G. LETAC

La préservation des trajectoires du mouvement brownien et la préservation des lois de Cauchy

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 81-85

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_81_0>

LA PRESERVATION DES TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN ET LA PRESERVATION DES LOIS DE CAUCHY

G. LETAC

Université Paul Sabatier, TOULOUSE

1°) Lois de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne, on note $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Si $\omega = (a, p) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ la loi de Cauchy μ_ω dans $\mathbb{R}^n$ est la probabilité ayant pour densité le noyau de Poisson

$$P_\omega(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi^{-\frac{n}{2}} \; p \; \left[||x - a||^2 + p^2\right]^{-\frac{n+1}{2}}$$

Si les statisticiens considèrent avec répugnance cette loi sans moments, elle intéresse les probabilistes car elle est la loi de sortie du mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$ lorsque celui-ci part de $\omega = (a, p)$.
On dira qu'une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ préserve les lois de Cauchy si pour tout ω de $\mathbb{R}^n$ la loi $F_* \mu_\omega$ dans $\mathbb{R}^p$ transportée par F de μ_ω est une loi de Cauchy à nouveau ; en d'autres termes, si il existe une fonction $f_F : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_+^{p+1}$ telle que :

(1) $$F_* \mu_\omega = \mu_{f_F(\omega)}$$

En particulier si $p = 1$, il sera commode d'identifier $\mathbb{R}_+^2$ au plan complexe supérieur en posant $\omega = (a, p) = a + ip$. Rappelons qu'avec cette notation, la transformée de Fourier de μ_ω est :

(2) $$\hat{\mu}_\omega(t) = \exp(i \omega t) \quad \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad \omega \in \mathbb{R}_+^2$$

2°) Fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ préservant les lois de Cauchy

Notons $\mathfrak{F}_n$ l'ensemble de ces fonctions, et $\mathfrak{I}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_+^2$ telles qu'il existe $F \in \mathfrak{F}_n$ avec $f = f_F$.
En utilisant (1) et (2) si $F \in \mathfrak{F}_n$ on a pour tout $t > 0$:

$$(3) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\,(it\,F(x))\,P_\omega\,(x)\,dx = \exp\,it\,f_F\,(\omega)$$

Cette égalité implique trois choses pour f dans $\mathfrak{I}_n$:

(1) la fonction f est harmonique dans $\mathbb{R}_+^{n+1}$

(2) le carré du gradient complexe de f est nul, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 = 0$$

(3) $\lim\limits_{p \downarrow 0} f\,(a, p)$ existe, est réelle pour presque tout a de $\mathbb{R}^n$.

Il n'est pas difficile de voir qu'inversement si f satisfait (1), (2) et (3) alors $F = \lim\limits_{p \downarrow 0} f\,(a, p)$ appartient à $\mathfrak{F}_n$. Pour caractériser $\mathfrak{F}_n$, il suffit de trouver les fonctions satisfaisant (1), (2) et (3), propriétés qui caractérisent $\mathfrak{I}_n$.

3°) Relation avec le mouvement brownien

Il est connu (voir [1]) que si f satisfait (1) et (2) et si $(b(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $b(0) = \omega \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, alors le processus $X\,(t) = f\,(b(t))$, pour $0 \leq t < T = \inf\,\{t; b(t) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}\}$ a les mêmes trajectoires qu'un mouvement brownien dans $f\,(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathbb{R}^2$.
Si de plus f satisfait (3), alors $\lim\limits_{t \uparrow T} X\,(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$: il n'est pas surprenant qu'alors $F_* \,\mu_\omega$ soit une loi de Cauchy dans $\mathbb{R}$; à ma connaissance, c'est Harry Kesten qui a fait le premier cette remarque (voir [2]).
Les fonctions de $\mathfrak{I}_n$ sont donc les fonctions changeant les trajectoires du mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$ en celles sur $\mathbb{R}_+^2$, en "respectant la frontière" : par analogie avec les fonctions analytiques, on les appelle "intérieures" (voir [1]).

4°) Résultats connus

D'après l'article de F. Knight et P.A. Meyer, $\mathcal{F}_n$ n'est pas vide. Il comprend au moins les fonctions de la forme :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_o}{a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots + a'_n x_n + a'_o}$$

Par exemple le calcul montre que :

$$(4) \quad F(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \text{ implique } f_F(a_1, a_2, p) = \frac{a_1 a_2 + ip\sqrt{p^2 + a_1^2 + a_2^2}}{p^2 + a_2^2}$$

D'autre part on connait une description complète de $\mathcal{J}_1$ (et donc de $\mathcal{F}_1$) (voir [3]) ; l'ensemble $\mathcal{J}_1$ est en bijection avec $\{1,-1\} \times \mathbb{R} \times [0,+\infty) \times \mathcal{M}_s$ où $\mathcal{M}_s$ est l'ensemble des mesures bornées, positives et purement-singulières sur $\mathbb{R}$. Cette identification se fait ainsi ; si f est associé à $(\varepsilon, \alpha, k, \mu)$ alors, pour $\varepsilon = 1$:

$$f(\omega) = k\omega + \alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega\gamma + 1}{\omega - \gamma}\, \mu(d\gamma)$$

pour $\varepsilon = -1$

$$f(\omega) = -k\,\bar{\omega} - \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\omega}\gamma + 1}{\bar{\omega} - \gamma}\, \mu(d\gamma)$$

Ainsi $F(x) = \frac{1}{x}$ donne f_F qui est associé à $(-1, 0, 0, \delta_o)$ avec δ_o = masse de Dirac en 0.

Remarquons maintenant que $f \circ g \in \mathcal{J}_n$ si $f \in \mathcal{J}_1$ et $g \in \mathcal{J}_n$, de par la définition (et de même $F \circ G \in \mathcal{F}_n$). On peut alors se demander si on peut trouver une classe assez petite $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$ pour que $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$. Plus $\mathcal{G}_n$ sera petit, plus le théorème sera beau. J'ai longtemps cru qu'on pouvait prendre les homographies de Knight et Meyer en guise de $\mathcal{G}_n$. C'est déjà faux pour n = 2 , comme on va le voir, mais il y a quelque chose de très proche des homographies qui sert de classe $\mathcal{G}_2$.

4°) Caractérisation de $\mathcal{F}_2$ et de $\mathcal{J}_2$

Le résultat suivant est extrait de [4].

Théorème

Soit $F \in \mathcal{F}_2$. On a l'alternative :

(I) ou bien il existe $c \in \mathbb{R}^2$ telle que F soit constante sur les demi droites issues de c. Si $\mathbb{R}^2$ est représenté en coordonnées polaires (ρ, Θ) avec c pour origine, il existe F_1 dans $\mathcal{F}_1$ tel que

$$F(\rho \cos \Theta, \ \rho \sin \Theta) = F_1 \left(\operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2}\right)$$

(II) ou bien il existe une direction c dans $\mathbb{R}^2$ telle que F soit constante sur toutes les droites de direction c. Si $(\cos \Theta, \sin \Theta)$ est une direction orthogonale à c, il existe F_1 dans $\mathcal{F}_1$ tel que

$$F(x_1, x_2) = F_1 (x_1 \cos \Theta + x_2 \sin \Theta).$$

Le cas (II) correspond bien à des homographies dégénérées en fonctions linéaires, composées avec une fonction de $\mathcal{F}_1$. Le cas (I) est plus subtil : $\operatorname{cotg} \Theta$ au lieu de $\operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2}$ aurait donné une homographie mais le théorème indique que ces homographies n'ont pas la minimalité cherchée. En fait

$\operatorname{cotg} \Theta = F_1 \left(\operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2}\right)$ avec $F_1(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ qui est une fonction de $\mathcal{F}_1$ associée à $(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \delta_o)$. Cela correspond à (4), avec $c = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bernard, E.A. Campbell et A.M. Davie
"Brownian notion and generalised analytic and Inner functions"
Ann. Institut Fourier Grenoble, 29, n° 1, 1979, pp. 207-228.

[2] J.H.B. Kempermann
"The ergodic behavior of a class of real transformations"
Stochastic Processes and related topics, I. (Proc. Summer Research Inst. on Statistical Inference for Stochastic Processes, Indiana, Bloomington 1974), Academic Press, New York 1975, pp. 249-258.

[3] G. Letac
"Which functions preserve Cauchy laws ?"
Proc. A.M.S. 67, n° 2, 1977, pp. 277-286.

[4] G. Letac et F. Oliè
"Les fonctions intérieures de $\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+^2$ et la préservation des lois de Cauchy"
C.R. Acad. Sc. t. 289, 16 Juillet 1979, A, 215-218.