ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2

Série Mathématiques

L. GALLARDO

Vitesse de fuite et comportement asymptotique du mouvement brownien sur les groupes nilpotents

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 191-196

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_191_0>

VITESSE DE FUITE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU MOUVEMENT BROWNIEN SUR LES GROUPES NILPOTENTS

L. GALLARDO

Université de Nancy I

1.- Introduction : Le but de cet exposé est de généraliser le critère de Dvoretzky et Erdös (cf [3]) sur la vitesse de fuite du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ au cas d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de degré de croissance $k \geqslant 3$ et d'établir quelques autres propriétés asymptotiques et locales. Ces résultats ont fait l'objet d'une Note aux Comptes Rendus (cf [5]) et seront publiés par ailleurs avec certains compléments. Cette présentation ne contiendra donc aucune démonstration.

Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. L'application exponentielle, qui est dans ce cas un difféomorphisme, nous permet d'identifier N à son algèbre de Lie. La loi de groupe $\circ$ sur N est alors donnée, à partir de l'addition vectorielle et du crochet de Lie, par la formule de Campbell-Hausdorff : $u \circ v = u+v+ \frac{1}{2} [u,v]+\ldots$ (cf [1]). Soit $N^2 = [N,N]$ l'algèbre dérivée de N, soit $X_1,\ldots,X_d$ une base d'un supplémentaire de N^2 dans N et $\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_d$ les champs de vecteurs invariants à gauche correspondants. L'opérateur $L = \frac{1}{2}[\tilde{X}_1^2+\ldots+\tilde{X}_d^2]$ (sous-Laplacien) est le générateur infinitésimal d'un processus de diffusion $\beta(t)$ appelé mouvement brownien sur N (cf [9]). On supposera dans toute la suite que N a un degré de croissance $k \geqslant 3$.

2.- Résultats asymptotiques : Soit $\|.\|$ une jauge (principale) définie sur N (cf [7] et [8] pour les notions de croissance et de jauge) et soit $g(t)$ une fonction > 0, monotone en $+\infty$ (ie : pour t assez grand). On dit que g est dans la classe supérieure $(g \in \mathcal{S}_\infty)$ ou dans la classe inférieure $(g \in \mathcal{J}_\infty)$ suivant que

$$P_o\{\omega | \exists M(\omega) > 0,\ \|\beta_t(\omega)\| > \sqrt{t}\, g(t),\ \forall t \geqslant M(\omega)\} = 0 \text{ ou } 1,$$

(où P_o désigne la probabilité partant de 0).

Autrement dit $g \in \mathcal{S}_\infty$ (resp. $g \in \mathcal{J}_\infty$) si pour presque toute trajectoire ω, l'ensemble $\{t > 0 | \|\beta_t(\omega)\| \leqslant \sqrt{t}\, g(t)\}$ n'est pas borné (resp. est borné). Notre résultat essentiel est le suivant :

<u>Théorème 1</u> : *La fonction $g(t) > 0$, monotone en $+\infty$, appartient à $\mathcal{S}_\infty$ ou à $\mathcal{J}_\infty$ suivant que l'intégrale*

$$\int^{+\infty} t^{-1} [g(t)]^{k-2} dt$$

est divergente ou convergente.

Ce théorème englobe évidemment celui de Dvoretzky et Erdös (cf [3]) car si N est abélien le degré de croissance k est égal à la dimension de N. D'autre part si $k \leqslant 2$ alors N est forcément abélien, le brownien est récurrent et l'étude du problème analogue à celui que nous considérons, a été faite par Spitzer (cf [10]).

On obtient alors le corollaire suivant :

<u>Corollaire 1</u> : *Pour une fonction $g(t) > 0$, monotone en $+\infty$, on a*

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\|\beta_t\|}{\sqrt{t}\, g(t)} \overset{p.s}{=} 0 \text{ ou } +\infty \text{ suivant que } \int^{+\infty} t^{-1} [g(t)]^{k-2} dt$$

diverge ou converge.

Il convient de remarquer que les résultats obtenus sont indépendants de la jauge choisie sur N. D'autre part le fait que toute fonction > 0 (monotone en $+\infty$) appartient à l'une ou l'autre des deux classes ($\mathcal{S}_\infty$ ou $\mathcal{J}_\infty$), fait partie du théorème.

La principale utilité du critère intégral ainsi obtenu, est de pouvoir "tester" la vitesse de fuite de β_t quand $t \to +\infty$. Par exemple en prenant $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, on retrouve le fait, plus ou moins connu, que β_t est une diffusion transiente. Si l'on prend $g(t) = (\text{Log } t)^{-\frac{1+\varepsilon}{k-2}}$, on voit que $\|\beta_t\|$ "file" à l'infini plus vite que $\sqrt{t}\, g(t)$ si $\varepsilon > 0$ alors que cela n'est plus vrai si $\varepsilon \leqslant 0$.

Voici un autre résultat asymptotique, du type loi des grands nombres (d'ailleurs facile à démontrer).

Proposition 1 : *(loi des grands nombres)*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\|\beta(t)\|}{t^\alpha} \overset{p.s}{=} 0 \quad si \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Ce résultat combiné avec le corollaire 1 donne en particulier que la limite de $\frac{\|\beta_t\|}{t^\alpha}$ est (presque sûrement) 0 ou $+\infty$ suivant que $\alpha > \frac{1}{2}$ ou $\alpha < \frac{1}{2}$. Signalons que le cas d'une normalisation par $\sqrt{t}$ a été étudié dans [2].

Dans le cas où N est gradué et muni d'une norme homogène $|.|$ (voir [4] ou [6] pour ces notions), on peut définir de la même façon les classes supérieure et inférieure pour les fonctions $g(t) > 0$, monotones en $+\infty$: $g \in \mathcal{S}'_\infty$ ou à $\mathcal{I}'_\infty$ suivant que

$$P_0\{\omega \,|\, \exists M(\omega) > 0,\ |\beta_t(\omega)| > \sqrt{t}\, g(t),\ \forall t \geqslant M(\omega)\} = 0 \text{ ou } 1$$

On obtient alors les analogues du théorème 1 et du corollaire 1 :

Théorème 1' : *La fonction $g(t) > 0$, monotone en $+\infty$, appartient à $\mathcal{S}'_\infty$ ou à $\mathcal{I}'_\infty$ suivant que l'intégrale*

$$\int^{+\infty} t^{-1}(g(t))^{k-2}dt$$

est divergente ou convergente.

Corollaire 1' : *Pour une fonction $g(t) > 0$, monotone en $+\infty$, on a*

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{|\beta_t|}{\sqrt{t}\, g(t)} \overset{p.s}{=} 0 \text{ ou } +\infty \text{ suivant que } \int^{+\infty} t^{-1}(g(t))^{k-2}dt$$

diverge ou converge.

Il convient de noter que le théorème 1' n'est pas contenu dans le théorème 1 car les notions de jauge et de norme homogène (bien que très voisines) ne coïncident pas. Cependant pour démontrer ces résultats asymptotiques nous commençons par établir le théorème 1' car dans le cas où N est gradué, il résulte des travaux de Folland (cf [4]) que le sous-Laplacien L a une solution fondamentale de la forme $u \mapsto c_k|u|^{2-k}$

$(u \neq 0)$, où c_k est une constante > 0 et $u \mapsto |u|$ est une norme homogène sur N qui est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de zéro. Ceci nous permet de suivre le plan de la démonstration de Dvoretzky et Erdös mais la situation est bien entendu compliquée par le fait qu'on ne connaît pas explicitement les densités de transition du brownien. Dans le cas où N est quelconque, nous modifions la loi de groupe de N de manière à en faire un groupe gradué et nous montrons par une technique de martingale que l'on n'a pas beaucoup modifié le brownien par cette opération (du moins pour ce qui est de son comportement lorsque $t \to +\infty$) ; ceci nous permet d'établir le théorème 1.

3.- Résultats locaux quand $t \to 0^+$: Dans cette partie N est gradué et muni d'une norme homogène $|.|$. Soit $h(t) > 0$ une fonction monotone en 0^+ (ie : pour $t > 0$ assez petit) on dit que h appartient à la classe supérieure $(h \in \mathscr{S}'_0)$ ou à la classe inférieure $(h \in \mathscr{J}'_0)$ suivant que

$$P_0\{\omega | \exists M(\omega) > 0, |\beta_t(\omega)| > \sqrt{t}\, h(t), \forall t \in]0,M(\omega)]\} = 0 \text{ ou } 1.$$

Nous obtenons dans ce cas le résultat local suivant :

Théorème 2 : La fonction $h(t) > 0$, monotone en 0^+, appartient à $\mathscr{S}'_0$ ou a $\mathscr{J}'_0$ suivant que l'intégrale

$$\int_{0^+} t^{-1}[h(t)]^{k-2}dt$$

est divergente ou convergente.

Corollaire 2 : Pour une fonction $h(t) > 0$, monotone en 0^+, on a

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{|\beta_t|}{\sqrt{t}\, h(t)} \overset{p.s}{=} 0 \text{ ou } +\infty \text{ suivant que } \int_{0^+} t^{-1}[h(t)]^{k-2}dt$$

diverge ou converge.

Nous avons deux démonstrations de ces résultats. La première suit de très près la démonstration du théorème 1'. La deuxième, plus élégante, consiste à déduire le théorème 2 du théorème 1' grâce à la propriété suivante du brownien β_t :

Proposition 2 (invariance projective du brownien) : Soit N *un groupe de Lie nilpotent simplement connexe gradué et soit* $(\delta_t)_{t>0}$ *la famille des dilatations associée à cette graduation (cf [4] ou [6]). Soit* β_t *un mouvement brownien sur* N*. Alors*

$$\gamma(t) = \delta_t \, [\beta_{\frac{1}{t}}]$$

$$\gamma(0) = 0$$

est un mouvement brownien sur N.

Pour établir ce résultat on utilise la proposition 1, une propriété d'homogénéité des densités de transition de β_t ainsi que le caractère markovien de $\gamma(t)$.

Nous ne savons pas encore si ces résultats locaux peuvent s'étendre au cas d'un groupe nilpotent s.c. quelconque. D'après quelques exemples que nous avons étudié à "la main" il semble qu'on puisse conjecturer que ces résultats locaux sont en défaut si N n'est pas gradué.

Bibliographie :

[1] N. BOURBAKI : Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 1,2 et 3. Hermann - Paris (1960).

[2] P. CREPEL et A. RAUGI : Théorème central limite sur les groupes nilpotents. Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, Vol. XIV n° 2 (1978) p. 145-164.

[3] A. DVORETZKY et P. ERDÖS : Some problems on random walk in space. Second Berkeley Symposium. Math. Stat and Prob. 1950, University of California Press, Berkeley (1951) p. 353-367.

[4] G.B. FOLLAND : Subelliptic estimates and functions spaces on nilpotent Lie groups. Arkiv f. Math. N° 13 (1975) p. 161-206.

[5] L. GALLARDO : Vitesse de fuite et comportement asymptotique du mouvement brownien sur les groupes nilpotents. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A - 15 septembre 1980.

[6] R.W. GOODMANN : Nilpotent Lie groups : structure and applications to Analysis. Lecture Notes in Math. N° 562 - Springer Verlag (1976).

[7] Y. GUIVARC'H : Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. de France N° 101 (1973) p. 333-379.

[8] Y. GUIVARC'H : Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. Astérisque N° 74, S.M.F. (1980) p. 47-98.

[9] B. ROYNETTE : Croissance et mouvements browniens d'un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe. Zeit. Wahr. verw. Gebiete 32 (1975) p. 133-138.

[10] F. SPITZER : Some theorems concerning 2. Dimensional Brownian Motion. Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958) p. 187-197.

Léonard GALLARDO
U.E.R. Sciences Mathématiques
Université de Nancy I
ERA n° 839 du CNRS
C.O. N° 140

54037 - NANCY-CEDEX