Annales scientifiques
de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

E. Pardoux

Équations aux dérivées partielles associées à un problème de filtrage non linéaire

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 141-147

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_141_0>

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ASSOCIEES A UN PROBLEME DE FILTRAGE NON LINEAIRE

E. PARDOUX

Université de Provence, MARSEILLE

Résumé

On expose des résultats de [4] *et* [5], *qui caractérisent la densité de la loi conditionnelle -dans un problème de filtrage non linéaire- par l'intermédiaire de la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique.*

I- INTRODUCTION

Soit X_t un signal markovien, que l'on ne peut pas observer directement. On observe le processus Y_t donné par :

$$Y_t = \int_0^t h(X_s)ds + W_t$$

où le bruit d'observation, W_t, est supposé être un processus de Wiener, éventuellement corrélé avec X_t.

A chaque instant, on veut calculer la loi conditionnelle de X_t, connaissant Y_s, $s \leq t$. Grâce aux hypothèses que nous ferons, cette loi conditionnelle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, $\rho(t,x)$. Nous ne chercherons pas à établir l'équation de ρ, mais une équation plus simple, telle que ρ se calcule aisément en fonction de la solution de cette équation.

On expose le résultat général, puis on montre que dans le cas où le bruit d'observation est indépendant du signal, on peut, par une méthode similaire, obtenir directement la forme "robuste" de l'équation du filtrage. L'idée générale consiste à chaque fois à considérer d'abord une équation rétrograde, dont on exprime la solution à l'aide d'une formule de type Feynman-Kac. Pour faire bien comprendre la méthode, on l'applique d'abord à la dérivation de l'équation de Fokker-Planck, i.e. on considère le cas où il n'y a pas d'observation.

II- FORMULATION DU PROBLÈME - HYPOTHÈSES

On considère le système différentiel stochastique :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t \\ dY_t = h(t,X_t)\,dt + g(t)\,dW_t + \tilde{g}(t)\,d\tilde{W}_t \end{cases}$$

où X_t prend ses valeurs dans R^N, Y_t dans R^d, $\begin{pmatrix} W_t \\ \tilde{W}_t \end{pmatrix}$ est un Wiener standard à valeurs dans R^{N+d}. Nous écrirons tout comme si $d = 1$, et tous les résultats seront vrais $\forall d$.

On supposera que $\sigma_{ij}(.,.) = \sigma_{ji}(.,.)$ est continue et bornée sur $R_+ \times R^N$, $b_i(.,.)$ et $h(.,.)$ mesurables et bornés sur $R_+ \times R^N$, $g_i(.)$ et $\tilde{g}(.)$ continus sur R_+ ; $i,j = 1\dots N$.
On pose $a(t,x) = \sigma(t,x)\,.\,\sigma(t,x)$. On suppose :

$$(2.2)\qquad \exists\,\alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad a(t,x) \geqslant \alpha I \qquad \forall\, t, x\,.$$

On supposera qu'on a normalisé le bruit d'observation de telle sorte que $g(t)\,g^*(t) + (\tilde{g}(t))^2 = 1$; et on suppose :

$$(2.3)\qquad |\,\tilde{g}(t)\,| > 0, \qquad \forall\, t.$$

On considère le système (2.1) au sens faible , cf. STROOCK-VARADHAN [6]. On appelle P_{sx} la loi de la solution $(X_t,Y_t)_{t \geqslant s}$, avec la condition initiale :

$$P_{sx}\,(X_s = x\ ,\ Y_s = 0) = 1$$

On appelle P la loi de la solution $(X_t,Y_t)_{t \geqslant 0}$, avec la condition initiale :

$$P(X_0 \in B,\ Y_0 \in C) = \pi_0(B)\,1_C(0)$$

$\forall$ B borélien de R^N, C borélien de R ; où π_0 est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur R^N, dont la densité $p_0(x)$ est supposée de carré intégrable.

On définit :

$$Z_t^s = \exp\{\int_s^t h(s,X_s)dY_s - \frac{1}{2}\int_s^t |h(s,X_s)|^2 ds\} \quad , \quad Z_t = Z_t^o$$

$$\mathcal{G}_t^s = \sigma\{X_\theta, Y_\theta, s \leqslant \theta \leqslant t\} \ , \quad \mathcal{F}_t^s = \sigma\{Y_\theta - Y_s, s \leqslant \theta \leqslant t\}$$

$$\frac{d\overset{\circ}{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_t^o} = (Z_t)^{-1} \quad ; \quad \frac{d\overset{\circ}{P}_{sx}}{dP_{sx}}\Big|_{\mathcal{G}_t^s} = (Z_t^s)^{-1} \quad .$$

On notera respectivement E, $\overset{\circ}{E}$, E_{sx}, $\overset{\circ}{E}_{sx}$ l'espérance suivant la loi P, $\overset{\circ}{P}$, P_{sx}, $\overset{\circ}{P}_{sx}$. Soit f une fonction mesurable bornée sur R^N. On montre aisément :

$$\text{(2.4)} \qquad E[f(X_t)/\mathcal{F}_t] = \frac{\overset{\circ}{E}[f(X_t) Z_t/\mathcal{F}_t]}{\overset{\circ}{E}[Z_t/\mathcal{F}_t]}$$

Supposons que l'on sache exhiber une fonction $p(t,x)$ telle que :

$$\int f(x)\, p(t,x)\, dx = \overset{\circ}{E}[f(X_t) Z_t/\mathcal{F}_t] \ .$$

Alors, d'après (2.4), $\rho(t,x) = p(t,x)\,(\int p(t,x)dx)^{-1}$ est la densité de la loi X_t, conditionnée par $\mathcal{F}_t$.

Introduisons enfin les opérateurs :

$$L_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$B_t = \sum_i c_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + h(t,x).$$

où $c = g\sigma$. On supposera :

$$\text{(2.5)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} \in L^\infty(R_+ \times R^N).$$

III- CAS SANS OBSERVATION

Supposons $h = 0$, $g = 0$. Alors le problème se ramène à établir l'équation de Fokker-Planck pour la densité de la loi *a priori* de X_t.

Soient $T > 0$, f continue à support compact de R^N dans R. Considérons l'équation aux dérivées partielles rétrograde :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} v'_t + L_t v = 0, & t \leqslant T \\ v(T) = f \end{cases}$$

Alors la solution de (3.1) vérifie :

$$(3.2)\qquad v(t,x) = E_{tx}\,[\,f(X_T)]$$

On associe à (3.1) son équation adjointe :

$$(3.3)\qquad \begin{cases} p'_t = L^*_t\, p, & s \geqslant 0 \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Alors :

$$(3.4)\qquad \frac{d}{dt}\,(v(t),\, p(t))^* = 0 \text{ ; donc d'après (3.2) :}$$

$$\begin{aligned} (p(T),\, f) &= (p_0,\, v(0)) \\ &= \int p_0(x)\, E_{ox}\, f(X_T)\, dx \\ &= E\, f(X_T)\,, \quad \forall f, \quad \forall T. \end{aligned}$$

On a montré que $\forall t \geqslant 0$, $p(t)$ est la densité de la loi de X_t.

On peut alors remarquer que :

$$(3.5)\qquad (p(t)\,,\, v(t)) = E\,[\,E_{tX_t}\, f(X_T)]$$

et (3.4) se ramène à la propriété de Markov de X_t.

----

* $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(R^N)$.

IV- LE RÉSULTAT GÉNÉRAL - CF. [4]

Au vu de (2.4), il suffit de savoir calculer le numérateur du membre de droite, pour caractériser la loi conditionnelle. Par analogie avec (3.5), on est amené à poser :

$$(4.1) \qquad v(t,x) = \overset{\circ}{E}_{tx} [f(X_T) Z_T^t / \mathcal{F}_T^t]$$

v est alors la solution de l'équation suivante, qui joue le rôle de (3.1) :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv(t) + L_t v(t)\, dt + B_t v(t)\, dY_t = 0 , \quad t \leq T \\ \qquad\qquad\qquad v(T) = f \end{array} \right.$$

THEOREME 4.1- L'unique solution de (4.2) vérifie (4.1).

Le théorème 4.1 établit une sorte de formule de Feynman-Kac pour les équations aux dérivées stochastiques.

On considère alors l'équation :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} dp(t) = L_t^* p(t)\, dt + B_t^* p(t)\, dY_t \\ u(0) = p_0 \end{array} \right.$$

THEOREME 4.2- Les trajectoires du processus $\{(u(t),v(t))\}_{0 \leq t \leq T}$ *sont p.s. constantes*

Remarque : La difficulté pour démontrer les deux théorèmes tient à ce qu'on manie à la fois des processus qui, à l'instant t, sont adaptés au passé de Y_s *depuis 0, et le processus v(t) adapté aux accroissements de* Y_s *entre t et T. On n'a donc pas de calcul différentiel stochastique à notre disposition.*

On a alors, comme au §III :

$$\begin{aligned} (p(T), f) &= (p_0, v(0)) \\ &= \overset{\circ}{E} [f(X_T) Z_T^0 / \mathcal{F}_T^0] \end{aligned}$$

Donc, d'après (2.4),

$\rho(t,x) = p(t,x) \left(\int p(t,x)\, dx \right)^{-1}$ est la densité de la loi conditionnelle cherchée

Remarque : Ce résultat, concernant l'équation (4.3), a été établi par ZAKAI [7] *sous des conditions assez restrictives, et récemment par KRYLOV-ROSOVSKII* [3] *sous des conditions similaires aux nôtres, mais par une méthode très différente.*

V- CAS OÙ LE BRUIT D'OBSERVATION EST INDÉPENDANT DU SIGNAL-CF. [5]

Supposons :

(5.1) $\quad g = 0 \;, \quad h \in C_b^{1,2}(R_+ \times R^N) \;.$

Dans ce cas, $c = 0$, l'opérateur B se réduit à la multiplication par h. Donc, si Y est en dimension $d > 1$, les opérateurs $B_k(k=1\ldots d)$ commutent entre eux. On constate alors (cf. DAVIS [1]) que la solution de (4.3) s'exprime en fonction de la solution d'une EDP, dont les coefficients sont fonctions de Y_t. Il en est de même de (4.2). Ce résultat est semblable à ceux de DOSS [2].

Posons
$$\begin{aligned} u(t,x) &= v(t,x) \exp [Y_t\, h(x)] \\ q(t,x) &= p(t,x) \exp [-Y_t\, h(x)] \end{aligned}$$

Alors q est la solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \exp [-Y_t h]\, L_t^* \{ \exp [Y_t h]\, q \} - \dfrac{h^2}{2}\, q \\ q(0) = p_0 \end{cases}$$

Ecrivons cette équation sous la forme :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \check{L}_t^*\, q + e(t,Y_t)\, q \\ q(0) = p_0 \end{cases}$$

Alors u est la solution de :

$$(5.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \check{L}_t u + e(t,Y_t)u = 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq T \\ u(T) = \exp\,[Y_T h]\, f \end{cases}$$

D'après la formule de Feynmann-Kac, u s'exprime par :

$$(5.4) \qquad u(t,x) = \check{E}_{tx}\,[f(X_T)\exp\{Y_T\, h(X_T) + \int_t^T e(s,Y_s,X_s)\,ds\}]$$

où $\check{E}_{tx}$ est la loi du processus de Markov de générateur infinitésimal $\check{L}$. En fait, (5.4) s'obtient à partir de (4.1). On remarque tout d'abord qu'avec $g = 0$, X_s et Y_s sont indépendants sous $\overset{o}{P}_{tx}$. Puis on intègre par parties l'intégrale stochastique qui figure dans Z_T^t, et enfin on utilise la formule de Girsanov pour supprimer l'intégrale stochastique par rapport à W_t obtenue par l'intégration par parties.

Il résulte alors de la formule de Feynman-Kac que u est la solution de (5.3), et l'équation de q s'obtient par dualité.

Remarque : On dit que (5.2) est la forme "robuste" de l'équation du filtrage. Elle permet de construire une application continue qui, à chaque trajectoire observée de Y_t, associe la loi conditionnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.H.A. DAVIS - Communication au Congrès Européen des Statisticiens, Varna (1979).

[2] H. DOSS- Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. Ann. Inst. H. Poincaré, 13, 2, 99-125 (1977).

[3] N.V. KRYLOV, B.L. ROSOVSKII- On the conditional distribution of diffusion processes. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Math 42, 2, 356-378 (1978).

[4] E. PARDOUX- Stochastic partial differential equations, and filtering of diffusion processes. Stochastics, 3,2, 127-168 (1979).

[5] E. PARDOUX- Backward and forward stochastic partial differential equations associated with a nonlinear filtering problem. (soumis à IEEE Autom. Control).

[6] D.W. STROOCK-S.R.S. VARADHAN- Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure and Appl. Math., 22 (1969).

[7] M. ZAKAI- On the optimal filtering of diffusion processes. Z. Wahrschein., 11, 230-243 (1969).