ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

TH. EISELE

Diffusions avec branchement et interaction

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 21-34

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_21_0>

DIFFUSIONS AVEC BRANCHEMENT ET INTERACTION

TH. EISELE

Universität Zürich (Suisse)

Ici, nous traitons les diffusions avec branchement et interaction dans $\mathbb{R}^p$. Il s'agit alors d'une généralisation de notre modèle de diffusion avec branchement dans [3] et [4], où nous n'avons pas permis des interactions entre les particules. Bien sur, on ne peut plus démontrer la "propriété de branchement" comme en [4], mais autrement, tous les théorèmes importants restent valables, surtout le théorème sur la transformation, et la representation des martingales comme intégrales stochastiques.

Au contraire, le problème général du contrôle recoit une forme plus satisfaisante, parce que ici le contrôle peut dependre de toute la configuration, et non pas seulement d'une particule singulière comme en [4].

I NOTATIONS

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes.

Soit E l'éspace de toutes les configurations finies de particules dans $\mathbb{R}^p$, c'est à dire

E est l'éspace de mesures sur $\mathbb{R}^p$ avec valeurs dans

$N = \{0,1,2,\ldots\}$, 0 est la mesure zéro.

Prenons sur E la topologie faible, qui est métrisable, par la métrique $d(e,e')$ disons, $e, e' \in E$.

Comme d'habitude, notons par $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, E)$ l'éspace de fonctions continues à droite avec des limites à gauche (cadlag) et

$\Omega = \{\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+,E)$, si $X_s(\omega) = 0 \in E$, alors $X_t(\omega) = 0$ pour tout $t \geqslant S$ $\}$

Ici, X_t est la projection de Ω à E.

$\mathcal{M}_S = \sigma\{X_r, r \geqslant S\}$, $\mathcal{M}_S^t = \sigma\{X_r, s \leqslant r \leqslant t\}$.

Soit $\mathcal{P}$ la σ-algèbre des ensembles prévisibles de $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est étendue de deux façons en des fonctions f et f^+ de E dans $\mathbb{R}$ par

$$f(e) = \Pi\, f(y)^{e\{y\}}$$

et

$$f^+(e) = \sum e\{y\}\, f(y) \quad ,$$

où y parcourt $\mathbb{R}^p$ et $\alpha^o = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si H est un operateur sur un ensemble de fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, nous définissons

$$Hf(e) = \sum_y e\{y\}\, Hf(y)\, f(y)^{e\{y\}-1} \prod_{y' \neq y} f(y')^{e\{y'\}}$$

Ainsi, ecrivons plus briévement les intégrales stochastiques

$$\int_{(\tau_1,\tau_2)}^{+} b(X_r)\,dXr = \sum_i \int_{(\tau_1,\tau_2)} b(r, y_{ir}, X_r)\, dy_{ir}$$

et

$$\int_{(\tau_1,\tau_2)}^{+} \nabla f(X_r)\, dX_r = \sum_i \int_{(\tau_1,\tau_2)} \prod_{j\neq i} f(y_{j,r})\, \nabla f(y_{i,r})\, dy_{ir}$$

où $(y_{i,r})$ est une énumeration continue de X_r dans l'interval stochastique (τ_1,τ_2). De plus, posons

$$\int_s^{t\,+} b(X_r)dX_r = \sum_{\tau_i<t} \int_{(\tau_i,\tau_{i+1}\wedge t)}^{+} b(X_r)dX_r$$

où $\tau_o \equiv s$ et $\tau_{i+1} = \inf\{r > \tau_i,\ X_r \neq X_{r-}\}$

sont les temps de sauts pour le processus X_t.

Nous faisons les hypothèses suivantes sur les fonctions définites sur $F = \mathbb{R}^+ \times (\{(y,e) \in \mathbb{R}^p \times E \ ;\ e\{y\} \geqslant 1\} \cup \{0\})$

(H1)
Soit

$a(t,y,e) = (a_{ij}(t,y,e)) \in \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^p$ continue, symétrique et

il y ait M, $0 < M < \infty$, tel que

$M^{-1}||y'||^2 \leqslant \langle y', a(t,y,e)y'\rangle \leqslant M||y'||^2$ pour tout $y' \in \mathbb{R}^p$

$b(t,y,e) = (b_i(t,y,e)) \in \mathbb{R}^p$, et

$0 \leqslant \rho(t,y,e) \leqslant M$ soient des fonctions mésurables bornées.

Pour $K = 0,2,3,\dots,K_o$

$0 \leqslant q_K(t,y,e)$ soit mésurable avec

$$\sum_{K\neq 1}^{K_o} q_K(t,y,e) \equiv 1.$$

Posons pour une fonction réelle f sur $\mathbb{R}^p$

$$Kf(t,y,e) = \rho(t,y,e) \sum_{k=o}^{K_o} q_K(t,y,e)\ f^K(y) ,$$

où $q_1 = -1$ et, si $f \in dom(L) = \mathscr{C}^2_b(R^p)$

$$Lf(t,y,e) = \sum_i b_i(t,y,e) \frac{\partial}{\partial y_i} f(y) + \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(t,y,e) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} f(y).$$

II PROBLEME DE MARTINGALES

Definition :

Soit H un operateur infinitesimal sur un ensemble de fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

Nous disons qu'une famille $(P_{s,e})_{s,e \in \mathbb{R}^+ \times E}$ de mesure de probabilités sur Ω est une solution du problème de martingales par rapport à H pour les configurations sur $\mathbb{R}^p$, si

(i) $(s,e) \to P_{s,e}(A)$ est une fonction mésurable sur $\mathbb{R}^+ \times E$ pour tout $A \in \overline{\mathscr{M}_s}$,

(ii) $P_{s,e}\{\omega, X_r(\omega) = e \ \ \forall r \leqslant s\} = 1$,

(iii) pour toutes f du domaine de H,

$$f(X_t) - \int_0^t Hf(X_r)\, dr$$

est une $P_{s,e}$ martingale p.r. à $\mathscr{M}^r_s$.

Résumons les résultats de [7], proprement modifiés pour notre situation de configurations :

Théorème 1 (Stroock-Varadhan)

Sous les hypothèse (H1), il y a une solution unique du problème de martingales par rapport à L pour les configurations sur $\mathbb{R}^p$.

En utilisant ce théorème, on démontre d'une façon analogue à celle de [3] :

<u>Théorème 2</u> :

Sous (H_1) , il y a une solution unique $(P_{s,e})_{s,e \in \mathbb{R}^+ \times E}$ du problème de martingales par rapport à $(L + K)$ pour les configurations sur $\mathbb{R}^p$.

<u>Remarque</u> :

Contrairement aux conditions dans [3] et [4], ici les coefficients a, b, ρ et q_n dependent explicitement des configurations X_t. On a alors une interaction entre les particules, qui influe sur leurs mouvements, et leurs comportements de branchement. Donc, la "propriété de branchement", qui figure dans [5] et [4], n'est plus satisfaite.

Mais, comme en [4], on a

<u>Proposition 1</u>

Le processus $(P_{s,e})$ est un processus de Hunt, qui a la propriété forte de Feller. De plus, il y a une mesure de référence λ' sur $[0,\infty) \times E$ pour $(P_{s,e})$.

III <u>TRANSFORMATIONS</u>

Nous allons étudier, comment le processus $(P_{s,e})$ se change, si nous modifions les coefficients b and q_n.

Soit alors

$(P_{s,e})$ le processus unique avec le générateur

$$\frac{1}{2} \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + K$$

où K est comme dans le paragraphe 1. Et soit ($P^{b,d}_{s,e}$) le processus unique de générateur $(L^b + K^d)$ où $L^b = L$ comme dans 1 et

$$K^d f(t,y,e) = \rho(t,y,e) \sum_{K=o}^{K_o} q_K(t,y,e)\, d_K(t,y,e)\, f^K(g)$$

avec des fonctions mesurables, bornées

$$0 \leqslant d_K(t,y,e) < M' \text{ pour } K = 0,2,\ \ldots,\ K_o \text{ et}$$

$$d_1(t,y,e) = \sum_{K \neq 1} q_K(t,y,e)\, d_K(t,y,e).$$

On a alors la transformation de Girsanov sous la forme suivante (en faisant usage des conventions du paragraphe 1).

<u>Théorème 3</u> :

$P^{b,d}_{s,e}$ est absolument continue par rapport à $P_{s,e}$ sur $\mathcal{M}^t_s$, $t < \infty$,

et

$$dP^{bd}_{se} / dP_{s,e}\big|\mathcal{M}^t_s = \exp\Big\{ \int_s^{t+} \langle b,a^{-1}\rangle (X_r)\,dX_r - \frac{1}{2}\int_s^t \langle b,a^{-1}b\rangle^+ (X_r)\,dr - \int_s^t \big(\rho \sum_{K\neq 1} q_K (d_K-1)\big)^+ (X_r)\,dr \Big\}.$$

$$\prod_r \varepsilon(r,X_{r-},X_r) \quad ,$$

où

$$\varepsilon(r,X_{r-},X_r) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{r-} = X_r \\ d_K(r,y,X_{r-}) & \text{si } (X_r-X_{r-})(\mathbb{R}^d) = (X_r-X_{r-})\{y\} = K-1 \neq 0 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\varepsilon(r) = \varepsilon(r,X_{r-},X_r)$,

$$\int_s^t dX_r \text{ et } \sum_{r\leqslant t} (\varepsilon(r)-1) + \int_s^t (\rho\, q_1(d_1-1))^+ (X_r)\,dr .$$

sont $P_{s,e}$-martingales. Soit Z_t l'unique solution de

$$Z_t = 1 + \int_s^{t+} Z_{r-} \langle b,a^{-1}\rangle (X_r)\,dX_r +$$

$$+ \sum_{r\leqslant t} Z_{r-}(\varepsilon(r)-1) + \int_s^t Z_{r-}(\rho\, q_1(d_1-1))^+ (X_r)\,dr .$$

Alors Z_t est égal à la formule du théorème.

De plus, on a par la formule d'Itô pour $f \in \mathcal{C}^2_b\ (\mathbb{R}^p)$

$$Z_t f(X_t) = f(e) + \int_s^{t+} Z_{r-}\, f(X_r)\, \langle b, a^{-1}\rangle (X_r)\, dX_r +$$

$$+ \int_s^{t+} Z_{r-}\, \nabla f(X_r)\, dX_r + \int_s^t Z_{r-}\, L^b f(X_r)\, dr$$

$$+ \int_s^t Z_{r-}\left[f(X_{r-})\,(\rho\, q_1 (d_1 - 1))^+ (X_r) + F^d f(X_r) - \rho^+(X_r) f(X_r)\right] dr$$

$$+ \sum_{r \leqslant t} Z_{r-}\,(f(X_r)\,\varepsilon(r) - f(X_{r-}))$$

$$- \int_s^t Z_{r-}\,(F^d f(X_r) - \rho^+(X_r) f(X_r))\, dr$$

où $\qquad F^d f = K^d f - \rho q_1 d_1 f$.

Ça montre, que $ZdP_{1,e}$ est une solution du problème de martingale par rapport à $(L^b + K^d)$, d'où avec l'unicité du théorème 2. $dP^{b,d}_{s,e} = ZdP_{s,e}$ sur $\mathcal{M}^t_s$.

L'intégrabilité de Z_t, pour $t < \infty$, se montre comme dans [4].

Notons le processus de saut, qui appartient à notre modèle par

$$\mu(\omega, dt \times d(e,e')) = \sum_{\substack{r \\ X_r \neq X_{r-}}} \delta_{(r, X_{r-}, X_r)}\, (dt \times d(e,e'))$$

Sa projection prévisible duale par rapport à $P^{b,d}_{s,e}$ est

$$\nu_d(\omega, dt \times d(e,e')) = \Big(\sum_{K \neq 1} (\rho q_K d_K)(t, ., X_{t-})\, dt\, \delta_{X_{t-}}(de)\, \delta_{X_{t-} + (K-1)\delta_{\{.\}}}(de')\Big)^+ (X_{t-})$$

Ceci nous permet d'écrire nos martingales fondamentales, $f \in \mathscr{C}^2_b$:

$$f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t (L^b + K^d) f(X_r)\, dr =$$

$$\int_s^{t+} \nabla f(X_r)\, (dX_r - b(X_r)\, dr) + \int_{]s,t] \times E^2} (f(e') - f(e))\,(\mu - \nu_d)\,(dr \times d(e,e'))$$

Une consequence de l'unicité du problème de martingales est que une telle représentation est possible pour toutes $(\mathcal{M}_s^t)$-martingales.

<u>Théorème 4</u> :

Soit (q_t) une martingale par rapport à $P_{s,e}^{b,d}$, de carré localement intégrable. Alors, il existe un processus prévisible $g(t,y,\omega) \in \mathbb{R}^p$ [c.a.d. $\mathcal{P} \times \mathcal{L}(R^p)$ - mesurable] tel que le processus croissant

$$\int_s^{\cdot} \langle g,a,g\rangle^+ (r,\omega)\, dr \text{ soit localement intégrable ,}$$

et un processus prévisible $h(t,e,e',\omega) \in \mathbb{R}$ [c.a.d. $\mathcal{P} \times \mathcal{L}(E^2)$ -mesurable] tel que

$$\int_s^{\cdot} \int_{E^2} h^2(r,e,e')\, \nu_d(dr \times d(e,e')) \text{ soit localement intégrable ,}$$

et

$$q_t - q_s = \int_s^{t^+} g(r,\omega)\,(dX_r - b(X_r)dr) + \int_{]s,t]\times E^2} h(r,e,e')\,(\mu-\nu_d)\,(dr \times d(e,e'))$$

$$P_{s,e}^{b,d} \text{ - p.s.}$$

Comme la démonstration du théorème 4 est parfaitement analogue à celle du théorème 2 en [4], nous l'omettons ici.

IV <u>UN PROBLEME DE CONTROLE</u>

Sur un interval fini $[0,T]$, $T < \infty$, nous nous posons le problème suivant de contrôle :

(H2)

Soient a, ρ et q_K comme dans (H1).

Soit U l'espace de contrôle , compact avec la métrique π.

Sur F x U on a les fonctions mesurables, bornées suivantes, les quelles sont supposées <u>continues</u> en U.

$b(t,y,e,u) \in \mathbb{R}^p$, $0 \leq \ell(t,y,e,u) \in \mathbb{R}^+$ et

$0 \leq d_K(t,y,e,u) \qquad K = 0,2,\ldots,K_o$.

Comme ci-dessus, on met $d_1 = \sum_{k \neq 1} q_K \, d_K$.

Alors le problème est de trouver une fonction mésurable $v(t,e) \in U$, qui minimise la fonctionnelle

$$V_{s,e}(v) = E^v_{s,e} \left(\int_s^T \ell^+(X_r, v(r,X_r))\, dr \right) \rightarrow \min! ,$$

où $E^v_{s,e}$ est l'espérance par rapport a $P^v_{s,e} = P^{b_v,d_v}_{s,e}$

avec $b_v(t,y,e) = b_v(t,y,e,v(t,e))$ et

$d_{K,v}(t,y,e) = d_{K,v}(t,y,e,v(t,e))$.

Pour la solution de ce problème on a besoin d'une série de définitions et de propositions. Mais comme la méthode est - cum grano salis - la même comme en [4] nous ne donnons pas de détails ici.

Soit λ' la mesure de référence de la proposition 1. Nous définissons la mesure λ sur F par la condition suivante :

Si A est une partie mesurable de F, telle que la projection pr: $F \rightarrow \mathbb{R}^+ \times E$ soit bijective sur A, alors $\lambda(A) = \lambda'(pr(A))$.

Nous donnons à l'espace de Banach $L^\infty(\lambda)$ des classes de fonctions réelles λ-essentiellement bornées sur F la topologie $*$-faible $\sigma(L^\infty(\lambda), L^1(\lambda))$.

De plus, notons par L^2_{loc} l'espace de processus optionnels (Z_t) sur $(\Omega, \mathcal{M}^t_s, P_{s,e})$ avec les semi-normes

$$||Z||_K = \sup_{s\leq t\leq T} E[Z^2_{t\wedge\tau_K}]^{1/2}$$

$\mathcal{M}^2_{loc}$, l'espace des martingales de carré localement intégrable est un sous-espace fermé de L^2_{loc} . Sur $\mathcal{M}^2_{loc}$ nous regardons aussi la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}^2_{loc}, \mathcal{M}^2_{loc})$, engendrée par les fonctionelles

$$g \to E(g_{T\wedge\tau_K}\ h_{T\wedge\tau_K}) \qquad h \in \mathcal{M}^2_{loc}$$

Soit $\mathcal{W} = \{(\ell,b,(d_K)) \in L^\infty(\lambda) \times (L^\infty(\lambda))^p \times (L^\infty(\lambda))^{K_0}\ ;\ \ell \geq 0,\ d_K \geq 0\}$.

avec la topologie $*$-faible dans chaque coordonée.

Alors on a comme en [4]:

<u>Proposition 2</u> :

Les fonctions suivantes sont bien définies et continues dans les topologies indiquées :

(i) $(L^\infty(\lambda)$, top.$*$-faible$) \longrightarrow (L^2_{loc}, ||\ ||_K)$

$$\ell \longrightarrow \left(\int_s^t \ell^+(X_r)dr\right)_{t\leq T}$$

(ii) $((L^\infty(\lambda))^p \times (L^\infty(\lambda))^{K_0}$, top.$*$-faible$) \to (\mathcal{M}^2_{loc}, \sigma(\mathcal{M}^2_{loc}, \mathcal{M}^2_{loc}))$

$$(b,d) \longrightarrow dP^{b,d}_{s,e} / dP_{se}\big|_{\mathcal{M}^t_s}$$

(iii) pour tout i

$$(\mathcal{W}, \text{ top.}*\text{-faible}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\ell,b,d) \longrightarrow E^{bd}_{s,e}\left(\int_s^{T\wedge\tau_i} \ell^+(X_r)dr\right)$$

<u>Corollaire</u> :

La fonction

$$W_{s,e} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$W_{s,e}(\ell,b,d) = E^{bd}_{se}\left(\int_s^T \ell^+(X_r)dr\right) < \infty$$

est bien définie et semi-continue inférieurement.

Si nous donnons à l'espace $\mathcal{V}$ des fonctions λ'-mesurables $v : [0,T] \times E \longrightarrow U$ la métrique

$$\pi_{\lambda'}(v,v') = \inf\{\alpha>0, \lambda'\{(t,e)\ \pi(v(t,e),v'(t,e)) > \alpha\} = 0\},$$

alors $(\mathcal{V}, \pi_{\lambda'})$ est un espace compact metrisable (voir Theorem A3 dans [4]). On en déduit avec le corollaire:

<u>Proposition 3</u> :

(i) La fonction
$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{V}, \pi_{\lambda}) & \longrightarrow & (\mathcal{W}, \text{top.}*\text{-faible}) \\ v & \longrightarrow & (\ell_v, b_v, d_v) \end{array}$$
est continue.

(ii) La fonction $V_{s,e} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie et semi-continue inférieurement.

D'où :

<u>Théorème 5</u> :

Le problème de contrôle (H2) a une solution optimale $v^* \in \mathcal{V}$:
$$V_{s,e}(v^*) = \inf\{V_{s,e}(v),\ v \in \mathcal{V}\}.$$

Pour arriver à une condition nécessaire et suffisante pour le contrôle optimal, on remarque d'abord, que

$$V(t,X_t,v) + \int_s^t |\ell|(X_r)\,dr$$

est une martingale de carré localement intégrable, dont les sauts sont égaux à

$$V(\tau_i-, X_{\tau_i}, v) - V(\tau_i-, X_{\tau_i-}, v)$$

Le théorème 4 nous fournit d'un processus prévisible $g_v(t,y,\omega) \in \mathbb{R}^p$, tel que $P^v_{s,e}$ - p.s.

$$V(t,X_t,v) - V(s,e,v) + \int_s^t \ell^+(X_r)\,dr = \int_s^{t_+} g_v(r,\omega)\,(dX_r - b_v(X_r)) + \int_{]s,t]\times E^2} (V(r,e'',v) - V(r,e',v))\,(\mu - \nu_v)(dr \times d(e',e''))$$

De plus, la representation

$$E^{v}_{s,e}\Big[(V(t\wedge\tau_i, X_{t\wedge\tau_i}, v) + \int_s^{t\wedge\tau_i} \ell^{+}(X_r)dr) (\int_s^{t\wedge\tau_i} 1_A(r,X_r)(dX_r - b_v(X_r)dr)) \Big] =$$

$$= E^{v}_{s,e} \Big[\int_s^{t\wedge\tau_i} 1_A(r,X_r) \; \langle g_v, a g_v\rangle^{+} \; (X_r)dr \Big]$$

pour tout i et tout $A \in \mathcal{L}([0,T] \times E)$, montre qu'il a une fonction $g_v : F \to \mathbb{R}^{+}$, λ-mesurable, telle que

$$g_v(t,y,\omega) = g_v(t,y,X_{t-}) \; . \qquad dt \times dP^{v}_{s,e} \text{ - p.s.}$$

<u>Théorème 6</u> :

$v^{*} \in \mathcal{V}$ est une solution optimale pour le problème (H2) et tous points initiaux $(s,e) \in [0,T] \times E$, si et seulement si pour λ' presque tout $(s,e) \in [0,T] \times E$ on a

$$\ell^{+}_{v^*}(s,e) + \langle g_{v^*}, b_{v^*}\rangle \; (s,e) + \Big(\sum_{k=o}^{K_o} \tilde{V}_{v^*,K} \; \rho \; q_K d_{v^*K}\Big)^{+} \; (s,e)$$

$$= \min_{u\in U} \{\ell^{+}_u(s,e) + \langle g_{v^*}, b_u\rangle \; (s,e) + \Big(\sum_{k=o}^{K_o} \tilde{V}_{v^*K} \; \rho \; q_K d_{uK}\Big)^{+}(s,e)$$

où $\tilde{V}_{v^*K}(t,y,e) = V_{v^*}(t,e + (K-1)\delta_{\{y\}})$ sur F.

<u>Démonstration</u> :

Pour $v^{*} \in \mathcal{V}$, regardons la fonction, $(\lambda') \otimes \mathcal{L}(U)$-mesurable

$$h_{v^*}(s,e,u) = \ell^{+}(s,e,u) + \langle g_{v^*}, b_u\rangle (s,e) + \Big(\sum_{k=o}^{K_o} \tilde{V}_{v^*} \; \rho \; q_K d_{uK}\Big)^{+}(s,e)$$

qui est continue en u. Alors, par le théorème A2 de l'appendice de [4], on trouve $w \in \mathcal{V}$ tel que

$$h_{V^*}(s,e,w(s,e)) = \inf_{u \in U} h_{V^*}(s,e,u) \leqslant h_{V^*}(s,e,v^*(s,e))$$

avec l'égalité λ'-presque partout si et seulement si la condition du théorème est satisfaite. On a $P_{s,e}$ - p.s.

$$V_{V^*}(t,X_t) = V_{V^*}(s,e) + \int_s^{t+} g_{V^*}(X_r)dX_r +$$

$$+ \int_{]o,t]\times E^2} (V_{V^*}(r,e") - V_{V^*}(r,e'))\mu(dr \times d(e',e"))$$

$$- \int_s^t h_{V^*}(r,X_r,V^*(r,X_r))dr$$

$$= V_{V^*}(s,e) - \int_s^t \ell_w^+(X_r)dr + \int_s^{t+} g_{V^*}(X_r)(dX_r - b_w(X_r)dr)$$

$$+ \int_{]o,t]\times E^2} (V_{V^*}(r,e") - V_{V^*}(r,e'))(\mu-\nu_w)(dr \times d(e',e"))$$

$$+ \int_s^t [h_{V^*}(r,X_r,w(r,X_r)) - h_{V^*}(r,X_r,V^*(r,X_r))]dr.$$

En appliquant $E^w_{s,e}$ pour $t = T$, nous deduisons

$$0 = V_{V^*}(s,e) - V_w(s,e) + E^w_{s,e}\left[\int_s^t h_{V^*}(r,X_r,w) - h_{V^*}(r,X_r,v^*)\, dr\right]$$

d'où suit l'optimalité de v^* pour tout $(s,e) \in [0,T] \times E$ si et seulement si on a λ'-presque partout l'égalité ci-dessus.

REFERENCES

[1] Bismut, J.M. Théorie probabiliste du contrôle des diffusions. Mem.Amer.Math.Soc. 163, Providence 1976.

[2] Bismut, J.M. Control of Jump Processes and Applications. Bull.Soc.Math.France 106, 25-60 (1978).

[3] Eisele, Th. A Non-Linear Martingale Problem. A paraître dans : Proceedings of the Conference on Stochastic Differential Equations and Stochastic Control Theory at Bonn, 1979.

[4] Eisele, Th. Transformation and Control of Branching Diffusions. (à paraître).

[5] Ikedo, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S. Branching Markov Processes I - III. J.Math.Kyoto Univ. 8, 233-278 and 365-410 (1968) ; 9, 95-160 (1969).

[6] Stroock, D.W. Diffusion Processes Associated with Levy Generators. Z.Wahrscheimlichkeits theorie verw. Gib. 32, 209-244 (1975).

[7] Stroock, D.W. and Varadhan, S.R.S. Diffusion Processes with Continuous Coefficients I,II. Comm.Pure Appl.Math. 22, 345-400 and 479-530 (1969).

[8] Stroock, D.W. and Varadhan, S.R.S. Multidimensional Diffusion Processes. Grundlehren d.Math.Wiss. 233, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.