ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GÖRAN HÖGNÄS

Marches aléatoires récurrentes sur les demi-groupes localement compacts

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 96-102

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_96_0>

MARCHES ALEATOIRES RECURRENTES SUR LES DEMI-GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

Göran HÖGNÄS

Åbo Akademi, Finlande

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Résumé On montre que sous certaines conditions les points récurrents d'une marche aléatoire sur un demi-groupe abélien localement compact forment un groupe topologique. Dans le cas discret ce résultat a été obtenu par Martin-Löf.

1.

Soit S un demi-groupe topologique localement compact à base dénombrable. Soit μ une probabilité régulière sur S, telle que son support engendre tout S, et $\{Z_n\}$ la marche à droite de loi μ. Nous désignons P le noyau de transition de $\{Z_n\}$.

Pour qu'une marche à droite sur un groupe ou un demi-groupe complètement simple ou un demi-groupe discret quelconque soit récurrente, il faut et suffit qu'il existe un point $x \in S$ tel que

(*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n(N) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Prob}\{Z_n \in N\} = \infty$$

pour tout voisinage N de x,

(dans le cas discret N se réduit au seul point x), cf. [4, p. 158] , [6, p. 89], [3]. Soit I l'ensemble des points satisfaisant à (*). Dans ce qui suit nous supposerons que $I \neq \Phi$.

Dans le cas discret, Martin-Löf [3] montre que I est exactement l'idéal minimal de S. Si S est commutatif, alors I est un groupe. Dans cette note nous étudierons I dans le cas localement compact sous quelques conditions supplémentaires sur P. Nous nous bornerons au cas *abélien*.

2.

Supposons d'abord que P soit *fortement continu* [5] (fortement fellérien dans la terminologie de [6]), c'est-à-dire, la fonction $x \rightsquigarrow P(x,A)$, $x \in S$, est continue pour chaque borélien $A \subset S$.

Lemme 1. I est un idéal fermé minimal. $\sum \mu^n(I^c) < \infty$.

Démonstration. Il est facile à voir que I^c (le complémentaire de I) est ouvert. Le fait que I est un idéal est démontré dans [4, pp. 190-191].
Nous montrons maintenant que $\overline{xS}$ (l'adhérence topologique de xS) $= I$ pour tout $x \in I$, ce qui prouve que I est minimal dans l'ensemble des idéaux fermés.

Soit

(1) $$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu^n .$$

Alors ν est une probabilité régulière dont le support est tout S.

Si A est un idéal et $\nu(A)>0$ il s'ensuit que $\sum \mu^n(A^c)<\infty$, car A est absorbant pour $\{Z_n\}$, cf. [3]. P fortement continu implique que, quel que soit $x \in S$, $P(\cdot,xS)>0$ dans un ouvert, et, par conséquent,

$$\nu(xS) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in S.$$

En particulier, on a $\sum \mu^n((xS)^c) < \infty$ pour tout x . Si $x \in I$ et $\overline{xS} \neq I$ on aurait $\sum \mu^n(U) \leqq \sum \mu^n((xS)^c) < \infty$ pour un ouvert

U contenant points de I, une contradiction □

Soit $x \in I$. $\overline{xI} = I$, car $\overline{xI}$ est un idéal fermé. Alors on a

(2) $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n(x^{-1}N) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,N) = \infty$

pour tout voisinage N de x.

$P(\cdot, I^c) = 0$ sur I. Il est donc possible de restreindre $\{Z_n\}$ à I. Cette chaîne restreinte $\{X_n\}$ est aussi markovienne. Elle est ϕ-irréductible, [7], pour $\phi = \nu(x^{-1}\cdot)$, c'est-à-dire, $\mathrm{Prob}\{\exists n: X_n \in A \mid X_0 = y\} > 0$ pour tout $y \in I$, quel que soit A avec $\phi(A) > 0$ ou, ce qui est équivalent, $\sum P^n(x,A) > 0$.

Par [7, cf. Theorem 4.1 et Definition 1.2], (2) entraîne l'existence d'une mesure de Radon invariante π,

(3) $\qquad \pi = \pi P$,

équivalente à ϕ. Le support de π est alors tout I.

<u>Lemme 2</u>. (a) $\pi(Ka^{-1}) < \infty$ pour tout $a \in I$ et tout compact $K \subset I$,

(b) $\pi(I \setminus aI) = 0$ pour tout $a \in I$.

<u>Démonstration</u>. (a) Les points ne satisfaisant pas à (a) constituent un idéal E :

$$\pi(Ka^{-1}) = \infty \Rightarrow \pi(Kb(ab)^{-1}) = \infty .$$

La démonstration ci-dessus montre qu'alors $\nu(E) > 0$. Mais l'invariance de π implique

$$\infty > \pi(K) \geq \int_I \pi(dy)\nu'(y^{-1}K) = \int_I \pi(Ky^{-1})\nu'(dy)$$

d'où $\pi(Ky^{-1}) < \infty$ ν'-p.p. où ν' est la restriction de ν à I. (Il existe un ensemble nul commun pour tous les compacts K, S étant la réunion d'une suite croissante de compacts d'intérieurs non-vides.)

(b) $\{X_n\}$ est π-irréductible. Il en suit immédiatement que $\pi((aS)^c) = 0$. Supposer que $\pi((aI)^c) > 0$. Alors la probabilité d'atteindre $(aI)^c$ à partir de $a^2 \in I$ est positive, ce qui est absurde □

Théorème 1. I est un groupe topologique.

Démonstration. Nous emploierons une version d'une méthode introduite par Gelbaum et Kalisch, cf. [1], [4, p. 17] .

Prendre $a,b \in I$. Si

(4) $\pi_0 \equiv \pi(\cdot b^{-1})$,

Lemme 2 montre que π_0 est une mesure de Radon sur I . Pour tout $a \in I$, $\pi_0(aIb) \geqq \pi(aI) > 0$, et

(5) $\pi_0(I \setminus aIb) = 0$.

Les applications $\theta(x,y) \equiv (x,xy)$ et $\beta(x,y) \equiv (y,x)$ sont mesurables par rapport à $\pi_0 \times \pi_0$.

$$(\pi_0 \times \pi_0)(\theta(aIb \times aIb)) = \int_{aIb} \pi_0(dy)\pi_0(y \cdot aIb) > 0$$

par (5). Nous avons donc

$$(\pi_0 \times \pi_0)(\beta\theta(aIb \times aIb)) > 0.$$

Toutes les sections $B_y \equiv \{z|(y,z) \in B\}$ de l'ensemble

$$B \equiv (aIb \times aIb) \setminus \theta(aIb \times aIb)$$

sont π_0-nulles (Lemme 2 (b)); d'où

(6) $(\pi_0 \times \pi_0)(B) = 0$,

et encore,

(7) $\beta\theta(aIb \times aIb) \cap \theta(aIb \times aIb) \neq \Phi$,

ce qui veut dire qu'il existe $s,t,u,v \in aIb$ tels que

$$(st,s) = (u,uv) .$$

Celà implique que $s = stv = s(tv)^2$. aI étant cancellatif, [4, p. 18] , nous voyons que $tv \in aIb \subset aI$ est idempotent. L'existence d'un élément idempotent implique $aI = I$. I est donc un groupe (algébriquement). I est aussi un espace localement compact. Par le théorème d'Ellis, [4, p. 7], I est de même un groupe topologique □

Remarque. Si $S = I$, la condition de continuité forte de P équivaut à ce que μ soit absolument continue par rapport à une mesure de Haar sur I, cf. [7, Theorem 5.1].

3.

Si S est un groupe topologique, non nécessairement récurrent, ou commutatif, μ est *étalée* si et seulement si P a la propriété suivante:

(8) Il existe un θ, $0<\theta<1$, et un noyau sous-markovien non-trivial T, tels que

$$T(x,A) \leq \theta(1-\theta)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\theta^n P^n(x,A) \quad (x\in S,\ A \text{ borélien de } S)$$

et l'application

$$x \sim T(x,A)$$

est semi-continue inférieurement (s.c.i.), quel que soit A borélien, [7, Theorem 5.1].

Nous dirons, suivant [7], que la chaine dont le noyau de transition P satisfait à (8), a T comme *composante continue*.

Remarque. Dans le cas d'une marche aléatoire sur un groupe, il suffit de supposer qu'il existe *un* point x_0 où $T(x_0,\cdot)$ est non-trivial. Il suit que $T(x,\cdot)$ est non-trivial pour chaque $x\in S$.

Retournons au cas d'un demi-groupe commutatif récurrent (au sens I non-vide). Supposons maintenant qu'il existe un point $x_0\in I$ où la composante continue T est non-triviale, c'est-à-dire, $P(x,A) \equiv \mu(x^{-1}A)$ satisfait à (8).

On peut alors démontrer, voir [2], que

(i) $\overline{x_0 S} = \overline{x_0 I} = I$

(ii) Poser $M \equiv \{x \in I \mid T(x,S) > 0\}$, $A \equiv \{x \in I \mid \sum P^n(x,M) = 0\}$ et $G \equiv I \setminus A$.

A est un idéal fermé, ν-nul, d'intérieur vide.

Suivant la méthode décrite ci-dessus, il est possible d'obtenir le résultat suivant:

Théorème 2. G est un groupe topologique localement compact. Si G est compact, alors $A = \Phi$.

REFERENCES

1. B.R. Gelbaum et G.K. Kalisch, Measure in semigroups, *Can. J. Math.* 4 (1952), 396-406.

2. G. Högnäs, On random walks with continuous components, Preprint, *Aarhus Universitet, Matematisk Institut, Preprint Series 1976/77*, No. 26, 60 pp.

3. P. Martin-Löf, Probability theory on discrete semigroups, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 4 (1965), 78-102.

4. A. Mukherjea et N.A. Tserpes, *Measures on Topological Semigroups*, Lecture Notes in Mathematics 547, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

5. D.B. Pollard et R.L. Tweedie, R-theory for Markov chains on a topological state space I, *J. London Math. Soc.* 10 (1975), 389-400.

6. D. Revuz, *Markov Chains*, North Holland / American Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York 1975.

7. P. Tuominen et R.L. Tweedie, Markov chains with continuous components, Preprint, *Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki*, Ser. A, No. 10, August 1976, 39 pp.

Göran Högnäs
Département de Mathématiques
Åbo Akademi
20500 Åbo 50
Finlande