ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

RENÉ DUJOLS

Le résultat de Karp-Myhill dans (1) est, en un sens, le meilleur possible

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 60, série *Mathématiques*, n° 13 (1976), p. 77-80

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__60_13_77_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont, Sér. Math., fasc. 13, 1976, pp. 77-80

LE RESULTAT DE KARP-MYHILL DANS (1) EST, EN UN SENS, LE MEILLEUR POSSIBLE

René DUJOLS

Université de CLERMONT-FD, France

§ 1. PRELIMINAIRES. Pour les définitions et notations récursives (non données ici) nous nous référons à l'ouvrage de H. Rogers jr. cité en (2). $\leq_i$ désignera la i-réductibilité, $\equiv_i$ l'équivalence récursive, $\simeq$ l'isomorphisme (récursif), δ_α le domaine de α , ρ_α l'image de α .

On rappelle : $A \simeq A'$ via $f \Leftrightarrow f(A) = A'$

$$A \leq_i A' \text{ via } \alpha \Leftrightarrow \alpha^{-1}(A') = A$$

N est l'ensemble des entiers naturels, on pose $\bar{A} = N - A$ et $aN + i = \{ax + i \,/\, x \in N\}$.

Un isomorphisme est une permutation récursive de N, un isomorphisme partiel est une fonction (partielle) récursive.

§ 2. INTRODUCTION. Le théorème de l'appendice de (1) , dû à Karp et Myhill peut être réécrit sous la forme un peu plus générale suivante :

THEOREME 1. (Karp-Myhill) - Pour tout couple (α_1, α_2) d'isomorphismes partiels tels qu'il existe des recouvrements en parties disjointes (A_1, A_2) de $\delta_{\alpha_1} \cup \alpha_2$ et (B_1, B_2) de $\rho_{\alpha_1} \cup \alpha_2$ vérifiant $\forall j \in \{1,2\}$ $A_j \leq_i B_j$ via α_j on peut trouver uniformément un isomorphisme partiel θ tel que pour tous recouvrements en parties disjointes (A_1, A_2) et (B_1, B_2) dans la situation ci-dessus on a : $\forall j \in \{1,2\}$ $A_j \leq_i B_j$ via θ .

Nous montrons ici

1) Le théorème n'est plus valide si on supprime l'hypothèse de recouvrement pour l'un des couples ;

2) Le théorème n'est plus valide si l'on considère des triplets et par suites des n-uples avec $n \geq 3$.

Pour établir ces deux points nous construisons deux contre-exemples sous des conditions aussi fortes que possible, i.e. nous construisons deux contre-exemples avec des isomorphismes.

§ 3. PROPOSITION 2. Il existe des isomorphismes f_1, f_2 et des ensembles A_1, A_2, B_1, B_2 vérifiant :

1) $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = N$

2) $\forall i \in \{1,2\}$ $A_i \simeq B_i$ via f_i

3) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1,2\}$ $A_i \simeq B_i$ via h.

DEMONSTRATION : Soit f_1, f_2 des isomorphismes vérifiant $f_1(2N) = 4N + 1$, $f_1(4N + 1) = 4N + 3$, $f_2(2N) = 4N$ et $f_2(4N + 3) = 4N + 2$.

Soit $h_1, h_2, \ldots$ une énumération de tous les isomorphismes h vérifiant : $h(2N) \cap (4N)$ est infini.

On construit par récurrence une suite infinie $a_0, a_1, \ldots$

Etape 0. $a_0 = 0$.

Soit $U_n = h_n^{-1}(h_n(2N) \cap 4N)$

Etape n + 1 : $a_{n+1} = \mu x \left[x \in U_{n+1} - \{0, \ldots, a_n + 2\} \right]$

Soit $A_1 = \{a_0, \ldots, a_n, \ldots\} \cup (4N + 3)$, $A_2 = N - A_1$,

$B_1 = f_1(A_1)$, $B_2 = f_2(A_2)$.

On a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = N$ et $A_2 \cap 2N$ est infini.

$B_1 \subset (4N + 1) \cup (4N + 3)$ et $B_2 \subset 4N \cup (4N + 2)$ donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Supposons que h est un isomorphisme tel que $\forall i \in \{1,2\}$ $h(A_i) = B_i$.

On a $f_2(A_2 \cap N) \subset h(2N) \cap (4N)$, donc il existe $k \in N$ tel que $h_k = h$.

Par suite $h(a_k) = h_k(a_k)$ et $h(a_k) \in 4N$ ce qui contredit $h(A_1) = B_1$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 2. Il existe $\aleph_0$ couples d'isomorphismes (f_1, f_2) tels que pour chaque couple (f_1, f_2) il existe $2^{\aleph_0}$ couples d'ensembles (A_1, A_2) et (B_1, B_2) satisfaisant aux conditions i), ii) et iii) de la proposition 1.

§ 4. PROPOSITION 3. Il existe des partitions (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) de N tel que

i) $\forall i \in \{1,2,3\}$ $A_i \simeq B_i$

ii) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1,2,3\}$ $A_i \simeq B_i$ via h.

DEMONSTRATION. Soit f_1, f_2, f_3 les isomorphismes définis par

$$f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \notin 4N+3 \\ x-3 & \text{si } x \in 4N+3 \end{cases}$$

$$f_2(x) = x$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \notin 4N \\ x+3 & \text{si } x \in 4N \end{cases}$$

On dira : $f \neq h$ un peu partout si $\{x/f(x) \neq h(x)$ est infini$\}$.

Soit $k_o, k_1, \ldots$ une énumération de tous les isomorphismes k vérifiant $k \neq f_1$ un peu partout.

Soit $l_o, l_1, \ldots$ une énumération de tous les isomorphismes l vérifiant $l \neq f_3$ un peu partout.

Par récurrence, nous construisons trois chaînes croissantes d'ensembles finis .

$X_o \subset X_1 \ldots, Y_o \subset Y_1 \ldots, Z_o \subset Z_1 \ldots$ telles que pour tout n

$U_n = X_n \cup Y_n \cup Z_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n)$.

Etape 0 : $X_o = Y_o = Z_o = \emptyset$.

Etape 2s+ 1 : Il existe $a \notin U_{2s}$ tel que $k_s(a) \neq f_1(a)$.

On pose $X_{2s+1} = X_{2s} \cup \{a\}$

$$Z_{2s+1} = \begin{cases} Z_{2s} \cup \{a+1\} & \text{si } a \notin 4N+3 \\ Z_{2s} \cup \{a-3\} & \text{si } a \in 4N+3 \end{cases}$$

Soit $u = \text{Max}\ \{4i+3/4i \leq a \leq 4i+3$ ou $4i \leq k_s(a) \leq 4i+3\}$

$$Y_{2s+1} = \{0, \ldots, u\} - (X_{2s+1} \cup Y_{2s+1}).$$

Etape 2s + 2 : Il existe $c \notin U_{2s+1}$ tel que $l_s(c) \neq f_3(c)$

On pose : $Z_{2s+2} = Z_{2s+1} \cup \{c\}$

$$X_{2s+2} = \begin{cases} X_{2s+1} \cup \{c-1\} & \text{si } c \notin 4N \\ X_{2s+1} \cup \{c+3\} & \text{si } c \in 4N \end{cases}$$

Soit $v = \text{Max}\ \{4i+3/4i \leq c \leq 4i+3$ ou $4i \leq l_s(c) \leq 4i+3\}$

$$Y_{2s+2} = \{0, \ldots, v\} - (X_{2s+2} \cup Z_{2s+2})$$

Soit $A_1 = \bigcup_{n \in N} X_n$, $A_2 = \bigcup_{n \in N} Y_n$, $A_3 = \bigcup_{n \in N} Z_n$.

$B_1 = f_1(A_1)$, $B_2 = f_2(A_2)$, $B_3 = f_3(A_3)$.

Pour tout $n \in N$, U_n est un segment initial de N.

(A_1, A_2, A_3) est une partition de N.

Par récurrence sur n on vérifie :

i) Les ensembles $f_1(X_n), f_2(Y_n), f_3(Z_n)$ sont disjoints deux à deux.

ii) $U_n = f_1(X_n) \cup f_2(Y_n) \cup f_3(Z_n)$.

Par suite (B_1, B_2, B_3) est une partition de N.

Supposons que h est un isomorphisme vérifiant

$\forall i \in \{1,2,3\} \quad h(A_i) = B_i$.

1) Si $h \neq f_1$ un peu partout, $h = k_s$ pour un entier s. A l'étape $2s + 1$, la récurrence introduit un élément a vérifiant :

$a \in A_1$ et $k_s(a) \notin B_1$. Ce qui contredit $h(A_1) = B_1$.

2) Sinon $h \neq f_3$ un peu partout, car $f_1 \neq f_3$ un peu partout. Alors $h = l_s$ pour un $s \in N$. A l'étape $2s + 2$, la récurrence introduit un élément c vérifiant :

$c \in A_3$ et $l_s(c) \notin B_3$. Ce qui contredit $h(A_3) = B_3$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

La proposition précédente se généralise clairement au cas des n-uples avec $n \geq 3$.

COROLLAIRE 4. Il existe $\aleph_0$ n-uples d'isomorphismes $(f_1, ..., f_n)$ tel que pour chaque n-uple $(f_1, ..., f_n)$ il existe $2^{\aleph_0}$ partitions $(A_1, ..., A_n)$ et $(B_1, ..., B_n)$ de N vérifiant

i) $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad A_i \simeq B_i$

ii) Pour aucun isomorphisme h on a : $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad A_i \simeq B_i$ via h.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J.C.E. DEKKER et J. MYHILL, Recursive Equivalence Types, University of California publications in mathematics, n.s., 3, 1960, p. 67-213.

(2) H. ROGERS Jr., Theory of Recursive functions and Effective Computability, Mc Graw-Hill Book Company, 1967.