur la notion de mesure parfaite ([5]p. 242). La loi P construite sur $(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{A}})$ est parfaite donc aussi ses images et donc P_1 est parfaite sur $(\mathcal{M}(X, \mathbb{B}), \mathcal{T}_{\mathbb{B}})$ et compacte sur la sous-tribu $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ qui est a base dénombrable. La loi P_1 est donc encore compacte sur la complétée $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{P_1}$ or la relation $\omega^*(B) = \lim_i \uparrow \lim_j \downarrow \omega(T_j^i)$ montre que $\mathcal{T}_{\mathbb{B}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{P_1}$ d'où le corollaire.

II Application au cas topologique

Nous nous proposons de montrer dans cette partie que les résultats précédents s'appliquent au cas où X est un espace souslinien régulier à base dénombrable. Les notations suivantes sont utilisées :

a) Σ désigne l'ensemble des suites d'entiers : $\Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Les éléments de Σ seront désignés par la lettre σ .

b) S est l'ensemble des suites d'entiers de longueurs finies : les éléments de S seront notés s ou s'.

c) $s < \sigma$ ou $s < s'$ signifie que la suite s est commençante pour σ(ou s') .

d) $s \lessgtr s'$ signifie que les deux suites finies sont de même longueur et que si $s = (s_1 \ldots s_n)$ et $s' = (s'_1 \ldots s'_n)$ alors pour tout $i = 1 \ldots n$: $s_i \leqslant s'_i$.

e) la longueur d'une suite s est notée $|s|$.

X est dit souslinien s'il existe un espace complet métrique séparable X_0 et φ une application continue de X_0 sur X. Les propriétés essentielles de X que nous utiliseront sont rassemblés dans le lemme ci-dessous ([6]).

<u>lemme</u> 3 : Soit B un borélien de X ($\mathbb{B}$ désigne ici la tribu borélienne) non vide.

i) $B = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{s<\sigma} A_s$; A_s fermé et si $s'<s$: $A_s \subset A_{s'}$

ii) $\forall\ \sigma$: $\lim\downarrow_{s<\sigma} \bigcup_{s'\gneqq s} A_{s'} = H(B,\sigma)$ compact non vide contenu dans B.

iii) Pour tout ouvert V tel que $H(B,\sigma) \subset V$ il existe $s<\sigma$ tel que $\dot{A}_s = \bigcup_{s'\gneqq s} A_{s'} \subset \overline{V}$

<u>Preuve</u> i) Soit X_0 espace polonais et φ une application surjective continue de X_0 sur X. Si $B \in \mathbb{B}$ $\varphi^{-1}(B)$ est un borélien de X_0 donc peut s'écrire :

$$\varphi^{-1}(B) = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcap_{s<\sigma} F_s \quad ([6])$$

où F_s est fermé, de diamètre pour une métrique d sur X_0, plus petit que $\frac{1}{2^{|s|}}$ et où le schéma est monotone c'est-à-dire $F_{s'} \subset F_s$ si $s<s'$. On a alors $B = \bigcup_{\sigma} \bigcap_{s<\sigma} \overline{\varphi(F_s)}$. La barre désignant la fermeture dans X (on vérifie simplement, X étant régulier, que $\bigcap_{s<\sigma} \overline{\varphi(F_s)} \subset B$)

ii) Soit σ une suite fixée et considérons $\bigcup_{s'\gneqq s} \overline{\varphi(F_{s'})} = \dot{F}_s$

i $H_0 = \lim\downarrow_{s<\sigma} \bigcup_{s'\gneqq s} F_{s'}$, on sait que H_0 est un compact non vide de X_0 ([6] p. 29) et par construction $d(H_0, \bigcup_{s'\gneqq s} F_{s'}) < \frac{1}{2^{|s|}}$. $\varphi(H_0)$ est un compact non vide de X. Soit alors V un ouvert quelconque tel que $\varphi(H_0) \subset V$: $H_0 \subset \varphi^{-1}(V)$ donc il existe s tel que $H_0 \subset \bigcup_{s'\gneqq s} F_{s'} \subset \varphi^{-1}(V)$ d'où $\varphi(H_0) \subset \bigcup_{s'\gneqq s} \overline{\varphi(F_{s'})} \subset \overline{V}$; dans X régulier

$\varphi(H_0) = \bigcap_{V:\ \varphi(H_0)\subset V}$ donc $\lim_{s<\sigma} \downarrow \dot{F}_s \subseteq \varphi(H_0)$ mais l'inégalité inverse étant triviale on a l'égalité ce qui prouve le lemme si on pose donc $A_s = \overline{\varphi(F_s)}$.

Soit alors $\mathcal{T}$ une base dénombrable d'ouverts pour la topologie de X telle que $X \in \mathcal{T}_\sigma$ (on peut supposer $\mathcal{T}$ stable par réunion et intersection finie donc que $\mathcal{T}$ est un treillis) et soit $\mathbb{B}$, $\mathcal{K}$ respectivement la tribu borélienne et la classe des compacts de X. Il est clair que les hypothèses H_0, H_1, H_2 sont satisfaites (Remarque 2).

Soit alors I^* une capacité faible sur X et B un borélien. On peut toujours supposer I^* bornée sinon on considère $\varphi(I^*)$ où φ est strictement croissante et applique $\overline{\mathbb{R}}_+$ sur $[0,1]$ .Reprenons les notations du lemme 3.Le théorème de capacitabilité se prouve en montrant que pour tout ε il existe une suite $\sigma_\varepsilon = (\sigma_1 \dots \sigma_p \dots)$ telle que si $s_p = (\sigma_1 \dots \sigma_p)$ on ait $I^*(B) < I^*\Big(\bigcup_{s \leqslant s_p} A_s\Big) + \varepsilon$ pour tout p. D'après le lemme 1 on a $\lim_{s_p < \sigma_\varepsilon} \bigcup_{s \leqslant s_p} A_s = H(B, \sigma_\varepsilon)$ compact non vide. Soit T_n suite privilégiée telle que $T_n \downarrow H(B,\sigma_\varepsilon)$. L'espace étant régulier $\exists u_n$ tel que u_n ouvert et $H(B,\sigma_\varepsilon) \subset u_n \subset \bar{u}_n \subset T_n$ d'après le lemme 1 il existe s_p tel que $\bigcup_{s \leqslant s_p} A_s \subset \bar{u}_n \subset T_n$.

Donc $\lim_p \downarrow I^*\Big(\bigcup_{s \leqslant s_p} A_s\Big) \leqslant \lim_n \downarrow I(T_n)$ d'où $\lim_p \downarrow I^*\Big(\bigcup_{s \leqslant s_p} A_s\Big) = I^*(H(B,\sigma_\varepsilon))$ avec $H(B,\sigma_\varepsilon) \subset B$. C'est bien dire que $I^*(B) = \operatorname{Sup} \{ I^*(K) \mid K \subset B \ \ K \text{ compact} \}$ d'où la proposition suivante :

<u>Proposition</u> Si X est un espace Souslinien régulier à base dénombrable alors X remplit toutes les hypothèses d'application des théorèmes 1 et 2.

Remarque 1. Si on veut construire une mesure aléatoire de Radon il suffit d'imposer à la famille compatible $\mu_{A_1 \dots A_n}$ la condition suivante :

C.3 Pour toute suite privilégiée T_n on a : $\lim_n \mu_{T_n}(\mathbb{R}_+) = 1$. La mesure ainsi obtenue est en effet t-régulière et finie sur les compacts. On peut alors mettre une topologie sur cet espace de mesures et étendre les théorèmes classiques de convergences. ([7]).

Remarque 2 : Pour montrer H_2 remarquons que si K est compact, pour tout ouvert V tel que $K \subset V$ il existe S appartenant à $\mathcal{C}$ tel que $K \subset S \subset V$; alors $K = \bigcap_{\substack{S \in \mathcal{C} \\ K \subset S}} S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ puisque $\mathcal{C}$ est dénombrable. Il suffit de poser $T_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ et T_n est une suite privilégiée telle que $\lim_n \downarrow T_n = K$.

BIBLIOGRAPHIE

1 T.E. HARRIS
Counting measures, monotone random. Set functions.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb 10 . 102-119 (1968)

2 et 3 P. JAGERS
Aspects of random measures and point processes.
Advances in Probability. Vol. 3
Edited by NEY and PORT. Marcel DEKKER. New York (1974)

4 P.A. MEYER
Probabilités et potentiel.
Acutalités Scientifiques et industrielles 1318. Hermann 1966.

5 A. TORTRAT - HENNEQUIN :
Théorie des Probabilités et quelques applications : MASSON

6 K.R. PARTHASARATHY
Probability measures on metric spaces.
Academic Press. New York. 1967

7 A. ACQUAVIVA
Partitions et mesures aléatoires. Mesures dominantes.
C.R. Acad. Sc. Paris t. 288 (mars 1979)
