

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J. DUCHON

Fonctions-spline et espérances conditionnelles de champs gaussiens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 61, série *Mathématiques*, n° 14 (1976), p. 19-27

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__61_14_19_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS-SPLINE ET ESPERANCES CONDITIONNELLES DE CHAMPS
GAUSSIENS

J. DUCHON, UNIVERSITE DE GRENOBLE

Introduction

Soit $(X_t, t \in T)$ une fonction aléatoire gaussienne centrée, $K(t, t') = \mathbb{E}(X_t X_{t'})$ son noyau de covariance, $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^T$ l'espace hilbertien autoreproduisant associé, et A fini $\subset T$. Pour chaque $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{u \in \mathcal{H} : u(a) = X_a(\omega), a \in A\}$ est un sous-espace affine fermé de \mathcal{H} , qui a un élément unique de norme minimale, soit $(t \mapsto X_t^A(\omega))$. Il est facile de voir qu'alors on a $X_t^A = \mathbb{E}(X_t \mid X_a, a \in A)$. En d'autres termes, on obtient l'espérance conditionnelle de X connaissant les X_a (c'est à dire la meilleure approximation, au sens de la moyenne quadratique, de X par une fonction des X_a) en minimisant la norme dans \mathcal{H} .

Or, il existe des méthodes d'interpolation des fonctions dans lesquelles on choisit de minimiser non pas une norme, mais une semi-norme quadratique, par exemple $|v|_m = (\int |v^{(m)}|^2)^{1/2}$, sous des contraintes telles que : $v(a) = f(a)$ donnés pour $a \in A$ fini $\subset \mathbb{R}$. On obtient ainsi des fonctions-spline qui, dans ce cas particulier, sont de la forme

$$\sum_{a \in A} \lambda_a (t-a)_+^{2m-1} + v(t)$$
 où v est un polynôme de degré $\leq m-1$ et
$$\sum_{a \in A} \lambda_a a^k = 0$$
 pour $k = 0, 1, \dots, m-1$. Voir par exemple le livre de P.J. LAURENT [6] et sa bibliographie.

Le but de cet article est de présenter des situations probabilistes dans lesquelles on obtient des sortes d'espérances conditionnelles comme fonctions-spline, c'est à dire en minimisant une semi-norme quadratique. Le formalisme englobe, d'un côté, les "fonctions aléatoires intrinsèques généralisées" de G. MATHERON [7], de l'autre des types récents de fonctions-spline à plusieurs variables [1], [2]. Le résultat généralise ceux de G.S. KIMELDORF et G. WAHBA [3], [4], [5].

Définissons d'abord précisément ces "sortes d'espérances conditionnelles" : soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité, \mathcal{N} l'ensemble des fonctions réelles P -négligeables sur Ω , $\mathcal{L}^p(\mathcal{A}) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ celui des fonctions réelles \mathcal{A} -mesurables sur Ω dont la puissance p -ième est P -intégrable ; soit d'autre part \mathcal{B} une tribu sur Ω , non nécessairement contenue dans \mathcal{A} , et $\mathcal{L}^0(\mathcal{B})$ l'ensemble des fonctions réelles \mathcal{B} -mesurables sur Ω .

Définition

Posons pour toute $X \in \mathbb{R}^\Omega$:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X = \{Z \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B}) : Z-X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}) \text{ et } \int_B (Z-X) dP = 0 \forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}\}$$

Proposition

$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$ est non vide si et seulement si $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A}) + \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$. Si $Z \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$, alors $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X = Z + \mathcal{N} \cap \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$. Si $\bar{Z} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$ avec $\bar{Z}-X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ et $\int_{\Omega} |\bar{Z}-X|^2 dP = \inf \{ \int_{\Omega} |Z-X|^2 dP : Z \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B}), Z-X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A}) \}$, alors $Z \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$. Enfin, dans le cas où $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ on a $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X = \mathbb{E}^{\mathcal{B}} X$, espérance conditionnelle usuelle.

Démonstration

Si $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$ est non vide, on a $X = Z - (Z-X) \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B}) + \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$.

Réciproquement, si $X = X' + X''$ où $X' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ et $X'' \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^{\mathcal{B} \cap \mathcal{A}} X'$ existe et contient $Z' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B} \cap \mathcal{A})$ qui vérifie $\int_B X' = \int_B Z' \forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$. Alors $Z' + X'' \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$.

Soit $Z, Z' \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X$. On a $Z-Z' \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$ et $Z-Z' = Z-X - (Z'-X) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$, donc $Z-Z' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, avec $\int_B (Z-Z') dP = 0, \forall B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$, donc $Z-Z'$ est P -négligeable.

Soit $\bar{Z} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$ telle que $\bar{Z} - X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ et $\int_{\Omega} |\bar{Z}-X|^2 dP \leq \int_{\Omega} |Z-X|^2 dP, \forall Z \in \mathcal{L}^0(\mathcal{B})$ telle que $Z-X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$. Appliquant cette

inégalité à $Z = \bar{Z} + t 1_B$, $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{a}$, et faisant tendre t vers 0, on obtient $\int_B (\bar{Z} - X) dP = \int_{\Omega} (\bar{Z} - X) 1_B dP = 0$, d'où $\bar{Z} \in \mathbb{E}_{\mathcal{a}}^{\mathcal{B}} X$. \square

Soit E un espace localement convexe séparé, E' son dual, N un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , et \mathcal{H} un sous-espace semi-hilbertien de E d'espace nul N , c'est à dire un sous-espace vectoriel de E , contenant N , muni d'une semi-norme $\| \cdot \|$ (vérifiant $\|u\| = 0 \iff u \in N$) telle que \mathcal{H}/N avec la norme $u+N \mapsto \|u\|$ soit hilbertien et que l'injection $\mathcal{H}/N \hookrightarrow E/N$ soit continue. Supposons en outre que \mathcal{H} soit dense dans E . Alors $\| \xi \|_* = \sup \{ \xi(u) : \|u\| \leq 1 \}$ définit une norme sur N° , orthogonal de N dans E' ($N^\circ = \{ \xi \in E' : \xi(v) = 0 \forall v \in N \}$).

Soit Ω un ensemble (sans structure pour l'instant) et X une application $(\omega, \xi) \mapsto X_\xi(\omega)$ de $\Omega \times E'$ dans \mathbb{R} , linéaire en ξ . Soit encore $\xi_1, \dots, \xi_n \in E'$ avec la propriété suivante : si $v \in N$ et $\xi_1(v) = \dots = \xi_n(v) = 0$, alors $v = 0$. (On peut dire que $\{ \xi_1, \dots, \xi_n \}$ contient un

Soit enfin $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{R}^\Omega$.

\mathcal{a} la tribu sur Ω engendrée par les X_ξ , $\xi \in N^\circ$, et par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, et \mathcal{B} la tribu sur Ω engendrée par $X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \dots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n$. On voit que (sauf si $N = \{0\}$) \mathcal{B} n'est pas une sous-tribu de \mathcal{a} .

Soit P une probabilité sur (Ω, \mathcal{a}) ayant les propriétés suivantes :

- 1°) Pour chaque $\xi \in N^\circ$, X_ξ est une v.a. gaussienne centrée de variance $\mathbb{E} |X_\xi|^2 = \int_{\Omega} |X_\xi(\omega)|^2 dP(\omega) = \| \xi \|_*^2$.
- 2°) $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont des v.a. gaussiennes centrées de variances respectives $\mathbb{E} |\varepsilon_i|^2 = \beta_i \geq 0$, c'est à dire de loi $N(0, \sqrt{\beta_i})$, deux à deux indépendantes, chacune étant indépendante de chaque X_ξ , $\xi \in N^\circ$.

Remarque

Il est possible de construire Ω , X , $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ et P à partir de la donnée de E , N , \mathcal{H} et $\beta_1, \dots, \beta_n (\geq 0)$, de la manière suivante :

on considère la probabilité cylindrique gaussienne canonique sur l'espace hilbertien \mathcal{H}/N , elle se transforme en une probabilité sur E'^*/N par l'injection $\mathcal{H}/N \hookrightarrow E'^*/N$, puis en une probabilité μ sur E'^* (muni de la tribu engendrée par N^0) ; on peut alors prendre $\Omega = E'^* \times \mathbb{R}^n$ et $P = \mu \otimes N(0, \sqrt{\beta_1}) \otimes \dots \otimes N(0, \sqrt{\beta_n})$. Ensuite, on posera $\omega = (e'^*, z_1, \dots, z_n)$ et $X_\xi(\omega) = e'^*(\xi)$, $\varepsilon_i(\omega) = z_i$.

Nous allons nous intéresser aux "espérances conditionnelles".

$\mathbb{E}_a(X_\xi \mid X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \dots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n) = \mathbb{E}_a^{\mathcal{B}} X_\xi$, c'est à dire à estimer X en fonction des données $X_{\xi_1} + \varepsilon_1$, les ε_i représentant des erreurs d'observation.

Théorème

Pour chaque $\omega \in \Omega$, il existe $Z(\omega)$ unique $\in \mathcal{H}$ tel que :

$$\begin{aligned} ||Z(\omega)||^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} |X_{\xi_i}(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - \xi_i(Z(\omega))|^2 \\ \leq ||u||^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} |X_{\xi_i}(\omega) + \varepsilon_i(\omega) - \xi_i(u)|^2 \end{aligned}$$

$\forall u \in \mathcal{H}^*$. Ensuite, $\xi(Z) \in \mathbb{E}_a(X_\xi \mid X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \dots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n)$,
 $\forall \xi \in E'$.

Démonstration

Il résulte de la théorie des fonctions-spline [6] que :

1°) pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $\sigma \in \mathcal{H}$ unique vérifiant
 $||\sigma||^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} |z_i - \xi_i(\sigma)|^2 \leq ||u||^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} |z_i - \xi_i(u)|^2$
 $\forall u \in \mathcal{H}$ (existence et unicité de la fonction spline) ;

2°) pour tout $\xi \in E'$, il existe $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) \in \mathbb{R}^n$ unique tel que

(*) Comme les β_i peuvent être nuls, on convient ici que $\frac{1}{0} = \infty$ et $\infty \cdot 0 = 0$.

$$\xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \in N^0 \text{ et } \left\| \xi - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \xi_i \right\|_* + \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\lambda}_i^2 \leq \left\| \xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \right\|_*^2$$

+ $\sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \in N^0$ (existence et unicité de fonctionnelle approximante optimale au sens de Sard) ; enfin,

3°) on a $\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i z_i = \xi(\sigma)$, c'est à dire qu'on obtient la fonctionnelle approximante optimale en appliquant la fonctionnelle à approcher à la fonction-spline. La démonstration n'est faite dans [6] que pour des β_i tous nuls ou tous > 0 , mais ce n'est nullement essentiel. D'autre part, il faudrait munir \mathcal{H} d'une structure hilbertienne : on peut prendre par exemple la norme $\| |u| \|^2 = \|u\|^2 + \sum_{i=1}^n |\xi_i(u)|^2$, et remarquer qu'alors $E' \subset \mathcal{H}'$ puisque \mathcal{H} est dense dans E .

Le théorème se présente comme une interprétation probabiliste de cette propriété. On remarque d'abord que

$$\left\| \xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \right\|_*^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^2 = \mathbb{E} \left| X_\xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i) \right|^2$$

de sorte que Z vérifie $\mathbb{E} |X_\xi - \xi(Z)|^2 \leq \mathbb{E} \left| X_\xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i) \right|^2$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi - \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \in N^0$, ou encore

$$\mathbb{E} \left[(X_\xi - \xi(Z)) \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i) \right] = 0,$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \in N^0$. Comme $\xi(Z) = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)$,

$\xi(Z)$ est \mathcal{B} -mesurable. D'autre part, le vecteur

$$(X_\xi - \xi(Z), \sum_{i=1}^n \alpha_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)) = \left(X_\xi - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \xi_i - \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \varepsilon_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \right)$$

est gaussien centré, donc l'orthogonalité de ses composantes implique

leur indépendance : $X_\xi - \xi(Z)$ est indépendant des $\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_{\xi_i} + \varepsilon_i)$ où

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \in N^0$, qui engendrent la tribu $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. On a donc pour tout

$B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$: $\mathbb{E} [(X_\xi - \xi(Z)) 1_B] = \mathbb{E} (X_\xi - \xi(Z)) \cdot P(B) = 0$, c'est-à-

dire $\int_B (X_\xi - \xi(Z)) dP = 0$, autrement dit

$$\xi(Z) \in \mathbb{E}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} X_\xi = \mathbb{E}_{\mathcal{A}} (X_\xi \mid X_{\xi_1} + \varepsilon_1, \dots, X_{\xi_n} + \varepsilon_n).$$

Remarque

On voit que grâce au fait que "tout est gaussien", Z est la meilleure estimation (au sens de la moyenne quadratique) de X non seulement parmi les fonctions linéaires des données, mais même parmi toutes les fonctions des données.

Exemple 1 : Fonctions-spline polynomiales et primitives
du mouvement brownien

Les fonctions-spline polynomiales (sur $[0, 1]$ par exemple) de degré $2m-1$, relatives à un ensemble fini A de "noeuds" $\epsilon [0, 1]$, sont par définition les fonctions de la forme $\sigma(t) = \sum_{a \in A} \lambda_a (t-a)_+^{2m-1} + v(t)$ où $v \in P_{m-1}$ et $\sum_{a \in A} \lambda_a a^k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Elles sont caractérisées par la propriété variationnelle suivante : $\int_0^1 |\sigma^{(m)}|^2 \leq \int_0^1 |f^{(m)}|^2$ si $f = \sigma$ sur A. L'espace semi-hilbertien \mathcal{H} est ici l'espace de Sobolev $H^m(0, 1)$ muni de la semi-norme $|v|_m = (\int_0^1 |v^{(m)}|^2)^{1/2}$. Le modèle probabiliste correspondant peut être construit de la façon suivante : on considère la mesure de Wiener W du mouvement brownien, sur $C[0, 1]$, on la transporte sur $C^{m-1}[0, 1]$ par l'application "primitive (m-1)-ième" T^{m-1} où $Tf(t) = \int_0^t f(s) ds$, enfin on la restreint à la tribu engendrée par les $\xi \in C^{m-1}[0, 1]$ orthogonales à P_{m-1} . On peut alors poser $\Omega = C^{m-1}[0, 1]$ (ou $C^{m-1}[0, 1] \times R^A$ s'il est nécessaire d'introduire des "erreurs" ϵ_a , $a \in A$) et $X_\xi(\omega) = \xi(\omega)$ pour $\xi \in C^{m-1}[0, 1]$, avec $P = W_0(T^{m-1})^{-1}$ (éventuellement composée avec une probabilité gaussienne sur R^A). Le fait que l'espace semi-hilbertien associé soit $H^m(0, 1)$ muni de la semi-norme $|\cdot|_m$ se déduit facilement de ceci, qui est bien connu : l'espace hilbertien autoreproduisant associé au mouvement brownien est $\{u \in H^1(0, 1) : u(0) = 0\}$ muni de $|u|_1 = (\int_0^1 |u'|^2)^{1/2}$

Exemple 2 : fonctions-spline homogènes sur \mathbb{R}^d
et champs aléatoires intrinsèques

Appelons fonctions-spline homogènes de degré θ (réel > 0), d'espace nul N , relatives à un ensemble fini $A \subset \mathbb{R}^d$, les fonctions de la forme :

$$(*) \quad \sigma(t) = \sum_{a \in A} \lambda_a K_\theta(t-a) + v(t)$$

où $v \in N$ et $\sum \lambda_a p(a) = 0 \quad \forall p \in N$, et on a posé $K_\theta(t) = |t|^\theta$ si θ n'est pas un entier pair, $K_{2k}(t) = |t|^{2k} \text{Log } |t|$ pour $t \neq 0$, $K_{2k}(0) = 0$. On peut montrer [2] que si $N = P_{m-1}$ où $m < \frac{\theta}{2}$, et si A contient un sous-ensemble P_{m-1} -unisolvant, il existe une fonction unique de la forme (*) prenant des valeurs imposées aux points de A . Il s'agit bien de fonctions-spline : si on pose

$$\tilde{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) : \hat{u} \in L^1_{loc} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} |\tau|^{2s} |\hat{u}(\tau)|^2 d\tau < \infty\}$$

(c'est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_{0,s} = (\int_{\mathbb{R}^d} |\tau|^{2s} |\hat{u}(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$ du moins si $s < \frac{d}{2}$), et

$$D^{-m} \tilde{H}^s = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) : D^\alpha u \in \tilde{H}^s(\mathbb{R}^d) \quad \forall |\alpha| = m\}$$

avec la semi-norme $\|u\|_{m,s} = (\int_{\mathbb{R}^d} |\tau|^{2s} |(D^m u)^\wedge(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$, alors la fonction σ ci-dessus a la propriété variationnelle suivante :

$$\|\sigma\|_{m,s} \leq \|f\|_{m,s} \text{ pour toute fonction } f \text{ prenant les mêmes valeurs que } \sigma \text{ sur } A \text{ (avec } s = \frac{\theta+d}{2} - m).$$

Le procédé d'interpolation par des fonctions de la forme (*) commute avec les translations, rotations et changements d'échelle, d'où le nom de fonctions-spline homogènes. (Cela peut se voir soit sur la semi-norme $\|\cdot\|_{m,s}$, qui est multipliée par $|\lambda|^c$ si un changement de variable $t \rightarrow \lambda t$ est effectué ; ou sur la forme explicite (*), compte tenu de $|\lambda t|^\theta = |\lambda|^\theta |t|^\theta$ et $|\lambda t|^{2k} \text{Log } |\lambda t| = |\lambda|^{2k} |t|^{2k} \text{Log } |t| + \text{un polynôme de degré } 2k \leq 2m-1$).

Plus généralement, on peut considérer, au lieu d'un ensemble A de points de \mathbb{R}^d , des distributions à support compact μ_1, \dots, μ_n , et étu-

dier les fonctions (ou distributions) de la forme $\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i * K_\theta + \nu$
 où $\nu \in P_{m-1}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \in P_{m-1}^0$. Dans ce cas, on peut avoir $\theta \geq 0$. Si
 les μ_i appartiennent à l'espace de Sobolev $H^{-\frac{\theta+d}{2}}(\mathbb{R}^d)$, σ appartient
 à $H_{loc}^{\frac{\theta+d}{2}}$, et si de plus $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ contient un sous-ensemble P_{m-1}^-
 unisolvent, alors le système linéaire obtenu en écrivant $\mu_i(\sigma) = z_i$
 connu ($i = 1, \dots, n$) détermine $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et ν , et on a encore la
 propriété variationnelle $\|\sigma\|_{m,s} \leq \|f\|_{m,s}$ pour toute $f \in H_{loc}^{\frac{\theta+d}{2}}$ telle
 que $\mu_i(f) = \mu_i(\sigma)$ ($i = 1, \dots, n$), avec $s = \frac{\theta+d}{2} - m$.

Les modèles probabilistes associés sont des "fonctions (ou
 distributions) aléatoires intrinsèques" : des applications $(\omega, \mu) \mapsto$
 $X_\mu(\omega)$ de $\Omega \times E'$ dans \mathbb{R} , linéaires en μ , avec $E =$ un espace de distribu-
 tions sur \mathbb{R}^d (ici $E = H_{loc}^{\frac{\theta+d}{2}}$, $E' = H_{comp}^{-\frac{\theta+d}{2}}$) telles que les X_μ , $\mu \in P_{m-1}^0$
 soient des v.a. (gaussiennes) centrées, de covariance $E(X_\mu X_\nu) =$
 $\langle \mu * K_\theta, \nu \rangle$.

Références

- [1] J. DUCHON : Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle, Série rouge (Analyse numérique), 10-12 (1976).
- [2] J. DUCHON : Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. A paraître dans Mehrdimensionale konstruktive Funktionentheorie, Lecture Notes, Springer (1977).
- [3] G.S. KIMELDORF et G. WAHBA : A correspondence between Bayesian estimation on stochastic processes and smoothing by splines. Ann. Math. Stat. 41 (1970), 495-502.
- [4] G.S. KIMELDORF et G. WAHBA : Spline functions and stochastic processes, Sankhyā, 132-2 (1970), 173-180.
- [5] G.S. KIMELDORF et G. WAHBA : Some results on Tchebycheffia spline functions. J. Math. Anal. Appl. 33-1 (1971), 82-95.
- [6] P.J. LAURENT : Approximation et optimisation. Hermann (1972)
- [7] G. MATHERON : The intrinsic random functions and their applications, Advances in Applied Probability (1973).