ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LÉONARD GALLARDO

Une transformation de Cramer sur le dual de $SU(2)$

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 102-106

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_102_0>

UNE TRANSFORMATION DE CRAMER SUR LE DUAL DE SU(2)

Léonard GALLARDO

Université de NANCY I (*)

We introduce a Cramer transform for the random walks on the dual of SU(2) and we obtain a theorem of large deviations.

Nous introduisons une transformation de Cramer pour les marches aléatoires sur le dual de SU(2) . Ceci nous permet d'obtenir un résultat de grandes déviations.

1. Introduction

Soit SU(2) le groupe de Lie compact des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On sait (cf. [2] ou [8]) que le dual de SU(2) (i. e. : l'ensemble des caractères normalisés) est discret et constitué par les fonctions

(1.1) $$g \longmapsto \chi_x(g) = \frac{\sin[(x+1)\,\theta]}{(x+1)\sin\theta} \qquad (x \in \mathbb{N}) ,$$

où $e^{\pm i\theta}$ sont les valeurs propres de la matrice $g \in SU(2)$. Les caractères χ_x vérifient en outre la formule de multiplication de Clebsch-Gordon (cf. [4]) :

(1.2) $$\chi_x\,\chi_y = \sum_{s=o}^{x\wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}\,\chi_{|x-y|+2s} , \quad (x,y) \in \mathbb{N}^2 .$$

Comme on a

(1.3) $$\sum_{s=o}^{x\wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)} = 1 ,$$

la relation (1.2) permet de munir $\mathbb{N}$ (i. e. : le dual de SU(2)) d'une structure d'hypergroupe et de définir une convolution $\times$ sur l'ensemble $M^1(\mathbb{N})$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$ par :

(1.4) $$\delta_x \times \delta_y = \sum_{s=o}^{x\wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}\,\delta_{|x-y|+2s}$$

(*) et E.R.A. n° 839 du C.N.R.S.

et plus généralement pour deux éléments $\mu = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x \delta_x$ et $\nu = \sum_{y\in\mathbb{N}} b_y \delta_y$ de $M^1(\mathbb{N})$:

$$(1.5) \qquad \mu \times \nu = \sum_{x,y\geqslant o} a_x b_y \delta_x \times \delta_y .$$

Dans [4], P. Eymard et B. Roynette considèrent cette convolution et la transformation de Fourier qui lui est naturellement associée $\left(\hat{\mu}(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x \frac{\sin[(x+1)\theta]}{(x+1)\sin\theta} \text{ si } \mu = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x \delta_x \in M^1(\mathbb{N})\right)$, pour étudier la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de noyau de transition

$$(1.6) \qquad P(x,.) = (\delta_x \times \mu)(.) ,$$

qu'ils nomment marche aléatoire de loi μ sur le dual de $SU(2)$.

Des généralisations de la situation précédente au cas où les fonctions $\frac{\sin[(x+1)\theta]}{(x+1)\sin\theta}$ sont remplacées par certains polynômes orthogonaux ou par les fonctions sphériques définies positives d'une paire riemannienne symétrique, ont été largement développées dans [3], [4], [6] et [7] et très récemment par H. Heyer et W. R. Bloom (cf. [1]) qui reprennent ces idées dans le contexte plus abstrait des hypergroupes.

Notre seule intention dans cette note est d'apporter une illustration supplémentaire à la théorie précitée, en montrant qu'on peut définir très simplement une transformation de Cramer pour les marches aléatoires sur le dual de $SU(2)$ et obtenir ainsi une loi des grandes déviations en tout point analogue à celle des marches aléatoires classiques et que nous rappelons maintenant :

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ, centrée sur $\mathbb{R}$, telles que leur transformée de Laplace $\tilde{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, d\mu(x)$ soit finie pour t assez voisin de zéro. Pour la marche aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$, on a alors <u>la loi des grandes déviations</u> :

$$(1.5) \qquad P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n\lambda(a)} \quad \text{si} \quad a > 0$$

et

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-n\lambda(a)} \quad \text{si} \quad a < 0 ,$$

où $\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} [tx - \log \tilde{\mu}(t)]$ est <u>la transformée de Cramer</u> de μ .

2. La transformation de Cramer

La fonction $\theta \longmapsto \chi_x(\theta) = \dfrac{\sin[(x+1)\,\theta]}{(x+1)\sin\theta}$ est analytique pour $|\theta| < \pi$ et peut être prolongée analytiquement dans la bande du plan complexe $|\mathrm{Re}\, z| < \pi$. Ainsi en posant

(2.1) $$\xi_x(t) = \frac{\sin[(x+1)\,it]}{(x+1)\sin(it)} = \frac{\mathrm{sh}[(x+1)\,t]}{(x+1)\,\mathrm{sh}\, t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

et en prolongeant analytiquement la formule (1.2), on obtient la formule de multiplication :

(2.2) $$\xi_x(t)\,\xi_y(t) = \sum_{s=o}^{x\wedge y} \frac{|x-y| + 2s + 1}{(x+1)(y+1)}\,\xi_{|x-y|+2s}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

(2.3) DEFINITION. <u>Soit</u> $\mu = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x\,\delta_x \in M^1(\mathbb{N})$. <u>La fonction définie sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>par</u> $\tilde{\mu}(t) = \sum_{x\in\mathbb{N}} a_x \dfrac{\mathrm{sh}[(x+1)\,t]}{(x+1)\,\mathrm{sh}\, t}$ <u>est appelée transformée de Laplace de la probabilité</u> μ.

On notera que $\tilde{\mu}(0) = 1$, mais $\tilde{\mu}(t)$ peut être $+\infty$ pour tout $t > 0$. Donnons maintenant quelques propriétés immédiates de la transformée de Laplace :

(2.4) PROPOSITION. a) <u>Si</u> $\tilde{\mu}(t_o) < +\infty$, <u>alors</u> $\tilde{\mu}(t) < +\infty$ <u>pour tout</u> $t \leqslant t_o$.

b) $\widetilde{\mu \times \nu}(t) = \tilde{\mu}(t).\tilde{\nu}(t)$ <u>pour</u> μ <u>et</u> ν <u>dans</u> $M^1(\mathbb{N})$.

DEMONSTRATION. a) Cette assertion résulte du fait que quel que soit $x \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}[(x+1)\,t]}{(x+1)\,\mathrm{sh}\, t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui se vérifie sans peine sur la dérivée.

b) Ce point résulte de (1.4), de la formule (2.2) et du fait que $\tilde{\delta}_x(t) = \xi_x(t)$.

(2.5) DEFINITION. <u>La fonction</u> λ <u>définie sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>par</u>

$$\lambda(x) = \sup_{t\geqslant o}\,[tx - \log \tilde{\mu}(t)]$$

<u>est appelée transformée de Cramer de la probabilité</u> $\mu \in M^1(\mathbb{N})$.

On résume dans la proposition suivante quelques propriétés triviales de λ :

(2.6) PROPOSITION. a) $\lambda(x) \geqslant 0$ <u>pour tout</u> $x \in \mathbb{R}_+$ <u>et si</u> $\tilde{\mu}(t) = +\infty$ <u>pour tout</u> $t > 0$, <u>alors</u> $\lambda(x) \equiv 0$.

b) λ <u>est une fonction convexe.</u>

c) λ <u>est semi-continue inférieurement sur</u> $\mathbb{R}_+$.

3. Les grandes déviations

Notons S_n l'état à l'instant n de la marche aléatoire de loi μ sur $\mathbb{N}$ (i. e. de noyau de transition $P(x,.) = (\delta_x \times \mu)(.))$. Dans [5], nous avons montré que sous l'hypothèse où μ a un moment d'ordre 1 , on a la loi des grands nombres :

(3.1) $$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ presque sûrement quand } n \longrightarrow +\infty .$$

Il est donc naturel de se poser le problème des grandes déviations, c'est-à-dire d'estimer pour $a > 0$ la probabilité $P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right)$. La réponse à cette question passe par la transformation de Cramer :

(3.2) THEOREME. Soient $a > 0$, $\mu \in M^1(\mathbb{N})$ ayant une transformée de Laplace (au sens de (2.3)) finie pour t assez voisin de zéro et S_n l'état à l'instant n de la marche aléatoire (au sens de (1.6)) de loi μ partant de zéro. On a alors :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (na+1)\ e^{-n\lambda(a)}$$

où λ est la transformée de Cramer de μ .

DEMONSTRATION. Pour $t > 0$, la fonction $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh}[(x+1)\ t]}{(x+1)\operatorname{sh} t}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc on a

$$P(S_n \geqslant na) = P\left(\frac{\operatorname{sh}[(S_n+1)\ t]}{(S_n+1)\operatorname{sh} t} \geqslant \frac{\operatorname{sh}[(na+1)\ t]}{(na+1)\operatorname{sh} t}\right)$$

$$\leqslant E\left[\frac{\operatorname{sh}[(S_n+1)\ t]}{(S_n+1)\operatorname{sh} t}\right].(na+1)\ \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}[(na+1)\ t]} ,$$

d'après l'inégalité de Markov. Or d'après (2.4) b), on a

$$E\left[\frac{\operatorname{sh}[(S_n+1)\ t]}{(S_n+1)\operatorname{sh} t}\right] = [\tilde{\mu}(t)]^n ,$$

donc comme $\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}[(na+1)\ t]} \leqslant e^{-n\ at}$ pour tout $t > 0$, il en résulte que l'on a

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant (na+1)\ e^{-n(at-\log \tilde{\mu}(t))}$$

pour tout $t > 0$ tel que $\tilde{\mu}(t) < +\infty$. Le résultat en découle puisque
$\lambda(x) = \sup\limits_{t:\tilde{\mu}(t)<+\infty} [tx-\log \tilde{\mu}(t)]$.

(3.3) EXEMPLE. La marche aléatoire de loi $\mu = \delta_1$ a ses probabilités de transitions données par : $P(x,x-1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$, $P(x,x+1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$ et $P(x,y) = 0$ si $y \notin \{x-1,x+1\}$. Par un calcul élémentaire, on obtient dans ce cas l'évaluation explicite $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (na+1)\, e^{-n \operatorname{Argth} a}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLOOM W. R. et HEYER H., Probability Measures on hypergroups I. Preprint.

[2] CLERC J. L., Les représentations des groupes compacts. CIMPA. Ecole d'été d'Analyse Harmonique. Nancy (1980).

[3] CLERC J. L. et ROYNETTE B., Un théorème central limite. Analyse Harmonique sur les groupes de Lie II. Lecture Notes n° 739. Springer Verlag (1979), p. 122-131.

[4] EYMARD P. et ROYNETTE B., Marches aléatoires sur le dual de SU(2). Analyse Harmonique sur les groupes de Lie. Lectures Notes n° 497. Springer Verlag (1975), p. 108-152.

[5] GALLARDO L. et RIES V., La loi des grands nombres pour les marches aléatoires sur le dual de SU(2). Studia Mathematica t. 66 (1979), p. 93-105.

[6] GEORGE C., Les chaînes de Markov associées à des polynômes orthogonaux. Thèse de Doctorat d'Etat. Nancy (1975).

[7] GUIVARC'H Y., KEANE M. et ROYNETTE B., Marches aléatoires sur les groupes de Lie. Lecture Notes n° 624. Springer Verlag (1977).

[8] VILENKINE N. J., Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Dunod. Paris (1969).