ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

B. HEINKEL

Le théorème central-limite et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 67-69

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_67_0>

LE THEOREME CENTRAL-LIMITE ET LA LOI DU LOGARITHME ITERE DANS LES ESPACES DE BANACH

B. HEINKEL

Université de Strasbourg

Dans cet exposé nous avons tout d'abord rappelé brièvement les principaux résultats relatifs à la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach en mettant l'accent sur les différences avec la situation usuelle. Puis nous avons présenté notre solution du problème classique : "Quand une v.a. à valeurs dans un espace de Banach, vérifiant le théorème central-limite, vérifie-t-elle également la loi du logarithme itéré ?" La démonstration détaillée de notre résultat étant maintenant parue par ailleurs [1], nous nous contentons de rappeler sa formulation en quelques lignes.

Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B,\|.\|)$, muni de sa tribu boréllenne $\mathcal{B}$, de dual topologique B'. On suppose que X vérifie les conditions d'intégrabilité suivantes :

i) $\forall\, f \in B'$, $Ef(X) = 0$.

ii) $\forall\, f \in B'$, $Ef^2(X) < +\infty$.

Désignons par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de copies indépendantes de X et notons pour tout entier n :

$$S_n(X) = X_1 + \ldots + X_n .$$

De plus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignera la suite de nombres positifs :

$$a_n = (2n\, L_2\, n)^{1/2} ,$$

où :

$$L_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} L_2\, x &= \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, x) , && \forall\, x \geq e^e , \\ &= 1 , && \forall\, x \in [0, e^e[. \end{aligned}$$

On rappelle de plus que :

- la v.a. X vérifie le théorème central-limite si la suite de v.a. $(S_n(X)/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi ;

- la v.a. X vérifie la loi du logarithme itéré (compacte) s'il existe un ensemble $K\subset B$, compact, convexe et symétrique, tel que :

$$\text{a)}\quad P\{\lim_{n\to\infty} d(\frac{S_n(X)}{a_n}, K) = 0\} = 1 ,$$

$$\text{b)}\quad P\{C(\frac{S_n(X)}{a_n}) = K\} = 1 ,$$

où $C(\frac{S_n(X)}{a_n})$ désigne l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\frac{S_n(X)}{a_n})$.

Il est bien connu qu'une v.a. X vérifiant la loi du logarithme itéré (compacte), satisfait à (i) et (ii) et est telle que :

$$E(\|X\|^2/L_2\|X\|) < +\infty .$$

Nous pouvons à présent formuler le problème de la liaison entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré (compacte) : "Quand une v.a. X vérifiant le théorème central-limite, (i) et (ii) et telle que de plus $E(\|X\|^2/L_2\|X\|) < +\infty$, vérifie-t-elle également la loi du logarithme itéré (compacte) ?"

La solution complète de ce problème a été obtenue il y a quelques mois indépendamment par moi-même d'une part [1] et par J. Kuelbs et J. Zinn [2] d'autre part.

Le résultat s'énonce :

<u>THEOREME</u> :

Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B,\|.\|)$, telle que :

1) $\forall f\in B'$, $Ef(X) = 0$, $Ef^2(X) < +\infty$.

2) $E(\|X\|^2/L_2\|X\|) < +\infty$.

3) X vérifie le théorème central-limite.

Alors X vérifie également la loi du logarithme itéré (compacte).

REFERENCES

[1] B. HEINKEL — Relation entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 49(1979) p. 211-220.

[2] J. KUELBS, J. ZINN — (1979) à paraître.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX