ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. CHALEYAT-MAUREL

Réflexion discontinue et systèmes stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 115-124

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_115_0>

REFLEXION DISCONTINUE ET SYSTEMES STOCHASTIQUES

M. CHALEYAT-MAUREL

Université de Paris VI

Le sujet de cet exposé est un travail fait en collaboration avec N. El Karoui et B. Marchal, à paraître aux Annals of Probability. On y montre l'existence et l'unicité des solutions d'un système stochastique de réflexion sur $\mathbb{R}_n^+$ associé à des semi-martingales continues à droite et pourvues de limites à gauche ; on en déduit l'existence et l'unicité d'un processus de Markov dont le générateur infinitésimal peut être dégénéré et dont le domaine est limité par une condition frontière simple du type Neumann.

Nous allons donner brièvement les résultats dans un cas simple de cet article [3] auquel nous renvoyons le lecteur intéressé.

La difficulté principale dans le cas discontinu est de bien poser le problème de réflexion.

Dans le cas continu, l'exemple du mouvement brownien réfléchi $|B_t|$, processus de Markov qui vérifie :

$|B_t| - L_t$ = martingale, où L_t est le temps local de B_t , donne la forme du problème de réflexion à résoudre ; c'est-à-dire : étant donnée une semi-martingale Y , la recherche d'un couple (Z,K) tel que $Z_t = Y_t + K_t$; $Z_t \geq o$; et K ne croît que sur les zéros de Z .

Le problème se pose en fait de manière déterministe et admet une solution unique.

Dans le cas discontinu, même pour un processus déterministe, la manière de formuler le problème n'est pas évidente car il faut une condition sur les sauts.

Nous expliciterons tout d'abord le problème de réflexion puis, une fois que nous aurons posé le système stochastique, la résolution se fera par une méthode standard de point fixe, et nous évoquerons un cas simplifié, analogue, dans le cadre de la réflexion, à celui de C. Doléans-Dade et P.A. Meyer [4] .

1. Le problème de réflexion sur $\mathbb{R}$.

L'origine du problème dans le cas cadlag se trouve évidemment dans le cascontinu et pour ceci on pourra consulter [1] et [2] .

Avant de poser le problème, donnons quelques notations :

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble de fonctions cadlag de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$; si $y \in \mathcal{H}$, on définit les fonctions y_- et Δy par :

$$y_-(t) = \lim_{\substack{s \nearrow t \\ s \neq t}} y(s) \quad \text{et} \quad \Delta y(t) = y(t) - y_-(t) \quad .$$

L'ensemble des instants de sauts de y, c'est-à-dire $\{t > o \ : \ |\Delta y(t)| > o\}$ est noté par $\mathcal{S}_y$.

On pose également $\overline{y}(t) = \sup(-y(t), o)$; enfin pour toute fonction k de $\mathcal{H}$, croissante, nous notons k^d la fonction croissante :

$$k^d(t) = \sum_{o < s \leq t} \Delta k(s)$$ et k^c la fonction continue, croissante : $k^c = k - k^d$.

Définition : Soit $y \in \mathcal{H}$; on dit que le couple (z,k) où z et k appartiennent à $\mathcal{H}$ est une solution du problème de réflexion associé à y (en abrégé PBR (y)) si :

1) $z = y + k$.

2) $z \geq o$.

3) k est croissante, $k(o) = o$ et

(i) $$\int_0^\infty \overline{z}(s)\,dk^c(s) = o$$

(ii) $\forall t \in \mathcal{S}_k$, $\Delta k(t) = 2z(t)$.

Remarque : Cette condition sur les sauts n'est pas totalement arbitraire ; en effet si on considère la fonction à un saut :

$$y(t) = \alpha\, 1_{\{t_o \leq t\}} ,$$

il est naturel d'exiger que $|z| = |\alpha| 1_{\{t_o \leq t\}}$ c'est-à-dire :

$$z(t) = \alpha\, 1_{\{t_o \leq t\}} \quad \text{si} \quad \alpha \geq o \quad \text{et} \quad k(t) = o \quad \forall t$$

$$z(t) = -\, \alpha 1_{\{t_o \leq t\}} \quad \text{si} \quad \alpha < o \quad \text{et} \quad k(t) = -2\alpha\, 1_{\{t_o \leq t\}}$$

$k(t)$ a alors un saut en t_o qui vaut $2z(t_o)$. Et cette condition sur les sauts nous donnera l'unicité.

On démontre alors le théorème suivant :

Théorème 1. : $\forall y \in \mathcal{H}$, $y(o) \geq o$, il existe une solution et une seule au PBR (y) notée (z,k) .

Dans le cas continu la résolution est assez rapide ; on voit que le couple $k(t) = \sup\limits_{[o,t]} \bar{y}(s)$, $z(t) = y(t) + k(t)$ convient, car k est croissant, continu et ne croît que sur les zéros de z . On montre ensuite facilement que c'est la seule solution en évaluant la différence de deux solutions .

Dans le cas discontinu la résolution nécessite deux étapes :

Tout d'abord, on commence par supposer qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante qui épuise les sauts de la fonction définie par :

$$a(t) = \sup_{[o,t]} \bar{y}(s) \quad ,$$

et on définit la fonction k par récurrence dans chaque intervalle $[t_n , t_{n+1}[$ par la formule :

$$k(t) = a(t) \vee k(t_n)$$

et au point t_{n+1} par :

$$k(t_{n+1}) = |k_-(t_{n+1}) - a(t_{n+1})| + a(t_{n+1}) \quad .$$

et on vérifie que $(z = y + k,k)$ convient.

Ensuite, pour le cas général, on considère le $n^{\text{ième}}$ saut de a d'amplitude supérieure à ε et on fait tendre ε vers zéro ; il faut vérifier ensuite que les fonctions k^{ε} et z^{ε} définies comme précédemment convergent vers une solution du PBR .

Quant à l'unicité, elle résulte d'un lemme de changement de variable.

Notons que contrairement au cas continu on n'a pas de forme explicite pour k et z en fonction de y mais seulement un encadrement :

$$a \leq k \leq a + a^d \quad .$$

Le PBR se traduit immédiatement en terme de processus : on énonce alors le problème trajectoire par trajectoire .

2. Un système stochastique sur $\mathbb{R}^+$.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité satisfaisant aux conditions habituelles , M_t une semi-martingale nulle en $\{o\}$, cadlag et H_t un processus cadlag à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Pour toute $f(t,\omega,x)$ fonction aléatoire définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+$, [redacted]* mesurable, nous dirons que le couple (X_t, K_t) est solution du système différentiel stochastique S si :

1) X_t est cadlag , adapté.

2) K_t est cadlag , adapté , croissant et tel que $K_o = o$.

3) $\cdot\ X_t = H_t + \int_o^t f(s, X_{s_-}) dM_s + K_t$.

$\cdot\ X_t \geq o$.

$\cdot \int_o^t 1_{\{X_s = o\}}\, dK_s^c = K_t^c$.

$\cdot\ t \in \mathcal{S}_K \Rightarrow \Delta K_t = 2X_t$.

On montre alors le théorème :

Théorème 2. : Si pour tout (t,ω) fixés, $f(t,\omega,\cdot)$ est lipschitzienne de rapport k , S possède une solution et une seule.

* [redacted]
continue à gauche, adaptée.

Pour établir le théorème on utilise un procédé standard qui consiste à construire une suite strictement croissante de temps d'arrêt $T_1 \dots T_n \dots$ tendant vers l'infini telle que sur chaque $[T_i , T_{i+1}[$ les processus qui interviennent aient des propriétés suffisamment régulières pour pouvoir utiliser une méthode de point fixe.

Nous supposerons ici que grâce aux opérations de réduction habituelles nous nous sommes ramenés à l'espace suivant :

$\mathcal{S}$ = {X adaptés, cadlag sur $[0,T[$, à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ tels que $X^* = \sup\limits_{s<T} |X_s| \in L^2\}$

On munit alors $\mathcal{S}$ de la norme :

$$[\![X]\!] = \| X^* \|_2 \quad .$$

Si $X \in \mathcal{S}$, on définit sur $[0,T[$ le processus $S(X)$ par :

$$S(X)_t = H_t + \int_0^t f(s , X_{s_-}) \, dM_s$$

et par $(R(X)_t , K(X)_t)$ la solution du PBR associé à $S(X)_t$.

Il suffit alors de démontrer les deux propriétés suivantes pour conclure :

(i) $X \in \mathcal{S} \Rightarrow R(X) \in \mathcal{S}$.

(ii) $\forall X,X' \in \mathcal{S}$, $[\![R(X) - R(X')]\!] \leq h \; [\![X-X']\!]$

$o \leq h < 1$.

En effet ceci entraîne bien évidemment que l'équation $R(X) = X$ a une solution unique dans $\mathcal{S}$, d'où l'existence et l'unicité cherchée.

Donnons une esquisse de la démonstration de (i) et (ii) .

On suppose d'abord (ii) vérifiée ; pour prouver (i) il suffit alors de montrer que $R(o) \in \mathcal{S}$.

$$\| R(o) \|^2 \leq 2^3 \left(\| H \|^2 + \left\| \int_0^{\cdot} f(s,o)dM_s \right\|^2 + \| K(o) \|^2 \right)$$

La réduction à un intervalle $[0,T[$ bien choisi permet alors de conclure pour H et l'intégrale stochastique $f{\cdot}M$; et pour le terme $\| K(o) \|^2$, en utilisant la majoration du PBR : $a \leq k \leq a + a^d$, on a un majorant en fonction des données.

De la même façon pour prouver (ii) on écrit :

$$\| R(X) - R(X') \|^2 \leq 2 \left(\left\| \int_0^{\cdot} (f(s,X_{s\_}) - f(s,X'_{s\_}))dM_s \right\|^2 \right.$$

$$\left. + \| K(X) - K(X') \|^2 \right)$$

On voit que tout revient à des majorations de la différence de deux solutions du PBR en fonction de la donnée. En fait on établit d'abord une majoration de $Z - Z'$ si $Z = Y + K$ et $Z' = Y' + K'$ et on en déduit une majoration de $K - K'$.

Dans le cas continu on a :

$$(Z_t - Z'_t)^2 = 2\int_0^t (Z_s - Z'_s)d(Y_s - Y'_s) + 2\int_0^t (Z_s - Z'_s)d(K_s - K'_s)$$
$$+ \langle Y - Y' \rangle_t$$

mais les deux propriétés du PBR :

$$\int_0^t Z_s dK_s = \int_0^t Z'_s dK'_s \quad \text{et} \quad Z_s \quad \text{et} \quad Z'_s \quad \text{positifs}$$

entraînent que :

$$(Z_t - Z'_t)^2 \leq 2\int_0^t (Z_s - Z'_s)d(Y_s - Y'_s) + \langle Y - Y' \rangle_t \quad .$$

Dans le cas discontinu ce qu'on obtient c'est :

$$(Z_t - Z'_t)^2 \leq 2\int_0^t (Z_{s\_} - Z'_{s\_})d(Y_s - Y'_s) + [Y - Y']_t \quad .$$

On en déduit une majoration pour $(K_t - K'_t)^2$ ce qui sert ainsi que l'hypothèse de Lipschitz sur f à montrer la propriété (ii) .

Le théorème 2 est valable pour $\mathbb{R}_n^+$ et dans un cadre plus général où on intègre par rapport à la mesure de comptage des sauts de la semi-martingale.

BIBLIOGRAPHIE

|1| BENSOUSSAN,A - LIONS,J.L.
"Diffusion processes in bounded domains and singular pertubation problems for variational inequalities with Neumann boundary conditions".
"Probabilistic methods in differential equations".
Lecture Notes in Math. n° 451-Springer (1974).

|2| CHALEYAT-MAUREL,M - EL KAROUI,N.
"Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$ -cas continu".
Astérisque 52-53 (1978) p. 117-144.

|3| CHALEYAT-MAUREL,M - EL KAROUI,N - MARCHAL,B.
"Reflexion discontinue et systèmes stochastiques".
A paraître.

|4| DOLEANS-DADE,C - MEYER,P.A.
"Equations différentielles stochastiques"
Séminaire de probabilités XI - Lecture Notes in Math. n° 581
Springer (1977) p. 376-382.

Laboratoire de Calcul des Probabilités
4 Place Jussieu
75230 CEDEX 05