ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

LUCIEN BIRGE

Sur les vitesses exponentielles de décroissance des erreurs des tests de rapport de vraisemblances

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, nº 17 (1979), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_1_0>

SUR LES VITESSES EXPONENTIELLES DE DECROISSANCE DES ERREURS DES TESTS DE RAPPORT DE VRAISEMBLANCES

Lucien BIRGE

Université PARIS VII

Il s'agit d'un prolongement des travaux de L.D. Brown(2) permettant d'obtenir les meilleures décroissances exponentielles possibles pour les erreurs des tests de Θ_0 contre Θ_1.

Si l'on considère les tests de rapport de vraissemblances de deux probabilités P et Q, la théorie des grandes déviations de H. Chernoff (3) nous montre que les erreurs décroissent comme des fonctions exponentielles du nombre des observations, pourvu que le seuil soit convenablement choisi. Ceci permet d'utiliser les coefficients de ces exponentielles comme moyen de comparaison des tests. Si on note $\alpha_n(c,P,Q)$ et $\beta_n(c,P,Q)$ les erreurs de première et deuxième espèces, respectivement, des tests de rapport de vraisemblances au seuil c de P contre Q, on obtient:

$$\alpha(c,P,Q)=\lim \frac{1}{n}\log\alpha_n(c,P,Q) \qquad \beta(c,P,Q)=\lim \frac{1}{n}\log\beta_n(c,P,Q)$$

L'utilisation de cette théorie ainsi que les résultats de P.J. Huber et V. Strassen(5-6) sur les capacités bi-alternatives et les tests de deux boules pour la distance en variation totale permettent d'étendre ce résultat au cas de deux ensembles Θ_0 et Θ_1 où Θ_0 est compact et Θ_1 σ-compact, et de construire des tests ayant les meilleures vitesses exponentielles possibles.

Soit T_n une suite detests de Θ_0 contre Θ_1 fondés sur n observations indépendantes .On notera α_n^T le niveau du test. $\beta_n^T(Q)$ est l'erreur de deuxième espèce au point Q de Θ_1. Le principal résultat est le suivant:

Soient deux ensembles Θ_0 et Θ_1 de probabilités sur un espace mesurable, Θ_0 étant fortement compact et Θ_1 fortement σ-compact. Soit α strictement négatif, pour toute suite de tests T telle que

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\log\alpha_n^T \leqslant \alpha \qquad \text{on a:}$$

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\log\beta_n^T(Q) \geqslant \sup_{H(Q)} (c,P,Q)$$

où $H(Q)=\left\{(c,P) \,\middle|\, P\in\Theta_0\ ,\ \alpha(c,P,Q)\leqslant\alpha\right\}$

De plus il existe une suite S_n de tests qui vérifie:

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\log\alpha_n^S$$

$$\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\log\beta_n^S(Q)=\sup_{H(Q)}\beta(c,P,Q) \qquad \forall\, Q\in\Theta_1$$

Pour les détails des démonstrations, voir (1) et (4).

(1) L.BIRGÉ : "Maximal exponential rates of decrease of errors and associated optimal tests ". A paraître.

(2) L.D. BROWN : "Non-local asymptotic optimality of appropriate likelihood ratio tests". Ann. Math. Stat. (1971) Vol. 42 p. 1206-1240.

(3) H. CHERNOFF : "A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations". Ann. Math. Vol. 23 (1952) p. 493-507.

(4) D. DACUNHA-CASTELLE :"Cours à l'école d'été de Saint-Flour (1977)".Springer,Lecture notes.

(5) P.J. HUBER :"A robust version of the probability ratio test". Ann. Math. Stat. Vol. 36 (1965) p. 1753-1758.

(6) P.J. HUBER and V. STRASSEN :"Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities". Ann. of Stat. Vol. 1 n°2 (1973) p. 251-263.