

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

G. LETAC

Récurrance des librairies sur un arbre

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 71-76

[<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_71_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_71_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECURRENCE DES LIBRAIRIES SUR UN ARBRE

G. LETAC, UNIVERSITE DE TOULOUSE

1) L'Arbre

Soit (T, A) un arbre, c'est à dire un graphe non orienté, connexe et sans cycle. On suppose que l'ensemble T des sommets est fini ou dénombrable et on distingue un sommet ω dans T ; T devient ainsi un ensemble ordonné partiellement : $s \leq t$ si l'unique chemin allant de ω à t passe par s . L'arbre est dit linéaire s'il est totalement ordonné. Si $t \in T$, on note :

$\{\omega = t_0(t), t_1(t), \dots, t_k(t) = t\}$ l'unique chemin allant de ω à t , avec $t_0(t) < t_1(t) < \dots < t_k(t)$. On définit enfin pour tout t de T la permutation τ_t de T par $\tau_t(s) = s$ si $s \not\leq t$,

$$\tau_t(t_i(t)) = t_{i-1}(t) \text{ si } 0 < i \leq k$$

$$\tau_t(\omega) = t.$$

Attention, τ_t n'est pas un automorphisme d'arbre. Il est clair que le semi groupe pour la composition engendré par les τ_t est le groupe dénombrable G_0 des permutations de T ne déplaçant qu'un nombre fini de τ .

2) Livres rangés sur l'arbre

Soit maintenant B un ensemble de même cardinalité que T , dont les éléments b sont appelés livres. Soit e une bijection de T sur B (ce qui revient à placer le livre $b = e(t)$ au sommet t de T). Notons $E = e \circ G_0$: c'est l'ensemble dénombrable des rangements π des livres ne différant du rangement e qu'en un nombre fini de points. Nous allons introduire une transformation $g(b)$ de E , qui correspond à changer le rangement π lorsqu'on prend le livre b (à la place $t = \pi^{-1}(b)$), qu'on le place en ω et en faisant "glisser" les livres se trouvant sur l'unique chemin allant de ω à t .

La définition de $g(b) : E \rightarrow E$ est

$$g(b)\pi = \pi \circ \pi_{\pi^{-1}(b)}^{-1},$$

Une autre transformation de E nous sera utile; si $t \in T$, on définit $h(t) : E \rightarrow E$ par :

$$h(t)\pi = \pi \circ \tau_t^{-1}.$$

Attention : il y a une transformation $g(b)$ par livre b , une transformation $h(t)$ par place t . Ni $g(b)$ ni $h(t)$ ne sont des bijections de E .

3) Librairie sur l'arbre

Soit maintenant une suite $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ de variables aléatoires à valeurs dans B , indépendantes et de même loi définie par :

$$P[X_n = b] = p_b.$$

(X_n est le livre lu à l'instant n).

On définit alors une suite $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ de variables aléatoires à valeurs dans E par :

$$Y_0 = e, \quad Y_{n+1} = g[X_{n+1}] Y_n$$

Y_n est donc le rangement des livres à l'instant n . Y constitue à l'évidence une chaîne de Markov sur E . La classe de e est essentielle et apériodique lorsque $p_{e(s)} = 0$ implique que $p_{e(t)} = 0$ pour tout $t \succ s$, hypothèse que nous ferons désormais. Cette chaîne est appelée une librairie, et on s'intéresse à ses propriétés de récurrence.

Si l'arbre (T, A) est linéaire, la question est résolue dans : G. Letac (1974). Nous démontrons ici (théorème 2) un résultat conjecturé par P. Nelson, à savoir que notre librairie n'est jamais récurrente positive dans le cas infini non linéaire.

4) Une mesure stationnaire

Théorème 1 : Si $\pi \in E$ on pose $q_s(\pi) = \sum_{s \leq t} p_{\pi(t)}$.

Alors $u_{\pi} = \prod_{s \in T} \frac{q_s(e)}{q_s(\pi)}$ est une mesure stationnaire de la librairie.

Esquisse de démonstration : On vérifie facilement que $(u_\pi)_\pi \in E$ est une mesure stationnaire si et seulement si :

$$\sum_{t \in T} P_{\pi(\omega)} \frac{u_{h(t)\pi}}{u_\pi} = 1 \quad \text{pour tout } \pi.$$

Or la définition de u_π entraîne que

$$\frac{u_{h(t)\pi}}{u_\pi} = \prod_{s \in T} \frac{q_s(\pi)}{q_s(h(t)\pi)} = \prod_{s \leq t} \frac{q_s(\pi)}{q_s(\pi) - p_{\pi(s)} + p_{\pi(\omega)}}$$

car $q_s(h(t)\pi) - q_s(\pi) = p_{\pi(\omega)} - p_{\pi(s)}$ si $s \leq t$

= 0 sinon.

Posant $\alpha_s = p_{\pi(s)}$, $\beta_s = \sum_{s \leq t} \alpha_t$, il reste à vérifier que :

$$\sum_t \alpha_\omega \prod_{s \leq t} \frac{\beta_s}{\beta_s - \alpha_s + \alpha_\omega} = 1$$

si $\alpha_t \geq 0$ et $\sum_{t \in T} \alpha_t = 1$; une démonstration probabiliste de cette

identité se fait en considérant une chaîne de Markov $(Z_n)_{n=0}$ sur T ,

d'état initial $Z_0 = \omega$ et de transition :

$$p_{s,t} = \frac{\alpha_t}{\beta_s - \alpha_s + \alpha_\omega} \quad \text{si } s \leq t \text{ et } |t - s| = 1,$$

$$p_{s,\omega} = \frac{\alpha_\omega}{\beta_s - \alpha_s + \alpha_\omega}$$

Le premier membre de l'égalité à démontrer est la probabilité

$P[Z_n > 0, Z_n = \omega]$. Comme :

$$P[Z_{n+1} = \omega | Z_n] = \frac{\alpha_\omega}{\beta_{Z_n} - \beta_{Z_n} + \alpha_\omega} \geq \frac{\alpha_\omega}{1 + \alpha_\omega} > 0,$$

le théorème du renouvellement permet de conclure.

5) Le cas fini

Si (T, A) est un arbre fini, on peut lui associer une caractéristique fort utile : c'est le nombre :

$$K(T) = \frac{|T|!}{\prod_{t \in T} \# \{s ; s \geq t\}}$$

où $|T|$ est le nombre de sommets. On montre sans difficulté que $K(T)$ est un entier positif.

Dans le cas où T est fini, le théorème précédent peut être précisé grâce à la proposition suivante :

Proposition 1 : Si T est fini, alors :

$$\sum_{\pi \in E} \frac{1}{q_t(\pi)} = \frac{K(T)}{\prod_{b \in B} p_b}$$

La démonstration est assez fastidieuse : elle procède par récurrence non sur le nombre de sommets de T , mais sur le nombre N de branches "issues du tronc" : convenons de dire que s appartient au tronc si pour tout t de T , ou bien $s \leq t$ ou bien $s \geq t$. Si s_0 est le plus grand élément du tronc, N est le nombre de t de T tels que $t \geq s_0$ et $|s - t_0| = 1$.

L'utilité de $K(T)$ est qu'il donne une mesure de la linéarité de l'arbre. En particulier $K(T) = 1$ si et seulement si l'arbre est linéaire. Semblablement :

Proposition 2 : Soit T infini et $\mathbb{N} \rightarrow T$ une bijection telle que $t_0 = \omega$ et $T_k = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ soit un arbre pour la structure induite. Alors si T n'est pas linéaire, $K(T_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$.

Démonstration : Soit t_0 le plus grand élément du tronc. Soit t_0 tel que $t_{n_0} = s_0$. Alors $K(T_k) = 1$ si $k \leq n_0$. Prenant k assez grand, soit N_k le nombre de branches issues du tronc de T_k ; N_k est croissant et ≥ 2 à partir d'un certain rang, T n'étant pas linéaire. Si $s_1, s_2, \dots, s_{N_k}$ sont supérieurs à s_0 et tels que $|s_i - s_0| = 1$ avec $i = 1, 2 \dots N_k$ il est clair que :

$$K_{T_k} \geq \frac{(k - n_0)!}{m_1! m_2! \dots m_{N_k}!}$$

où $m_i = \# \{s ; s \in T_k \text{ et } s \geq s_i\}$ pour $i = 1, \dots, N_k$ comme on a
 $m_i \geq 1$ et $m_1 + \dots + m_{N_k} = k - n_0$. On a $K_{T_k} \geq k - n_0$ et donc

$$K_{T_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

6) La librairie dans le cas infini non-linéaire

Théorème 2 : Si $p_b > 0$ pour tout b dans B , si T est infini et non linéaire, la librairie n'est jamais récurrente positive.

Démonstration : Il suffit de montrer que $\sum_{\pi \in E} u_\pi = \infty$, où $(u_\pi)_{\pi \in E}$ est défini au théorème 1. L'idée est d'approcher la librairie par une librairie finie. Soit une application $k \mapsto T_k$ de $\mathbb{N}$ dans T satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2. On pose $B_k = e(T_k)$, $\text{Ext } T_k$ l'ensemble des sommets maximaux de T_k , et E_k l'ensemble des π de E tels que

$\pi(t) = e(t)$ si $t \notin T_k$. On munit B de la probabilité $p^{(k)}$ suivante :

$$p_b^{(k)} = 0 \text{ si } b \notin B_k, \quad p_b^{(k)} = e^{-1}(b) \in T_k \setminus \text{Ext } T_k \text{ et}$$

$$p_b^{(k)} = q_t(e) \text{ si } t = e^{-1}(b) \in \text{Ext } T_k. \text{ On pose enfin :}$$

$$q_t^{(k)}(\pi) = \sum_{s \geq t} p_{\pi(s)}^{(k)} \text{ si } \pi \in E_k.$$

Il est clair que $p_{e(t)}^{(k)} \leq q_t(e)$ si $t \in T_k$

et que $q_t(\pi) \leq q_t^{(k)}(\pi)$ si $t \in T_k$ et $\pi \in E_k$

Donc $u_\pi \geq \prod_{t \in T_k} \frac{p_{e(t)}^{(k)}}{q_t^{(k)}(\pi)}$ si $\pi \in E_k$. Donc, d'après la

proposition 1 :

$$\sum_{\pi \in E} u_\pi \geq \sum_{\pi \in E_k} u_\pi \geq K(T_k)$$

Comme d'après la proposition 2, $\lim_{k \rightarrow \infty} K(T_k) = \infty$, on a le résultat.

B I B L I O G R A P H I E

G. LETAC

- 1974 "Transience and recurrence of an interesting Markov chain"
J. of Appl. Prob. 11, 818 - 824.
- 1975 "Librairies" Rapport technique C.R.M. 569. Centre de
Recherches mathématiques de l'Université de Montréal,
- 1976 "Récurrence des librairies" C.R.A.S. Juillet 1976. Tome 283,
49 - 52.

P. NELSON

- 1975 Ph. D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland
Ohio.