ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. LEDOUX

Loi du logarithme itéré et types ϕ d'espaces de Banach

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 207-220

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_207_0>

LOI DU LOGARITHME ITERE ET TYPES ϕ D'ESPACES DE BANACH

M. LEDOUX

Université de STRASBOURG

RESUME

Sous les conditions classiques de moments pour une variable aléatoire X à valeurs dans un espace de Banach : $E\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$, nous examinons les liens entre loi du logarithme itéré et types ϕ d'espaces de Banach.

ABSTRACT

Under the classical moments conditions for a Banach space valued random variable X : $E\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$, we examine the relationschips between law of the iterated logarithm and types ϕ of Banach spaces.

I - INTRODUCTION

Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach réel séparable muni de sa tribu borélienne B et soit X une variable aléatoire (v.a.) centrée à valeurs dans E ; si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de copies indépendantes de X, on note pour tout entier n :

$$S_n(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

et $a_n = \sqrt{2n\, L_2\, n}$ où L_2 désigne la fonction sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, définie par :

$$L_2(t) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, t) \qquad \text{si } t \geq e^e$$

$$L_2(t) = 1 \qquad \text{si } 0 \leq t \leq e^e$$

On dit alors que :

1) X vérifie la loi du logarithme itéré bornée (que l'on notera dorénavant $X \in$ LLI B) si et seulement si :

$$P\{ \sup_{n\geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n} < \infty \} = 1,$$

2) X vérifie la loi du logarithme itéré compacte ($X \in$ LLI C) si et seulement si :

$$P\{ (\frac{S_n(X)}{a_n}, n \geq 1) \text{ est relativement compacte dans } E\} = 1.$$

Clairement : $X \in$ LLI C $\Longrightarrow X \in$ LLIB, mais la réciproque est fausse.

On dit que E est un espace de Banach de type $p(1 \leq p \leq 2)$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$\forall n \geq 1$, $\forall (Y_1, \ldots, Y_n)$ v.a. indépendantes et symétriques à valeurs dans E telles que : $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $E\{||Y_i||^p\} < \infty$, on ait :

$$E\{||\sum_{i=1}^{n} Y_i||^p\} \leq C \sum_{i=1}^{n} E\{||Y_i||^p\} .$$

D'après J.T. Lapresté ([3]), si ϕ est une fonction sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives, convexe, strictement croissante, continue, $\phi(0) = 0$ (i.e. ϕ est une fonction de Young), telle que de plus il existe $\beta > 1$ avec

$\sup_{t>0} \frac{\phi(\beta t)}{\phi(t)} < \infty$, il est naturel d'étendre la définition précédente de type p, qui est liée à la fonction puissance $\phi(t) = t^p$, au type ϕ , où ϕ est une fonction quelconque du genre décrit précédemment, en posant :

E est de type ϕ s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$\forall n \geq 1$, $\forall (Y_1, \ldots, Y_n)$ v.a. indépendantes et symétriques à valeur dans E telles que : $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, $E\{\phi(||Y_i||)\} < \infty$, on ait :

$$E\{\phi(||\sum_{i=1}^{n} Y_i||)\} \leq C \sum_{i=1}^{n} E\{\phi(||Y_i||)\} .$$

Nous aurons besoin du résultat suivant :

soient $L^{\phi}(E)$ et $l^{\phi}(E)$ les espaces d'Orlicz associés à ϕ et E munis de leurs normes respectives :

- Si X est une v.a. à valeurs dans E :

$$||X||_{L^{\phi}(E)} = \inf \{a > 0 : E\{ \phi(\frac{||X||}{a})\} \leq 1\}$$

- Si $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$:

$$||x||_{l^{\phi}(E)} = \inf \{a > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} \phi(\frac{||x_i||}{a}) \leq 1\} .$$

On suppose qu'il existe deux constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ telles que, pour tout $X \in L^{\phi}(E)$ et tout $x = (x_i)_{i \geq 1} \in l^{\phi}(E)$:

$$\gamma_1 \ E \{\phi(||X||)\} \leq \phi(||X||_{L^{\phi}(E)}) \leq \gamma_2 \ E\{\phi(||X||)\} ,$$

$$\gamma_1 \sum_{i=1}^{\infty} \phi(||x_i||) \leq \phi(||x||_{l^{\phi}(E)}) \leq \gamma_2 \sum_{i=1}^{\infty} \phi(||x_i||).$$

On a alors la proposition :

<u>Proposition</u> : Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) E est de type ϕ,

b) il existe une constante $C > 0$ telle que : $\forall n \geq 1$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in E$:

$$||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i||_{L^{\phi}(E)} \leq C \ ||(x_i)_{1 \leq i \leq n}||_{l^{\phi}(E)} ,$$

où $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ désigne une suite de v.a. de Rademacher (i.e. $P\{\varepsilon_i = 1\} = P\{\varepsilon_i = -1\} = \frac{1}{2}$) indépendantes,

c) pour tout $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$ tel que $||x||_{l^{\phi}(E)} < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ converge presque sûrement (p.s.).

Démonstration :

b) $\Longrightarrow$ a) : Soient $n \geq 1$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ des v.a. indépendantes et symétriques telles que : $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ E\{\phi(\|Y_i\|)\} < \infty$.

Soit $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ une suite de Rademacher, indépendante de $(Y_i)_{i \geq 1}$; par symétrie :

$$E\{\phi(\|\sum_{i=1}^n Y_i\|)\} = E\{\phi(\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i Y_i\|)\} \quad ;$$

si $P_{(Y_1,\dots,Y_n)}$ désigne la loi du n-uplet $(Y_1,\dots,Y_n)$, on a :

$$E\{\phi(\|\sum_{i=1}^n Y_i\|)\} = \int_{E^n} E\{\phi(\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i\|)\}\, dP_{(Y_1,\dots,Y_n)}(y_1,\dots,y_n)$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1}\int_{E^n} \phi(\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i\|_{L^\phi(E)})\, dP_{(Y_1,\dots,Y_n)}(y_1,\dots,y_n)$$

$$\leq \frac{1}{\gamma_1}\int_{E^n} \phi(C\|(y_i)_{1\leq i\leq n}\|_{l^\phi(E)})\, dP_{(Y_1,\dots,Y_n)}(y_1,\dots,y_n)$$

$$\leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\int_{E^n} (\sum_{i=1}^n \phi(C\|y_i\|))\, dP_{(Y_1,\dots,Y_n)}(y_1,\dots,y_n)$$

$$\leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\sum_{i=1}^n E\{\phi(C\|Y_i\|)\} \ .$$

d'où : $E\{\phi(\|\sum_{i=1}^n Y_i\|)\} \leq \dfrac{\gamma_2 C'}{\gamma_1}\sum_{i=1}^n E\{\phi(\|Y_i\|)\}$,

où $C' > 0$ est une constante provenant du fait que $\sup_{t>0} \dfrac{\phi(\beta t)}{\phi(t)} < \infty$; ce qui prouve que E est de type ϕ .

c) $\Longrightarrow$ b) : On définit :

$F = \{\, x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E : \|x\|_{l^\phi(E)} < \infty \,\}$

$$G = \{x(x_i)_{i \geq 1} \subset E : \sup_{n\geq 1} ||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i||_{L^{\phi}(E)} < \infty\}$$

F et G sont des espaces de Banach.

Soit $x \in F$: $||x||_{l^{\phi}(E)} < \infty$; par hypothèse $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \, x_i$ converge p.s. et

comme $\sup_{t>0} \dfrac{\phi(\beta t)}{\phi(t)} < \infty$ pour un $\beta > 1$, par un théorème de J. Hoffmann-Jørgensen ([1], II théorème 5.5), on a :

$$\sup_{n\geq 1} E\{\phi(||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i||)\} < \infty \quad ;$$

donc :

$$\sup_{n\geq 1} ||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i||_{L^{\phi}(E)} < \infty \quad ,$$

(car, $\forall X \in L^{\phi}(E)$: $||X||_{L^{\phi}(E)} \leq \sup(1, E\{\phi(||X||)\}))$;

d'où : $F \subset G$, et par le théorème du graphe fermé, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E : \sup_{n\geq 1} ||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i||_{L^{\phi}(E)} \leq C||x||_{l^{\phi}(E)},$$

ce qui implique b).

a) $\Longrightarrow$ c) : Soit $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$ tel que $||x||_{l^{\phi}(E)} < \infty$;

il existe alors $a > 0$ tel que : $\sum_{i=1}^{\infty} \phi(\dfrac{||x_i||}{a}) \leq 1$.

Les v.a. $Y_i = \frac{1}{a} \varepsilon_i \, x_i$, $i \geq 1$, sont indépendantes et symétriques ; par suite, si C désigne la constante liée au type, on a :

$$\forall m, n \geq 1 \quad : E\{\phi(\frac{1}{a} ||\sum_{i=m}^{n} \varepsilon_i \, x_i||)\} \leq C \sum_{i=m}^{n} \phi(\frac{||x_i||}{a}) \quad ;$$

donc puisque la série : $\sum_{i=1}^{\infty} \phi(\dfrac{||x_i||}{a})$ converge, la suite $(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, x_i)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^{\phi}(E)$, donc converge dans $L^{\phi}(E)$ et également dans $L'(E)$ puisque $L'(E) \supset L^{\phi}(E)$; la série $\sum_{i=1} \varepsilon_i \, x_i$ converge alors en probabilité donc p.s. par les propriétés des séries de v.a. indépendantes à valeurs dans un espace de Banach ; d'où c).

II - RELATIONS ENTRE LOI DU LOGARITHME ITERE ET TYPES ϕ D'ESPACES DE BANACH

Une variable aléatoire réelle X vérifiant les conditions classiques de moments : $E\{X\} = 0$, $E\{|X|^2\} < \infty$ satisfait à la loi du logarithme itéré (bornée ou compacte car ces deux notions coïncident dans $\mathbb{R}$). Dans le cas où X prend ses valeurs dans un espace de Banach, ces conditions ne sont en général pas suffisantes ; néanmoins G. Pisier ([4]) a montré qu'elles suffisent dans un espace de Banach de type 2. Réciproquement il a établi qu'un espace de Banach dans lequel toute v.a. centrée, de norme au carré intégrable, vérifie la loi du logarithme itéré (bornée), est de type p pour tout $p < 2$.

On se propose de préciser ces liens entre loi du logarithme itéré et types d'espaces de Banach en termes de types ϕ :

Soit ϕ_α, $\alpha > 0$ une fonction de Young telle que :

$$\lim_{t\to\infty} \quad [\, t^{-2}(L_2 t)^\alpha \,] \quad \phi_\alpha(t) = 1$$

Nous avons défini un comportement à l'infini de la fonction ϕ_α, il faut également lui en définir un à l'origine : de la même façon que pour $\phi(t) = t^p$ $(p > 0)$ où l'on a :

$$t > 0 : \quad \phi\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^p = \frac{1}{t^p} = \frac{1}{\phi(t)} \quad ,$$

on posera :

$$\lim_{t\to\infty} \quad \phi_\alpha\left(\frac{1}{t}\right)\, \phi_\alpha(t) = 1.$$

On a alors les théorèmes suivants :

<u>Théorème 1</u> : Si X est une v.a. à valeurs dans un espace de Banach de type ϕ_1, telle que : $E\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$, alors $X \in \mathrm{LLIB}$;

Théorème 2 : Si X est une v.a. à valeurs dans un espace de Banach de type ϕ_α ($\alpha \in]0,1[$), telle que : $E\{X\}=0$, $E\{||X||^2\} < \infty$, alors X LLIC.

Ces deux théorèmes sont des corollaires immédiats d'un théorème de J. Kuelbs ([2], théorème 4.1) que l'on rappelle ici :

Théorème (Kuelbs) :

Soit X une v.a. à valeurs dans E, $E\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$;

$$X \in \text{LLIB} \Longleftrightarrow \sup_{n\geq 1} E\left\{\frac{||S_n(X)||}{a_n}\right\} < \infty ,$$

$$X \in \text{LLIC} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{||S_n(X)||}{a_n}\right\} = 0$$

$$\left(\Longleftrightarrow \frac{S_n(X)}{a_n} \to 0 \text{ en probabilité}\right).$$

Démonstration du théorème 1 :

(La démonstration du théorème 2 est tout à fait identique) ;

Soit X' une copie indépendante de X ; on note C la constante liée au type.

Par l'inégalité de Jensen (utilisée deux fois) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} E\{||S_n(X)||\} &= \frac{1}{a_n} E\{||\sum_{i=1}^n X_i||\} \\
&\leq \frac{1}{a_n} E\{||\sum_{i=1}^n (X_i - X_i')||\} \\
&\leq \frac{1}{a_n} E\{\phi_1^{-1}[\phi_1(||\sum_{i=1}^n (X_i - X_i')||)]\} \\
&\leq \frac{1}{a_n} \phi_1^{-1}(E\{\phi_1(||\sum_{i=1}^n (X_i - X_i')||)\}) \\
&\leq \frac{1}{a_n} \phi_1^{-1}(C \sum_{i=1}^n E\{\phi_1(||X_i - X_i'||)\}) \\
&\leq \frac{1}{a_n} \phi_1^{-1}(C\, n\, E\{\phi_1(2||X||)\})
\end{aligned}$$

d'où : $\sup\limits_{n\geq 1} \quad E\,\{\dfrac{||S_n(X)||}{a_n}\} < \infty$ puisque $\phi_1^{-1}\,(n)$

est équivalent, quand n tend vers l'infini, à $\sqrt{n\ L_2\ n}$; par suite $X \in$ LLI B par le théorème de J. Kuelbs rappelé ci-dessus.

Nous concluons avec un théorème lié à une forme de réciproque des théorèmes 1 et 2 :

Théorème 3 : Soit E un espace de Banach dans lequel toute v.a. X, $E\,\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$ vérifie la loi du logarithme itéré (bornée) ; alors E est de type ϕ_α pour tout $\alpha > 1$.

Démonstration :

Nous savons (voir [4]) que si X vérifie la loi du logarithme itéré borné, alors :

$$E\,\{\sup_{n\geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n}\} < \infty$$

Puisque par hypothèse $E\{||X||^2\} < \infty$, par le théorème du graphe fermé, il existe une constante $C' > 0$ telle que :

pour toute v.a. X à valeurs dans E, $E\,\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$, on a :

$$E\ \{\sup_{n\geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n}\} \leq C'(E\{||X||^2\})^{1/2} \quad .$$

Un résultat de G. Pisier ([4], Proposition 5.1) nous montre alors que :

$\forall n \geq 1$, $\forall x_1,\dots x_n \in E$:

$$E\,\{||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ x_i||\} \leq 2\ C'\ \sqrt{2L_2 n}\ (\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2)^{1/2}$$

$$\leq C\ \sqrt{L_2 n}\ (\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2)^{1/2} \ ,$$

où $C = 2\sqrt{2}C'$ et $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ désigne une suite de Rademacher.

Soit $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par :

$$b_0 = 1, \qquad b_k = e^{e^{2^k}} \quad (k \geq 1) \ ;$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$ on pose :

$$A_k^n = \{1 \leq j \leq n : \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha(||x_i||)}{b_{k+1}}\right) \leq ||x_j|| < \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha(||x_i||)}{b_k}\right)\} ,$$

et on note : $|A_k^n| = \text{Card}\,(A_k^n)$. Alors :

$$E\{||\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i||\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} E\{||\sum_{j \in A_k^n} \varepsilon_j x_j||\}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{L_2 |A_k^n|} \left(\sum_{j \in A_k^n} ||x_j||^2\right)^{1/2}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{|A_k^n| \ L_2 \ |A_k^n|} \ \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha(||x_i||)}{b_k}\right) ;$$

Or : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \phi_\alpha(||x_i||) \geq \sum_{j \in A_k^n} \phi_\alpha(||x_j||) \geq \frac{|A_k^n|}{b_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^n \phi_\alpha(||x_i||)\right)$

d'où : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq 1 , \ |A_k^n| \leq b_{k+1}$.

Ainsi :

$$E\{||\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i||\} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_{k+1} L_2(b_{k+1})} \ \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \phi_\alpha(||x_i||)}{b_k}\right),$$

et ceci pour tout $n \geq 1$ et tous $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Soit $x = (x_i)_{i \geq 1} \subset E$ tel que : $||x||_{l^\phi(E)} < \infty$; il existe donc $a > 0$

tel que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_\alpha\left(\frac{||x_i||}{a}\right) \leq 1 .$$

D'où, pour tous m,n ≥ 1 :

$$E\{\|\sum_{i=m}^{n} \varepsilon_i x_i\|\} \leq a\, C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_{k+1}\, L_2(b_{k+1})}\ \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\sum_{i=m}^{n} \phi_\alpha\left(\frac{\|x_i\|}{a}\right)}{b_k}\right),$$

et puisque $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_\alpha\left(\frac{\|x_i\|}{a}\right) \leq 1$:

$$\forall \varepsilon \in]0,1],\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall m,n \geq N :\ \sum_{i=m}^{n} \phi_\alpha\left(\frac{\|x_i\|}{a}\right) \leq \varepsilon.$$

Donc, pour m,n $\geq$ N :

$$E\{\|\sum_{i=m}^{n} \varepsilon_i x_i\|\} \leq a\, C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{b_{k+1}\, L_2(b_{k+1})}\ \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{b_k}\right).$$

Puisque $\lim_{t\to\infty} \frac{t^2/(L_2 t)^\alpha}{\phi_\alpha(t)} = 1$, il existe une constante $D > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ (indépendants de ε) tels que :

$$\forall k \geq k_0 :\ \phi_\alpha^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{b_k}\right) \leq \frac{D}{\sqrt{\frac{b_k}{\varepsilon}\left(L_2\left(\frac{b_k}{\varepsilon}\right)\right)^\alpha}} \leq \frac{D\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{b_k\,(L_2(b_k))^\alpha}}$$

d'où : $E\{\|\sum_{i=m}^{n} \varepsilon_i x_i\|\} \leq \sqrt{\varepsilon}\ a\, C\, D' \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \sqrt{\frac{L_2(b_{k+1})}{(L_2(b_k))^\alpha}} + K'\right)$

où D' et K' sont des constantes ; enfin puisque $\alpha > 1$, la série entre parenthèses converge et il existe donc une constante $K > 0$ telle que :

$\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall m,n \geq N$:

$$E\{\|\sum_{i=m}^{n} \varepsilon_i x_i\|\} \leq K\sqrt{\varepsilon},$$

donc $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ converge dans L'(E), donc en probabilité, donc p.s. par les propriétés des séries de v.a. indépendantes. Par la proposition de l'introduction, E est de type ϕ_α pour tout $\alpha > 1$.

Remarque :

On peut dresser un parallèle entre théorème central limite (TCL) et loi du logarithme itéré bornée sous la forme du tableau suivant :

TCL	LLI B
1. Si X est à valeurs dans un espace de Hilbert : $X \in TCL \Longleftrightarrow E\{X\} = 0, E\{\|\|X\|\|^2\} < \infty$	1' Si X est à valeurs dans un espace de Hilbert : $X \in LLI\ B \Longleftrightarrow E\{X\} = 0,$ $\forall \xi \in E' : E\{\langle X,\xi\rangle^2\} < \infty,$ et $E\{\frac{\|\|X\|\|^2}{L_2\|\|X\|\|}\} < \infty.$
2. Si X est à valeurs dans un espace de Banach de type 2 et si $E\{X\} = 0$, $E\{\|\|X\|\|^2\} < \infty$, alors $X \in TCL$.	2' (Si X est à valeurs dans un espace de Banach de type ϕ_1 et si $E\{X\} = 0, \forall \xi \in E' : E\{\langle X,\xi\rangle^2\} < \infty,$ et $E\{\frac{\|\|X\|\|^2}{L_2\|\|X\|\|}\} < \infty$ alors $X \in LLI\ B$).
3. Un espace de Banach dans lequel toute v.a. X : $E\{X\} = 0$, $E\{\|\|X\|\|^2\} < \infty$ vérifie le théorème central limite, est de type 2.	3' Un espace de Banach dans lequel toute v.a. X : $E\{X\} = 0$, $\forall \xi \in E' : E\{\langle X,\xi\rangle^2\} < \infty$ et $E\{\frac{\|\|X\|\|^2}{L_2\|\|X\|\|}\} < \infty$ vérifie la loi du logarithme itéré bornée, est de type ϕ_1.

Le résultat 1 est classique. Les points 2 et 3, classiques également, peuvent se trouver dans G. Pisier ([4]) et caractérisent les espaces de Banach dans lesquels les conditions de moments : $E\{X\} = 0$, $E\{||X||^2\} < \infty$ sont suffisantes pour que X vérifie le théorème central limite : ce sont les espaces de Banach de type 2.

Le résultat 1' est un théorème récent de Kuelbs, Zinn et Goodman ([5]).Le point 3' se démontre facilement ; donnons quelques éléments de démonstration :

Si X $\in$ LLI B : $E\{\sup_{n\geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n}\} < \infty$;

comme par hypothèse $||X||_{L^{\phi_1}(E)} < \infty$, par le théorème du graphe fermé il existe une constante C > 0 telle que :

$$E\{\sup_{n\geq 1} \frac{||S_n(X)||}{a_n}\} \leq C\ ||X||_{L^{\phi_1}(E)}$$

$$\leq C\ \phi_1^{-1}(\gamma_2\ E\{\phi_1(||X||)\}).$$

Soient $n \geq 1$ et $x_1,\ldots, x_n \in E$; on note S_x la mesure de Dirac au point $x \in E$.

Si X est de loi $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (S_{x_i} + S_{-x_i})$:

$$E\{\phi_1(||X||)\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_1(||x_i||).$$

En recopiant alors les arguments de la proposition 5.1 de G. Pisier ([4]) déjà rappelée précédemment, on a :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x_1,\ldots, x_n \in E :$$

$$E\{||\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ x_i||\} \leq 2a_n\ C\ \phi_1^{-1}\ (\gamma_2\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_1(||x_i||)).$$

Puisque $\phi_1^{-1}(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{\phi_1^{-1}(n)} \sim \frac{1}{\sqrt{nL_2 n}}$ $(n \to \infty)$, on montre, avec des arguments maintenant classiques, que si $x = (x_i)_{i\geq 1} \subset E$ est tel que $||x||_{l^{\phi_1}(E)} < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i\ x_i$ converge dans L'(E) donc p.s. On conclut alors, avec la proposition de l'introduction que E est de type ϕ_1.

Reste le point 2' qui est entre parenthèses car à l'état de conjecture : on peut en effet espérer que le théorème de J. Kuelbs rappelé précédemment puisse en fait s'énoncer de la manière suivante :

Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de Banach telle que :

$$E\{X\} = 0, \quad \forall \xi \in E' : E\{\langle X,\xi\rangle\}^2 < \infty \quad \text{et } E\{\frac{||X||^2}{L_2||X||}\} < \infty \quad ;$$

$$\text{alors : } X \in LLI\ B \Longleftrightarrow \sup_{n \geq 1} E\ \{\frac{||S_n(X)||}{a_n}\} < \infty \quad .$$

Si un tel résultat s'évérait vérifié, la démonstration de notre théorème 1 aurait le point 2' comme corollaire immédiat ; 2' et 3' caractériseraient alors les espaces de Banach dans lesquels les conditions de moments : $E\{X\} = 0$, $\forall \xi \in E' : E\{\langle X,\xi\rangle^2\} < \infty$ et $E\{\frac{||X||^2}{L_2||X||}\} < \infty$ sont suffisantes (et nécessaires d'ailleurs) pour que X vérifie la loi du logarithme itéré bornée : ce sont les espaces de type ϕ_1.

REFERENCES :

[1] J. Hoffmann-Jørgensen : Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, VI 1976. Lecture Notes in Math. 598, Berlin-Heidelberg - New-York : Springer 1977.

[2] J. Kuelbs : Kolmogorov law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables. Illinois J. Math. 21-4, 784-800 (1977).

[3] J.T. Lapresté : Charges, poids et mesures de Lévy dans les espaces vectoriels localement convexes. Séminaires de Probabilités de Strasbourg XIII, 1977-1978, 41-71. Lecture Notes in Math. 721, Berlin-Heidelberg - New-York : Springer 1979.

[4] G. Pisier : Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975-76, exposés N° 3 et 4.

[5] J. Zinn, V. Goodman et J. Kuelbs : Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes. Preprint.