

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

C. STRICKER

**Semimartingales sur les ouverts aléatoires**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 161-164

<[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1981\\_\\_69\\_19\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_161_0)>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SEMIMARTINGALES SUR LES OUVERTS ALEATOIRES

C. STRICKER

Université de Strasbourg

Cet exposé énonce, sans démonstrations, les résultats d'un article à paraître en hommage à L. Schwartz et écrit en collaboration avec P.A. Meyer. Il sera publié dans *Advances in Mathematics*.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé, muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)$  qui satisfait aux conditions habituelles. Nos processus seront indexés par  $\mathbb{R}_+$  ou  $\overline{\mathbb{R}}_+$ ; dans le second cas, le mot semimartingale signifiera semimartingale jusqu'à l'infini. Nous appelons ouvert aléatoire un ensemble aléatoire (non nécessairement optionnel) dont les coupes sont ouvertes dans  $\mathbb{R}_+$  ou  $\overline{\mathbb{R}}_+$  suivant le cas. Nous identifions les ensembles indistinguables, comme toujours.

On dit qu'un processus optionnel  $X$  est une semimartingale sur un ouvert aléatoire  $A$  s'il existe une semimartingale  $Y$  telle que  $Y = X$  sur  $A$ . Nous dirons que  $X$  est localement une semimartingale sur un ensemble aléatoire  $B$  s'il existe des ouverts aléatoires  $A_n$  tels que  $B \subset \bigcup_n A_n$  (aux ensembles évanescents près) et que  $X$  soit une semimartingale sur chacun des  $A_n$ . Nous renvoyons à la fin de cette note pour une discussion de ces notions, empruntées au travail [1] de Schartz à une nuance près.

Lorsqu'on travaille sur  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , qui est compact, l'un des plus jolis résultats du début de [1] s'énonce ainsi, avec le vocabulaire précédent : si  $X$  est localement une semimartingale sur  $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$  tout entier, alors  $X$  est une semimartingale. Nous étendons ce résultat aux fermés optionnels dans la proposition suivante grâce à une remarque de E. Lenglart.

PROPOSITION 1. Si X est une semimartingale sur un fermé optionnel K, alors il existe une semimartingale Y telle que Y = X dans un voisinage optionnel de K pour la topologie droite.

Nous étudions ensuite les semimartingales dans des ouverts particuliers  
SEMIMARTINGALES DANS  $[0, T[$ .

T désigne ici un temps d'arrêt et  $X^T$  le processus X arrêté à l'instant T.

PROPOSITION 2. Si X est une semimartingale dans  $[0, T[$ , alors il existe une suite croissante  $(S_n)$  de temps d'arrêt, tendant p.s. vers T, telle que pour tout n, le processus  $X^{S_n}$  soit une semimartingale.

COROLLAIRE. Soient A un ouvert optionnel et X une semimartingale sur A.

Alors il existe une suite croissante de compacts prévisibles  $(K_n)$  et des semimartingales  $X^n$  telles que :

- i)  $X = X^n$  sur  $K_n$ ,
- ii)  $A \subset \bigcup_n K_n$  et  $A \cap K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  ( $\overset{\circ}{K}_n$  désigne l'intérieur de  $K_n$ ).

De plus, si X est continu dans A, on peut choisir les  $X^n$  continus dans un voisinage de  $K_n$ .

SEMIMARTINGALES SUR  $]0, +\infty[$ .

D'après la proposition 1, si X est une semimartingale sur  $]0, +\infty[$  il existe pour tout n une semimartingale  $X^n$  telle que  $X = X^n$  sur  $[1/n, +\infty[$ .

PROPOSITION 3. Pour que  $X \mathbb{1}_{]0, +\infty[}$  soit la restriction à  $]0, +\infty[$  d'une semimartingale, il faut et il suffit que pour tout ensemble prévisible A, l'intégrale stochastique  $\int_{1/n}^1 \mathbb{1}_A dX$  converge en probabilités vers une variable aléatoire finie lorsque n tend vers  $+\infty$ .

Récemment E. Lenglart s'est intéressé à la caractérisation des semimartingales jusqu'à l'infini. Voici une amélioration de son résultat :

PROPOSITION 4. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) X est une semimartingale jusqu'à l'infini.
- 2) Il existe une loi Q équivalente à P telle que X soit une  $\mathbb{H}^p$ -semimartingale pour tout entier  $p \geq 1$  et pour la loi Q .
- 3) Pour tout ensemble prévisible A ,  $(1_A \cdot X_n)$  converge en probabilité pour n tendant vers  $+\infty$  .

UN EXEMPLE :

Nous supposons que B est un  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  mouvement brownien et nous désignons par L le temps local en 0 . Soit  $\mathbb{H}_t = \bigcap_{s > t} (\mathfrak{F}_s \vee \sigma(L_v, v \in \mathbb{R}^+))$  . Grâce à un résultat de Jeulin, nous démontrons que B est une semimartingale sur l'ouvert  $(B \neq 0)$  et que cet ouvert est maximal pour la filtration grossie  $\mathbb{H}$  .

REPRESENTATION DES SEMIMARTINGALES.

La proposition suivante donne une caractérisation des semimartingales sur un ouvert optionnel.

PROPOSITION 5. Soit X une semimartingale sur un ouvert optionnel A . Il existe alors un processus prévisible H et une semimartingale Y tels que :

- i) Si T est un temps d'arrêt et si  $D_T = \inf \{t \geq T, t \notin A\}$  alors il existe une suite croissante de temps d'arrêt  $(S^n)$  tendant vers  $D_T$  telle que  $H 1_{]T, S^n]} \in L(Y)$  ,  $X^{S^n} 1_{]T, +\infty[}$  est une semimartingale et

$$1_{]T, S^n]} dX = H 1_{]T, S^n]} dY$$

- ii) Si  $[U, V]$  est un intervalle stochastique contenu dans A , le processus prévisible  $H 1_{]U, V]} \in L(Y)$  et  $X_V^- - X_U = \int_U^V H dY$  .

PROPOSITION 6. Soit X un processus optionnel localement constant dans un ouvert A . Il existe alors un ouvert optionnel  $A' \supset A$  tel que X soit une semimartingale dans  $A'$  .

MESURES SEMIMARTINGALES DANS UN OUVERT PREVISIBLE.

Soient  $(A_n)$  une suite d'ouverts prévisibles et  $(X^n)$  des semimartingales telles que pour tout couple  $(n,m)$  la semimartingale  $X^n - X^m$  soit localement constante dans  $A^n \cap A^m$ .

PROPOSITION 7. Il existe une semimartingale  $Y$  et un processus prévisible  $H > 0$  sur  $A = \cup A_n$  tels que pour tout compact prévisible  $K \subset A$   $H 1_K \in L(Y)$  et  $1_{K \cap A_n} H dY = 1_{K \cap A_n} H dY = 1_{K \cap A_n} dX^n$  pour tout  $n$ .

R E F E R E N C E S

- [1] L. SCHWARTZ : Semimartingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. A paraître.
- [2] M. EMERY : Un théorème de Vitali - Hahn - Saks pour les semimartingales. A paraître dans Z.W.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE  
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 1  
7, rue René Descartes  
67084 STRASBOURG Cédex