ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DENISE BECCHIO

Calcul des séquents et déduction naturelle pour la logique trivalente de Lukasiewicz

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 60, série *Mathématiques*, n° 13 (1976), p. 55-73

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__60_13_55_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont, Sér. Math., fasc. 13, 1976, pp. 55-74

CALCUL DES SEQUENTS ET DEDUCTION NATURELLE POUR LA LOGIQUE TRIVALENTE DE LUKASIEWICZ

Denise BECCHIO

Université Claude Bernard, LYON, France

En 1971, lors du XIIIe Congrès International d'Histoire des Sciences à Moscou, Moisil soulevait le problème de l'adaptation de techniques de Gentzen pour les logiques à trois ou à plusieurs valeurs en signalant qu'il n'avait pas réussi à résoudre un tel problème (1). Aucun travail n'a été publié, à ma connaissance, sur ce sujet.

Le but de cet article est de présenter deux calculs des séquents et un système de déduction naturelle pour la logique trivalente de Lukasiewicz (2) (3) (4) (5) (6).

Dans cet article nous désignerons par LTL la logique trivalente de Lukasiewicz. Pour rendre la lecture plus aisée la plupart des démonstrations sont renvoyées en annexes.

I. Calcul des séquents à trois parties :

En logique bivalente classique les séquents ont deux parties : l'une correspondant à la valeur «vrai» et l'autre à la valeur «faux». Il paraît donc naturel pour LTL d'introduire des séquents à trois parties de la façon suivante :

On appelle séquent un triplet (Σ, Δ, Γ) *où* Σ, Δ, Γ, *sont des ensembles finis d'énoncés de* LTL *et on le note* $\Sigma | \Delta | \Gamma$.

Dans tout ce qui va suivre Σ, Δ, Γ, Σ', Δ', Γ', représenteront des ensembles finis d'énoncés et x et y des énoncés quelconques.

On dit que h *est un contremodèle de* $\Sigma | \Delta | \Gamma$ *si* h *donne la valeur* 1 *à* Σ, *la valeur* 2 *à* Δ *et la valeur* 0 *à* Γ.

On dit qu'un séquent est valide s'il n'a pas de contremodèle.

La recherche exhaustive des conditions qui autorisent l'introduction d'un signe logique dans l'une des parties d'un séquent conduit aux schémas d'inférences suivants :

(1) $\dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x}{\Sigma,Nx \mid \Delta \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma \mid \Delta,x \mid \Gamma}{\Sigma \mid \Delta,Nx \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma,x \mid \Delta \mid \Gamma}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,Nx}$

(Γ,x signifiant $\Gamma \cup \{x\}$)

(2) $\dfrac{\Sigma,y \mid \Delta \mid \Gamma \qquad \Sigma \mid \Delta,x,y \mid \Gamma \qquad \Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x}{\Sigma,x \to y \mid \Delta \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma,x \mid \Delta,y \mid \Gamma \qquad \Sigma \mid \Delta,x \mid \Gamma,y}{\Sigma \mid \Delta,x \to y \mid \Gamma}$

$$\dfrac{\Sigma,x \mid \Delta \mid \Gamma,y}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x \to y}$$

(3) $\dfrac{\Sigma,x \mid \Delta \mid \Gamma \qquad \Sigma \mid \Delta,x \mid \Gamma}{\Sigma,Mx \mid \Delta \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,Mx}$

(4) $\dfrac{\Sigma,x \mid \Delta \mid \Gamma \qquad \Sigma,y \mid \Delta \mid \Gamma}{\Sigma,x \vee y \mid \Delta \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma \mid \Delta,x,y \mid \Gamma \qquad \Sigma \mid \Delta,x \mid \Gamma,y \qquad \Sigma \mid \Delta,y \mid \Gamma,x}{\Sigma \mid \Delta,x \vee y \mid \Gamma}$

$$\dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x,y}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x \vee y}$$

(5) $\dfrac{\Sigma,x,y \mid \Delta \mid \Gamma}{\Sigma,x \wedge y \mid \Delta \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma \mid \Delta,x,y \mid \Gamma \qquad \Sigma,x \mid \Delta,y \mid \Gamma \qquad \Sigma,y \mid \Delta,x \mid \Gamma}{\Sigma \mid \Delta,x \wedge y \mid \Gamma}$

$$\dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x \qquad \Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,y}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x \wedge y}$$

(6) $- \mid Mx \mid -$ (- représentant l'ensemble vide)

lequel est un schéma d'inférence sans prémisse, c'est-à-dire un axiome.

On peut dériver tous les séquents valides (et ceux-là seulement) à partir des règles précédentes auxquelles on ajoute :

- Les axiomes : (7) $x \mid x \mid -$
  (8) $- \mid x \mid x$
  (9) $x \mid - \mid x$

- La règle d'atténuation :

(10) $\dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma}{\Sigma,x \mid \Delta \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma}{\Sigma \mid \Delta,x \mid \Gamma}$ $\qquad \dfrac{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma}{\Sigma \mid \Delta \mid \Gamma,x}$

La complétude du système vient de ce que pour toute application de l'une des règles

(1) - (5) soit

$$\frac{\sigma_1 , ..., \sigma_n}{\sigma}$$

1. σ a un contremodèle si et seulement si l'un des σ_i a un contremodèle.

2. Chaque σ_i est «plus simple» que σ (le nombre total de signes logiques de σ_i est inférieur strictement à celui de σ).

3. Si σ est valide et ne comporte pas de connecteur, il vient d'un axiome par des atténuations.

La notion de coupure pour le calcul bivalent admet ici une généralisation naturelle :

$$\frac{\Sigma,x \mid \Delta \mid \Gamma \qquad \Sigma' \mid \Delta',x \mid \Gamma' \qquad \Sigma'' \mid \Delta'' \mid \Gamma'',x}{\Sigma,\Sigma',\Sigma'' \mid \Delta,\Delta',\Delta'' \mid \Gamma,\Gamma',\Gamma''}$$

Bien entendu, il résulte de ce qui précède que la coupure est une règle dérivée des règles (1) - (10).

Un énoncé x *est universellement valide si et seulement si les deux séquents* $-|-|$ x *et* $-|x|-$ *sont valides.*

De manière équivalente x *est formellement démontrable dans* LTL *si et seulement si les deux séquents* $-|-|x$ *et* $-|x|-$ *sont dérivables.*

Un énoncé x *est possible si et seulement si le séquent* $-|-|x$ *est valide.*

De manière équivalente Mx *est démontrable dans* LTL *si et seulement si le séquent* $-|-|x$ *est dérivable.*

Remarque : Si l'on ne considère que les connecteurs $\rightarrow$ et N comme connecteurs primitifs, il suffit de conserver les règles (1) et (2) et les axiomes (7), (8) et (9). Si de plus le connecteur M est considéré comme connecteur primitif, il faut ajouter les règles (3) et (6) et ainsi de suite.

Mais si ce calcul des séquents est facile à construire, il présente cependant un inconvénient, il ne donne pas d'interprétation évidente de la déduction. C'est pourquoi nous avons essayé de construire un calcul des séquents à deux parties pour LTL.

II. Calcul des séquents à deux parties :

On appelle séquent un couple (Σ, Δ) *où* Σ,Δ *sont des ensembles finis d'énoncés de* LTL *et on note* $\Sigma \Rightarrow \Delta$. Σ *est appelé l'antécédent et* Δ *le conséquent.*

Dans tout ce qui va suivre Σ , Δ , Γ , Θ représenteront des ensembles finis d'énoncés et x et y des énoncés quelconques.

On dit que h *est un contremodèle de* $\Sigma \Rightarrow \Delta$ *si* h *donne la valeur* 1 *à* Σ *et les valeurs* 2 *ou* 0 *à* Δ .

On dit qu'un séquent est valide s'il n'a pas de contremodèle.

La recherche exhaustive des conditions qui autorisent l'introduction d'un signe logique dans l'une des parties d'un séquent conduit aux schémas d'inférences suivants :

$$(1)\quad \frac{\Sigma,y \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,My \Rightarrow \Delta,x,y \qquad \Sigma,Nx,Ny \Rightarrow \Delta}{\Sigma,x \rightarrow y \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,x \Rightarrow \Delta,y \qquad \Sigma,Mx,Ny \Rightarrow \Delta,x}{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \rightarrow y}$$

$$(2)\quad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,Mx}{\Sigma,Nx \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,Mx \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,Nx}$$

$$(3)\quad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,Nx}{\Sigma,Mx \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x}{\Sigma \Rightarrow \Delta,Mx}$$

$$(4)\quad \frac{\Sigma,x \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,y \Rightarrow \Delta}{\Sigma,x \vee y \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x,y}{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \vee y}$$

$$(5)\quad \frac{\Sigma,x,y \Rightarrow \Delta}{\Sigma,x \wedge y \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \qquad \Sigma \Rightarrow \Delta,y}{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \wedge y}$$

On s'aperçoit alors que les prémisses de certaines de ces règles comportent des séquents dont l'antécédent ou le conséquent contient des énoncés de la forme Nx et Mx. Il est donc nécessaire de rechercher les conditions qui autorisent l'introduction de la négation de chacun des autres connecteurs et de la possibilité de chacun des autres connecteurs.
On obtient ainsi les schémas d'inférences suivants :

$$(6)\quad \frac{\Sigma,x,Ny \Rightarrow \Delta}{\Sigma,N(x \rightarrow y) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,M(x \rightarrow y) \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,N(x \rightarrow y)}$$

$$(7)\quad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \qquad \Sigma,x,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma,M(x \rightarrow y) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \rightarrow y}{\Sigma \Rightarrow \Delta,M(x \rightarrow y)}$$

$$(8)\quad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,Mx}{\Sigma,NMx \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,Mx \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,NMx}$$

$$(9)\quad \frac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x}{\Sigma,MNx \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,x \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,MNx}$$

$$(10)\quad \frac{\Sigma,Nx,Ny \Rightarrow \Delta}{\Sigma,N(x \vee y) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,Mx \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,N(x \vee y)}$$

$$(11)\quad \frac{\Sigma,Mx \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma,M(x \vee y) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,Nx,Ny \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,M(x \vee y)}$$

$$(12)\quad \frac{\Sigma,Nx \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,Ny \Rightarrow \Delta}{\Sigma,N(x \wedge y) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,Mx,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,N(x \wedge y)}$$

$$(13)\quad \frac{\Sigma,Mx,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma,M(x \wedge y) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Sigma,Nx \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,Ny \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,M(x \wedge y)}$$

On peut remarquer tout de suite que les schémas $\dfrac{\Sigma,M(x \to y) \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,N(x \to y)}$, $\dfrac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \to y}{\Sigma \Rightarrow \Delta,M(x \to y)}$,

$\dfrac{\Sigma,Mx \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma,M(x \vee y) \Rightarrow \Delta}$ et $\dfrac{\Sigma,Mx,My \Rightarrow \Delta}{\Sigma,M(x \wedge y) \Rightarrow \Delta}$ sont superflus puisqu'ils se déduisent immédiatement des schémas (2), (3), (10) et (12).

On peut dériver tous les séquents valides (et ceux-là seulement) à partir des règles précédentes auxquelles on ajoute :

- Le schéma d'axiome (14) $x \Rightarrow x$
- La règle d'atténuation (15) $\dfrac{\Sigma \Rightarrow \Delta}{\Sigma,x \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Sigma \Rightarrow \Delta}{\Sigma \Rightarrow \Delta,x}$

Nous savons (7) (8) (9) que l'implication lukasiewiczienne dans LTL peut s'exprimer à l'aide des trois connecteurs N, M et $\vee$ ou des trois connecteurs N, M et $\wedge$ et peut donc être considérée comme connecteur abréviateur. Autrement dit LTL peut être définie en utilisant par exemple les connecteurs N, M et $\vee$ comme connecteurs primitifs c'est-à-dire à l'aide des schémas d'inférences (2), (3), (4), (8), (9), (10) et (11).

La complétude du système découle alors immédiatement de cette remarque.

En effet, pour toute application de l'une des règles (2), (3), (4), (8), (9), (10) et (11) soit

$$\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_n}{\sigma}$$

1. σ a un contremodèle si et seulement si l'un des σ_i a un contremodèle.

2. Dans (4), (8), (9), (10) et (11) chaque σ_i est «plus simple» que σ si on attribue aux signes logiques un poids convenable (2 pour $\vee$ et 1 pour N et M par exemple).

3. Les séquents qui ne peuvent plus être simplifiés peuvent se mettre sous la forme $p_1, \ldots, p_n, Mq_1, \ldots, Mq_m \Rightarrow r_1, \ldots, r_p$ où les p_i , q_j , r_k sont des variables propositionnelles. Un tel séquent est valide si et seulement si l'un des p_i est égal à l'un des r_k. Sinon en donnant la valeur 1 à chacun des p_i et la valeur 2 à toute autre variable propositionnelle on définit un contremodèle.

La règle de coupure $\dfrac{\Sigma \Rightarrow \Delta,x \qquad \Gamma,x \Rightarrow \Theta}{\Sigma,\Gamma \Rightarrow \Delta,\Theta}$

respectant la validité est dérivable dans le système précédent.

Si on l'ajoute comme règle primitive on peut éliminer certaines règles (notamment $(2)_2$, $(3)_1$ et $(8)_1$).

Un énoncé x *est universellement valide si et seulement si le séquent* $- \Rightarrow x$ (- représentant l'ensemble vide) *est valide.*

De manière équivalente x *est formellement démontrable dans* LTL *si et seulement si le séquent* $- \Rightarrow x$ *est dérivable.*

Ce calcul des séquents à deux parties a néanmoins un certain défaut, il ne semble pas possible, comme dans le calcul des séquents à trois parties, de séparer les connecteurs dans les règles d'inférences. Toutefois, il paraît conduire à la déduction naturelle comme l'a montré J.-F. Pabion en construisant un système de déduction naturelle pour LTL que nous allons expliciter.

III. Déduction naturelle :

Pour simplifier la présentation du système de déduction naturelle nous n'utiliserons que les connecteurs N, M et $\to$ mais il est bien évident que nous pourrions aussi introduire les connecteurs $\vee$ et $\wedge$.

En plus des connecteurs nous introduirons un nouveau symbole : le symbole d'absurdité que nous noterons $\perp$.

Notre système comporte les règles d'introductions et d'éliminations des connecteurs suivantes :

Introductions		Eliminations	
I1.	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{x} & \cancel{Mx}\\ \vdots & \vdots\\ y & My\end{matrix}}{x \to y}$	E1.	$\dfrac{x \to y,\ x}{y} \qquad \dfrac{x \to y,\ Mx}{My}$
I2.	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{x}\\ \vdots\\ My\end{matrix}}{M(x \to y)}$	E2.	$\dfrac{M(x \to y),\ x}{My}$
I3.	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{x} & \cancel{Mx}\\ \vdots & \vdots\\ \perp & \perp\end{matrix}}{Nx}$	E3.	$\dfrac{Nx,\ x}{\perp} \qquad \dfrac{Nx,\ Mx}{\perp}$
I4.	$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{x}\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{MNx}$	E4.	$\dfrac{MNx,\ x}{\perp}$

I5. $\dfrac{\begin{array}{c} Np \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{Mp}$ (p étant une variable propositionnelle ou p = $\perp$)

E5. $\dfrac{Mx,\ Nx}{\perp}$

I6. $\dfrac{Mx}{MMx}$ $\dfrac{M\perp}{\perp}$

E6. $\dfrac{MMx}{Mx}$

Les énoncés barrés indiquent les hypothèses que l'on peut clore.

Remarques : - La règle (E5) est une répétition d'une règle (E3) mais la majeure et la mineure sont inversées. Evidemment la distinction est purement formelle.

- Les règles d'introduction de M procèdent par induction sur la complexité de l'énoncé. Ce qui remplace partiellement la séparation des connecteurs dans les règles de la logique bivalente.

Ces règles définissent ce que nous appellerons la Logique Trivalente Minimale (en abrégé LTM).

Si nous ajoutons à ces règles la règle $\dfrac{\perp}{x}$ que nous appellerons *règle d'absurdité intuitionniste* (en abrégé AI) nous obtenons *la Logique Trivalente Intuitionniste* (en abrégé LTI). Autrement dit nous avons LTI = LTM + AI.

Si nous ajoutons à ces règles la règle

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{MNx} \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{x}$$

que nous appellerons *règle d'absurdité classique* (en abrégé AC) nous obtenons *la Logique Trivalente Classique* (en abrégé LTC) qui n'est rien d'autre que LTL. Autrement dit nous avons LTL = LTC = LTM + AC.

Remarque : La règle d'absurdité classique peut être remplacée par exemple par la règle d'élimination de la double négation $\dfrac{NNx}{x}$ ou par la règle d'absurdité intuitionniste et la règle du quart exclu QE :

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{x} \\ \vdots \\ y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cancel{MNx} \\ \vdots \\ y \end{array}}{y}$$

(annexe II). Autrement dit on a LTL = LTM + AC $\equiv$ LTM + $\dfrac{NNx}{x}$ $\equiv$ LTM + AI + QE

(le signe $\equiv$ signifiant l'identité des concepts de déduction).

Nous allons tout d'abord donner quelques définitions et théorèmes qui permettent d'établir la compatibilité sémantique et la complétude de LTL ainsi définie.

DEFINITION 14 :

Soit Σ *un ensemble d'énoncés.* $\Sigma \vdash_{M} x$ *(resp.* $\Sigma \vdash_{I} x$, $\Sigma \vdash_{C} x$ *) signifie qu'il existe une dérivation de* x *dans* LTM *(resp. dans* LTI , *dans* LTC *) à partir de certains éléments de* Σ .

DEFINITION 15 :

Soit Σ *un ensemble d'énoncés.* $\Sigma \models x$ *signifie que* x *est conséquence (sémantique) de* Σ .

En effectuant une récurrence sur la hauteur d'une dérivation on obtient alors le

THEOREME 31 :

Si $\Sigma \vdash_{C} x$ *alors* $\Sigma \models x$

Ce théorème établit la compatibilité sémantique de LTL.

DEFINITION 16 :

L'ensemble $S(x_1, ..., x_n)$ *est défini par récurrence par :*

- $S(x) = \{\{x\}, \{Nx\}, \{Mx, MNx\}\}$
- $S(x_1, ..., x_n, x) = \{X \cup Y / X \in S(x_1, ..., x_n) \text{ et } Y \in S(x)\}$

THEOREME 32 :

Soient $p_1, ..., p_n$ *des variables propositionnelles comprenant toutes celles qui figurent dans* x . *Alors pour tout* Σ *appartenant à* $S(p_1, ..., p_n)$ *on a l'une des propriétés suivantes :*

i. $\Sigma \vdash_{I} x$

ii. $\Sigma \vdash_{I} Nx$

iii. $\Sigma \vdash_{I} Mx$ et $\Sigma \vdash_{I} MNx$.

THEOREME 33 :

Si $\Sigma, X \vdash_{I} x$ *pour tout* X *appartenant à* $S(y)$ *alors* $\Sigma \vdash_{I} NNx$.

THEOREME 34 :

Si $\Sigma, X \vdash_{I} x$ *pour tout* X *appartenant à* $S(x_1, ..., x_n)$ *alors* $\Sigma \vdash_{I} NNx$.

THEOREME 35 : (extension du théorème de Glivenko)

$\vdash_{C} x$ *est équivalent à* $\vdash_{I} NNx$.

THEOREME 36 : (théorème de complétude)

Si $\models x$ *alors* $\vdash_{C} x$.

Pour établir la complétude dans le cas général nous démontrons (annexe I) d'abord les trois théorèmes suivants :

THEOREME 37 :

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $x_1, ..., x_n \vdash_I \perp$

ii. $\vdash_I M(x_1 \to M(x_2 \to ... \to M(x_{n-1} \to MNx_n) ...)$.

THEOREME 38 :

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $x_1, ..., x_n$ *n'a pas de modèle.*

ii. $\vdash_I M(x_1 \to M(x_2 \to ... \to M(x_{n-1} \to MNx_n) ...)$.

THEOREME 39 : (théorème de complétude généralisé)

Si $\Sigma \models x$ *alors* $\Sigma \vdash_I NNx$.

Les théorèmes 35 et 39 permettent alors de conclure à *la complétude de* LTL :

Si $\Sigma \models x$ *alors* $\Sigma \vdash_C x$

Nous terminerons cette étude de la déduction naturelle en indiquant d'abord quelles sont les relations avec la logique bivalente puis en montrant que la logique bivalente classique est interprétable fidèlement dans LTM.

Si on interprète dans LTM, «M» par l'identité (ce qui revient à ajouter la règle $\frac{Mx}{x}$) on retrouve les règles de la logique classique bivalente (pour les connecteurs retenus).

Si on interprète dans LTM, «M» par «NN» on obtient un calcul équivalent à la logique minimale usuelle.

Si on interprète dans LTI, «M» par «NN» on retrouve la logique intuitionniste de Heyting.

Si on interprète dans LTC, «M» par «NN» on retrouve la logique bivalente classique.

Nous dirons qu'*un énoncé est stable dans une logique* L *si* $\vdash_L Mx \to x$.

D'après E6, Mx est stable pour tout x dans LTM.

THEOREME 40 :

Si x *et* y *sont stables dans* LTM *alors* Nx *et* $x \to y$ *sont aussi stables dans* LTM.

THEOREME 41 :

La logique bivalente classique est interprétable fidèlement dans LTM.

Soient $p_1, ..., p_n$ les variables propositionnelles figurant dans un énoncé x qu'on notera $x[p_1, ..., p_n]$. Considérons l'énoncé construit à partir des Mp_i pour atomes et ne contenant pas d'autre signe M. Cet énoncé est stable. On a l'injection

$x[p_1, ..., p_n] \to x[Mp_1, ..., Mp_n] = x^*$.

Par induction sur la hauteur d'une dérivation de x on démontre que si

$\Sigma \vdash_C x[p_1, ..., p_n]$ alors $\Sigma^* \vdash_M x[Mp_1, ..., Mp_n]$.

De plus, si on a $\vdash_M x^*$ alors x^* est valide dans LTL et par suite x est valide classiquement.

- ANNEXE I -

Les règles de déduction (Rn et Dn) utilisées dans les démonstrations suivantes sont établies dans l'annexe II.

Démonstration du THEOREME 32 :

On effectue une récurrence sur l'ordre de x.

- Si $x = p_i$: immédiat.

- Si $x = \perp$ alors $\dfrac{\dfrac{M\perp}{\perp}}{N\perp}\,(R2)$

- Si $x = Ny$:

. Si $\Sigma \vdash_I Ny$ alors $\Sigma \vdash_I x$

. Si $\Sigma \vdash_I y$ alors on a

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ y\end{array}\qquad MNy}{\perp}\,(E4)}{NNy}\,(R2)$$

or $NNy = Nx$ donc $\Sigma \vdash_I Nx$.

. Si $\Sigma \vdash_I My$ et $\Sigma \vdash_I MNy$ alors on a

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ My\end{array}}{MNNy}\,(R4)\qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ MNy\end{array}$$

or $MNNy = MNx$ et $MNy = Mx$ donc $\Sigma \vdash_I Mx$ et $\Sigma \vdash_I MNx$.

- Si $x = My$:

. Si $\Sigma \vdash_I y$ alors d'après I 6, $\Sigma \vdash_I My$ c'est-à-dire $\Sigma \vdash_I x$.

. Si $\Sigma \vdash_I Ny$ alors on a

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ Ny\end{array}\qquad \cfrac{MMy}{My}\,(E6)}{\perp}\,(E3)}{NMy}\,(R2)$$

or $NMy = Nx$ donc $\Sigma \vdash_I Nx$.

. Si $\Sigma \vdash_I My$ et $\Sigma \vdash_I MNy$ alors on a $\Sigma \vdash_I x$.

- Si $x = y \to z$:

. Si $\Sigma \vdash_I z$ ou si $\Sigma \vdash_I Ny$, d'après R5 et D4 on a $\Sigma \vdash_I y \to z$ donc $\Sigma \vdash_I x$.

. Si $\Sigma \vdash_I y$ et $\Sigma \nvdash_I z$

ou bien $\Sigma \vdash_I Nz$ et alors d'après R6 et R8 on a $\Sigma \vdash_I N(y \to z)$

donc $\Sigma \vdash_I Nx$.

ou bien $\Sigma \vdash_I Mz$ et $\Sigma \vdash_I MNz$, on a alors :

d'après R6 et R13, $\Sigma \vdash_I MN(y \to z)$ donc $\Sigma \vdash_I MNx$

d'après I2, $\Sigma \vdash_I M(y \to z)$ donc $\Sigma \vdash_I Mx$.

. Si $\Sigma \vdash_I My$ et $\Sigma \vdash_I MNy$ on a déjà, d'après R14, $\Sigma \vdash_I M(y \to z)$ donc $\Sigma \vdash_I Mx$.

Si $\Sigma \vdash_I Nz$ on a de plus, d'après R15, $\Sigma \vdash_I MN(y \to z)$ donc $\Sigma \vdash_I MNx$.

Si $\Sigma \vdash_I Mz$ alors d'après D5, $\Sigma \vdash_I y \to z$ donc $\Sigma \vdash_I x$.

Démonstration du THEOREME 33 :

Par hypothèse on a $\Sigma, y \vdash_I x$

$\Sigma, Ny \vdash_I x$

$\Sigma, My, MNy \vdash_I x$

D'où

$$\Sigma \quad , \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\cancel{y}\\ \vdots \\ x\end{matrix} \qquad MNx}{\perp}\,(E4)}{MNy}\,(I4) \quad , \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\cancel{Ny}\\ \vdots\\ x\end{matrix}\qquad MNx}{\perp}\,(E4)}{My}\,(R9)$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{x \qquad\qquad \cancel{MNx}}{\perp}\,(E4)}{NNx}\,(R2)$$

Donc $\Sigma \vdash_I NNx$.

Démonstration du THEOREME 34 :

On effectue une récurrence sur n.

- Pour $n = 1$ c'est le théorème 33.

- Supposons le théorème démontré jusqu'à l'ordre n-1. Soit X un élément de $S(x_1, \dots, x_{n-1})$. Pour tout Y appartenant à $S(x_n)$, $X \cup Y$ appartient à $S(x_1, \dots, x_n)$. Donc on a $\Sigma, X, Y \vdash_I x$ pour tout Y appartenant à $S(x_n)$. D'après le théorème 33 on a alors $\Sigma, X \vdash_I NNx$. Or ceci a lieu pour tout X et on a par hypothèse de récurrence $\Sigma \vdash_I NNNNx$. Donc $\Sigma \vdash_I NNx$ d'après R16.

Démonstration du THEOREME 35 :

Etablissons d'abord le lemme suivant : Si $\models x$ alors $\vdash_I NNx$.

On suppose $\models x$. Soient $p_1, \dots, p_n$ les variables propositionnelles figurant dans x. Soit X un élément de $S(p_1, \dots, p_n)$. Il existe un modèle h pour X d'après sa construction. On doit avoir $\tilde{h}(x) = 1$. On est donc dans le cas i. du théorème 32 et par suite, d'après le théorème 34, on a $\vdash_I NNx$.

Or si $\vdash_C x$ on a $\models x$ donc d'après le lemme $\vdash_C x$ implique $\vdash_I NNx$.

La réciproque est immédiate puisque l'on a $\vdash_C NNx \rightarrow x$.

Démonstration du THEOREME 36 :

D'après le lemme précédent : si $\models x$ alors $\vdash_I NNx$, d'où le théorème 36 en utilisant le théorème 35.

Démonstration du THEOREME 37 :

i. implique ii. :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\cancel{x_1}, \dots, \cancel{x_{n-2}}, \cancel{x_{n-1}}, \cancel{x_n} \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{MNx_n}\ (I4)}{MMNx_n}\ (I6)}{M(x_{n-1} \rightarrow MNx_n)}\ (I2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{M(x_2 \rightarrow \dots \rightarrow M(x_{n-1} \rightarrow MNx_n)\dots)}\ (I2)}{MM(x_2 \rightarrow \dots \rightarrow M(x_{n-1} \rightarrow MNx_n)\dots)}\ (I6)}{M(x_1 \rightarrow M(x_2 \rightarrow \dots \rightarrow M(x_{n-1} \rightarrow MNx_n)\dots)}\ (I2)$$

ii. implique i. :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ M(x_1 \to M(x_2 \to \dots \to M(x_{n-1} \to MNx_n)\dots)\end{array} \qquad x_1}{MM(x_2 \to \dots \to M(x_{n-1} \to MNx_n)\dots)}\,(E2)}{M(x_2 \to \dots \to M(x_{n-1} \to MNx_n)\dots)}\,(E6) \qquad x_2}{MM(x_3 \to \dots \to M(x_{n-1} \to MNx_n)\dots)}\,(E2)$$

....

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{M(x_{n-2} \to M(x_{n-1} \to MNx_n)) \qquad x_{n-2}}{MM(x_{n-1} \to MNx_n)}\,(E2)}{M(x_{n-1} \to MNx_n)}\,(E6) \qquad x_{n-1}}{MMNx_n}\,(E2)}{MNx_n}\,(E6) \qquad x_n}{\perp}\,(E4)$$

soit finalement $x_1, \dots, x_n \vdash_I \perp$.

Démonstration du THEOREME 38 :

L'énoncé $M(x_1 \to M(x_2 \to \dots \to M(x_{n-1} \to MNx_n) \dots)$ prend la valeur 1 si et seulement si l'un des x_i ne prend pas la valeur 1.

Démonstration du THEOREME 39 :

- Si $\Sigma = \emptyset$ le théorème est démontré d'après les théorèmes 35 et 36.
- Si Σ est fini :

Soient $p_1, \dots, p_n$ l'ensemble des variables propositionnelles figurant dans x. Supposons que pour tout X appartenant à $S(p_1, \dots, p_n)$ on ait $\Sigma ,X \models x$.

. Si Σ ,X a un modèle h on a $h(x) = 1$. Donc on ne peut être que dans le cas i. du théorème 32 et on a $X \vdash_I x$. Par suite $\Sigma , X \vdash_I x$.

. Si Σ ,X n'a pas de modèle alors $\Sigma ,X \vdash_I \perp$ et à fortiori $\Sigma ,X \vdash_I x$.

Dans tous les cas $\Sigma ,X \vdash_I x$ pour tout X appartenant à $S(p_1, \dots, p_n)$ donc d'après le théorème 34, $\Sigma \vdash_I NNx$.

- Si Σ est infini :

On passe de Σ fini à Σ infini par le lemme de finitude qui se démontre à partir de Koenig comme en bivalent.

Démonstration du THEOREME 40 :

Si x est stable alors Nx est stable :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{MNx \qquad \dfrac{Mx \to x \qquad Mx}{x}\,(E1)}{\perp}\,(E4)}{Nx}\,(R2) \qquad\qquad \dfrac{MMNx}{MNx}\,(E6)}{MNx \to Nx}\,(I1)$$

Si x et y sont stables alors $x \to y$ est stable :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{M(x \to y) \qquad x}{My}\,(E2) \qquad \begin{matrix}\vdots\\ My \to y\end{matrix}}{y}\,(E1) \qquad \dfrac{M(x \to y) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ Mx \to x\end{matrix} \qquad Mx}{x}\,(E1)}{My}\,(E2)}{x \to y}\,(I1) \qquad \dfrac{MM(x \to y)}{M(x \to y)}\,(E6)}{M(x \to y) \to (x \to y)}\,(I1)$$

- ANNEXE II -

Déductions dans LTM :

D1. Si on a AC alors on a $\dfrac{NNx}{x}$.

$$\dfrac{\dfrac{NNx \qquad\qquad \cancel{MNx}}{\perp}\,(E3)}{x}\,(AC)$$

R1. $\dfrac{x}{Mx}$.

On raisonne par récurrence sur l'ordre de l'énoncé x.

- si x est une variable propositionnelle p on a $\dfrac{\dfrac{p \qquad \cancel{Np}}{\perp}\,(E3)}{Mp}\,(I5)$

- si x = $\perp$ on a $\dfrac{\perp}{M\perp}\,(I5)$

- supposons R1 vérifiée pour x d'ordre n-1. Si x est d'ordre n on a l'un des trois cas suivants :

. x = Ny et alors $\dfrac{\dfrac{Ny \qquad \cancel{y}}{\perp}\,(E3)}{MNy}\,(I4)$

. x = My et alors $\dfrac{My}{MMy}\,(I6)$

. x = y $\to$ z et alors $\dfrac{\dfrac{\dfrac{y \to z \qquad\qquad \cancel{y}}{z}\,(E1)}{Mz}\,(\text{hyp. réc.})}{M(y \to z)}\,(I2)$

R2. $\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{Mx}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{Nx}$: $\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\cancel{x}}{Mx}\,(R1)\\ \vdots\\ \perp\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\cancel{Mx}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{Nx}\,(I3)$

R3. $\dfrac{\perp}{Nx}$: d'après R2.

D2. Si on a $\dfrac{NNx}{x}$ alors on a AI et QE.

AI : $\dfrac{\dfrac{\perp}{NNx}\,(R3)}{x}\,(hyp)$

QE :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\cancel{x}\\ \vdots\\ y\end{matrix}\qquad \cancel{MNy}}{\perp}\,(E4)}{MNx}\,(I4)\\ \vdots\\ y\end{matrix}\qquad \cancel{MNy}}{\perp}\,(E4)}{NNy}\,(R2)}{y}\,(hyp.)$$

D3. Si on a AI et QE alors on a AC.

$$\dfrac{x \qquad \dfrac{\begin{matrix}\cancel{MNx}\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{x}\,(AI)}{x}\,(QE)$$

R4. $\dfrac{Mx}{MNNx}$: $\dfrac{\dfrac{Mx \qquad \cancel{Nx}}{\perp}\,(E5)}{MNNx}\,(I4)$

R5. $\dfrac{y}{x \to y}$: $\dfrac{y \qquad \dfrac{y}{My}\,(R1)}{x \to y}\,(I1)$

R6. $\dfrac{x}{NNx}$: $\dfrac{\dfrac{MNx \qquad x}{\perp}\,(E4)}{NNx}\,(R3)$

R7. $\dfrac{Nx}{NMx}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{MMx}}{Mx}\,(E6) \qquad Nx}{\perp}\,(E5)}{NMx}\,(R2)$

R8. $\dfrac{NNx \qquad Ny}{N(x \to y)}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{M(x \to y)} \qquad x}{My}\,(E2) \qquad Ny}{\perp}\,(E5)}{MNx}\,(I4) \qquad NNx}{\perp}\,(E5)}{N(x \to y)}\,(R2)$

R9. $\dfrac{\begin{matrix}\cancel{Nx}\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{Mx}$

On raisonne par récurrence sur l'ordre de x.

- Si x est une variable propositionnelle p, R9 est identique à I5.
- Supposons R9 vérifiée pour x d'ordre n-1. Si x est d'ordre n on a l'un des trois cas suivants ;

. x = Ny et alors

$$\begin{array}{c} \dfrac{\cancel{y}}{NNy}\ (R6) \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{MNy}\ (I4) \end{array}$$

. x = My et alors

$$\begin{array}{c} \dfrac{\cancel{Ny}}{NMy}\ (R7) \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{\perp}{My}\ (\text{hyp. réc.})}{MMy}\ (I6) \end{array}$$

. x = y $\to$ z et alors

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\cancel{y}}{NNy}\ (R6) \qquad \cancel{Nz}}{N(y \to z)}\ (R8) \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{\perp}{Mz}\ (\text{hyp. réc.})}{M(y \to z)}\ (I2) \end{array}$$

R10. $\dfrac{\perp}{Mx}$: d'après R9.

D4. Si on a AI alors on a $\dfrac{Nx}{x \to y}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Nx \qquad \cancel{x}}{\perp}\ (E3)}{y}\ (AI) \qquad \dfrac{\dfrac{Nx \qquad \cancel{Mx}}{\perp}\ (E3)}{My}\ (R10)}{x \to y}\ (I1)$$

R11. $\dfrac{x \to y \qquad MNy}{MNx}$: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \to y \qquad \cancel{x}}{y}\ (E1) \qquad MNy}{\perp}\ (E4)}{MNx}\ (I4)$

R12. $\dfrac{NN(x \to y) \qquad NNx}{NNy}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x \to \cancel{y} \quad \cancel{MNy}}{MNx}\,(R11) \qquad NNx}{\perp}\,(E5)}{MN(x \to y)}\,(I4) \qquad NN(x \to y)}{\perp}\,(E5)}{NNy}\,(R2)$$

R13. $\dfrac{NNx \qquad MNy}{MN(x \to y)}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{NNx \qquad \cancel{NN(x \to y)}}{NNy}\,(R12) \qquad MNy}{\perp}\,(E3)}{MN(x \to y)}\,(R9)$$

R14. $\dfrac{MNx}{M(x \to y)}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{MNx \qquad \cancel{x}}{\perp}\,(E4)}{My}\,(R10)}{M(x \to y)}\,(I2)$$

R15. $\dfrac{Mx \qquad Ny}{MN(x \to y)}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{x \to y} \qquad Mx}{My}\,(E1) \qquad Ny}{\perp}\,(E5)}{MN(x \to y)}\,(I4)$$

D5. Si on a AI alors on a $\dfrac{MNx \qquad My}{x \to y}$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{MNx \qquad \cancel{x}}{\perp}\,(E4)}{y}\,(AI) \qquad My}{x \to y}\,(I1)$$

R16. $\dfrac{NNNx}{Nx}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{Mx}}{MNNx}\,(R4) \qquad NNNx}{\perp}\,(E5)}{Nx}\,(R2)$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) Gr. C. MOISIL, *La logique mathématique pure et appliquée en R.S. de Roumanie,* XIIIe Congrès international d'histoire des Sciences, Moscou, 18-24 août 1971.

(2) J. ŁUKASIEWICZ, *Treść wykładn pozegnalnego wygłoszonego w sali Universytetu Warszawskiego dnia 7 marca 1918* (Leçon d'adieu prononcée dans la salle de l'Université de Varsovie le 7 mars 1918) Warszawa 1918.

(3) J. ŁUKASIEWICZ, *O projeciu mozlinośći,* R. F. 5, 1919, 1920, p. 169-170, traduit par H. Hiz dans Polish Logic, 1920-1939, édité par Storrs Mc Call, Clarendon Press, 1967, p. 15.

(4) J. ŁUKASIEWICZ, *O logice trójwartośćiowej,* R. F. 5, 1920, p. 170-171, traduit par H. Hiz dans Polish Logic, 1920-1939, édité par Storrs Mc Call, Clarendon Press, 1967, p. 16, traduit par O. Wojtasiewicz dans Jan Lukasiewicz selected works, édité par Borkowski, North Holland, 1970, p. 87-88.

(5) J. ŁUKASIEWICZ, *Philosophishe Bernerkungen zu mehrwertigen Systemen das Aussagenkalküls,* Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, 23, 1930, p. 51-77, traduit par H. Weber dans Polish Logic, 1920-1939, édité par Storrs Mc Call, Clarendon Press, 1967, p. 40-65.

(6) M. WAJSBERG, *Aksjomatyzacja trojwartosciowego rachunku zdan,* Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, 24, 1931, p. 126-145, traduit par B. Gruchman et S. Mc. Call dans Polish Logic, 1920-1939, Clarendon Press, 1967, p. 264-284.

(7) A. MONTEIRO, *Construction des algèbres de Lukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques I.* Math. Japon. 12, 1967, p. 1-23.

(8) J. SŁUPECKI, G. BRYLL et T. PRUCNAL, *Some remarks on three-valued logic of J. Lukasiewicz,* Studia Logica, tome 21, 1967, p. 1-26.

(9) D. BECCHIO, *Logique trivalente de Lukasiewicz.* A paraître dans les Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand.