ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
*Série Mathématiques*

P. FARJOT

# Existence et unicité du maximum d'une forme linéaire sur un ensemble de matrices diagonales

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 58, série *Mathématiques*, nº 12 (1976), p. 184-194

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1976__58_12_184_0>

# EXISTENCE ET UNICITE DU MAXIMUM D'UNE FORME LINEAIRE SUR UN ENSEMBLE DE MATRICES DIAGONALES

P. FARJOT , Université de Clermont

## Introduction

Nous nous proposons de donner dans cet article une démonstration simplifiée d'un résultat énoncé par Monique HAKIM, Eric Olivier LOCHARD, Jean-Pierre OLIVIER et Eric TEROUANNE de Montpellier, dans un papier intitulé "sur les traces de Spearman I" ([3]). Si A est une matrice n x n symétrique semi-définie positive, nous lui associons l'ensemble $G_I$ (A) des matrices diagonales D à termes positifs ou nuls telles que A - D soit semi-définie positive, et nous montrons que toute forme linéaire T sur $\mathbb{R}^n$ strictement positive sur $\mathbb{R}^{+n}$ atteint son maximum sur $G_I$ (A) en un point et un seul. Notre démonstration permet aussi d'étendre ce résultat à une forme linéaire ne s'annulant sur aucun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Nous tenons à remercier le Professeur Gérard LETAC qui nous a signalé [3] et nous a guidé par ses conseils.

## Notations et Définitions

Dans toute la suite nous noterons I l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ , $P_I$ (respectivement $P_I^*$) l'ensemble des matrices n x n réelles symétriques, semi-définies positives (respectivement définies positives).

L'ensemble $D_I$ (réspectivement $D_I^+$) des matrices n x n réelles, diagonales (respectivement diagonales à termes $\geq 0$), sera identifié à $\mathbb{R}^I$ (respectivement à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^I$). Nous écrirons indifféremment

$\mathbb{R}^I$ ou $\mathbb{R}^n$ et nous noterons $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Nous noterons A (i, j) les éléments d'une matrice A de $P_I$ ($(i, j) \in I \times I$) et D (i) ceux d'une matrice D de $D_I$ ($i \in I$) . $|J|$ désignera le nombre d'éléments d'un ensemble J.

<u>Définition</u>

Une forme linéaire T sur $D_I$ sera dite *strictement positive* si pour tout D de $D_I^+$ non nul, on a $TD > 0$.

Un élément A de $P_I$ et une forme linéaire T sur $\mathbb{R}^I$ étant donnés, nous leur associerons les deux ensembles suivants :

$G_I(A) = \{D \in D_I^+ \;;\; A - D \in P_I\}$ ;

$S_T(A) = \{D \in G_I(A) \;;\; \forall d \in G_I(A) \;\; Td \leq TD\}$.

<u>Remarque</u>

Avec les notations ci-dessus, le résultat que nous nous proposons de démontrer s'énonce : "si A est dans $P_I$ et si T est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$ strictement positive, alors $S_T(A)$ est un ensemble réduit à un élément".

§ 1 - <u>Résultats préliminaires</u>

Dans tout ce § , A désignera un élément de $P_I$ et T une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$.

<u>Proposition 1.1</u>

$G_I(A)$ est une partie compacte convexe non vide de $\mathbb{R}^I$.

*Preuve.* $G_I$ (A) est non vide puisqu'il contient 0.

1°) Montrons que $G_I$ (A) est un fermé de $\mathbb{R}^I$.

Si J est un sous-ensemble non vide de I, notons $f_J$ l'application continue définie sur $D_I$ par $f_J$ (D) = dét $(A-D)_J$, mineur principal d'ordre J de A - D. Avec ces notations, on a ([2]) :

$$G_I (A) = \bigcap_{\substack{J \neq \emptyset \\ J \subset I}} f_J^{-1} ([0, +\infty[) \cap D_I^+ ,$$

et $G_I$ (A) est donc un fermé de $\mathbb{R}^I$.

2°) Montrons que $G_I$ (A) est un borné de $\mathbb{R}^I$.

Pour tout i de I, D (i) $\geqslant$ 0 et A (i, i) - D (i) = det $(A-D)_{\{i\}} \geqslant 0$, donc

$$G_I (A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} [0, A (i, i)] ,$$

et par suite $G_I$ (A) est borné.

3°) On déduit immédiatement de 1°) et 2°) que $G_I$ (A) est un compact de $\mathbb{R}^I$.

4°) $P_I$ est un cone convexe, donc $G_I (A) = \{D \in D_I^+ ; D \leqslant A\}$ est convexe, avec $\leqslant$ la relation définie sur $P_I$ par

$$A \leqslant B \quad \text{si et seulement si } B - A \in P_I.$$

On déduit immédiatement de ce qui précède, la proposition suivante qui représente en fait la première partie du résultat que nous nous proposons de démontrer (existence d'au moins un maximum pour T sur $G_I$ (A)), et qui est vraie pour une forme linéaire T arbitraire sur $\mathbb{R}^I$ (non nécessairement strictement positive) :

Proposition 1.2

$S_T$ (A) est un ensemble non vide.

*Preuve*. T étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, est continue; de plus, étant une fonction numérique continue sur le compact non vide $G_I$ (A), elle y est bornée et atteint ses bornes, d'où la proposition.

Remarque 1.1

La proposition 1.2 peut aussi s'exprimer sous la forme: "l'hyperplan $H_T(A) = \{D \in \mathbb{R}^I \; ; \; TD = \sup_{d \in G_I(A)} Td\}$ est un hyperplan d'appui ([1]) de $G_I$ (A)".

Notons une autre propriété de l'ensemble $S_T$ (A) associé à une forme linéaire arbitraire T sur $\mathbb{R}^I$ :

Proposition 1.3

$S_T$ (A) est un convexe compact de $\mathbb{R}^I$.

*Preuve*. $S_T$ (A) est convexe compact car intersection du convexe compact $G_I$ (A) par l'hyperplan $H_T$ (A) défini dans la remarque 1.1.

Les deux propositions qui suivent sont établies sous des hypothèses beaucoup plus restrictives pour T , puisque nous choisissons dans ce qui suit T strictement positive.

Proposition 1.4

Si T est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$ strictement positive, alors tout élément D de $S_T$ (A) vérifie la relation dét (A - D) = 0.

*Preuve*. Posons $G_I^*(A) = \{D \in D_I^+ \; ; \; A - D \in P_I^*\}$ . Avec les notations de la proposition 1.1, on a ([2]) :

$$G_I^*(A) = \bigcap_{\substack{J \neq \emptyset \\ J \subset I}} f_J^{-1}(]0, +\infty[) \cap D_I^+ \; ;$$

donc $G_I^*$ (A) est la trace sur $D_I^+$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^I$.

Soit D dans $S_T$ (A) ; il vérifie dét (A - D) $\geqslant$ 0 puisque A - D est dans $P_I$. Supposons dét (A - D) > 0, c'est-à-dire D dans $G_I^*$ (A) ; on peut alors trouver un élément non nul D' de $D_I^+$ tel que D + D' soit dans $G_I^*$ (A) ; donc puisque T est strictement positive, on a :

$$T\,D' > 0 \quad \text{et} \quad T\,(D + D') = T\,D + T\,D' > T\,D\,,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que D + D' est dans $G_I$ (A) et D dans $S_T$ (A) (et par conséquent que T (D + D') $\leqslant$ T D). L'hypothèse dét (A - D) > 0 est donc fausse, d'où la proposition.

Proposition 1.5

Si T est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$ strictement positive, il existe une partie J non vide de I telle que la projection canonique de $S_T$ (A) sur $\mathbb{R}^J$ soit réduite à un point.

Remarque 1.5

La proposition 1.5 peut s'exprimer aussi sous la forme : il existe au moins un indice i de I tel que, pour tous D et D' de $S_T$ (A), D (i) = D'(i).

La preuve de la proposition 1.5 découle immédiatement de la convexité de $S_T$ (A) et des deux lemmes suivants :

Lemme 1.1

Si T est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$ strictement positive, alors deux quelconques des éléments de $S_T$ (A) ont au moins une même coordonnée.

*Preuve*. Soient D et D' dans $S_T$ (A). Montrons qu'il existe i dans I tel que D (i) = D' (i). $S_T$ (A) étant convexe, $D_\lambda = \lambda D + (1-\lambda)\, D'$ est élément de $S_T$ (A) pour tout $\lambda$ dans $[0, 1]$ ; donc, d'après la proposition 1.4, dét $(A - D_\lambda) = 0$ pour tout $\lambda$ de $[0, 1]$. Or dét $(A - D_\lambda)$ est un polynôme en $\lambda$ ; donc le coefficient de son terme de plus haut degré en $\lambda$ est nul ; par conséquent $\prod_{i \in I} (D'(i) - D(i)) = 0$, et par suite il existe au moins un indice i tel que $D'(i) = D(i)$.

Lemme 1.2

Si S est un convexe non vide de $\mathbb{R}^I$ tel que deux quelconques de ses éléments ont au moins une même coordonnée, il existe une partie J non vide de I telle que la projection canonique de S sur $\mathbb{R}^J$ soit réduite à un point.

*Preuve*. Etant donnés deux éléments $s = (s_i)_{i \in I}$ et $s' = (s'_i)_{i \in I}$ de S, nous noterons

$$J(s, s') = \{i \in I \; ; \; s_i = s'_i\} \; ,$$

$$\text{et} \quad k = \inf_{(s,s') \in S \times S} |J(s, s')| .$$

Par hypothèse, on a $k > 0$. Soient $s^{(1)}$ et $s^{(2)}$ dans S tels que $k = |J(s^{(1)}, s^{(2)})|$ ; nous noterons par J l'ensemble $J(s^{(1)}, s^{(2)})$ pour simplifier. Nous allons montrer que pour tout i de J et tout s de S, $s_i = s_i^{(1)}$, ce qui impliquera a fortiori le lemme. Raisonnons par l'absurde : si ce résultat était faux, il existerait $i_o$ dans J et $s^{(o)}$ dans S tels que $s_{i_o}^{(o)} \neq s_{i_o}^{(1)}$. Posons alors :

$$J_\lambda = \{i \in I \; ; \; \lambda s_i^{(1)} + (1-\lambda) s_i^{(2)} = s_i^{(o)}\} \quad \text{si} \quad \lambda \in [0, 1] \quad (*) \; ;$$

$$E_i = \{\lambda \in [0,1] \; ; \; \lambda s_i^{(1)} + (1-\lambda) s_i^{(2)} = s_i^{(o)}\} \quad \text{si} \quad i \notin J \quad (**).$$

Comme S est convexe, pour tout $\lambda$ dans $[0, 1]$ $\lambda_s^{(1)} + (1-\lambda) s^{(2)}$ est dans S et par conséquent $|J_\lambda| \geqslant |J|$ ; d'autre part, quelque soit $\lambda$ dans $[0, 1]$, $i_o$ n'est pas dans $J_\lambda$ ; par conséquent, pour tout $\lambda$ de $[0, 1]$, on peut trouver au moins un élément, soit $i_\lambda$ , dans $J_\lambda \setminus J$ ; c'est-à-dire, en revenant aux définitions (*) et (**), pour tout $\lambda$ de $[0, 1]$ on peut trouver un élément $i_\lambda$ de $I_1 = I \setminus J$ tel que $\lambda$ appartienne à $E_{i_\lambda}$ ; autrement dit $(E_i)_{i \in I_1}$ constitue un recouvrement de $[0, 1]$ . On en déduit l'existence d'au moins un élément de $I_1$, soit $i_1$, tel que $E_{i_1}$ possède au moins 2 points $\lambda$ et $\lambda'$ distincts ; mais alors

$$s_{i_1}^{(o)} = \lambda\, s_{i_1}^{(1)} + (1-\lambda)\, s_{i_1}^{(2)} = \lambda'\, s_{i_1}^{(1)} + (1-\lambda')\, s_{i_1}^{(2)} ,$$

ce qui entraîne $s_{i_1}^{(1)} = s_{i_1}^{(2)}$ , c'est-à-dire $i_1$ est élément de J. On arrive à une contradiction puisque $i_1$ est dans $I_1 = I \setminus J$. Le lemme 1.2 est donc vrai.

Remarque 1.6

Le lemme 1.2 est faux si l'on ne suppose pas S convexe.

Exemple : $I = \{1, 2, 3\}$ ; $S = \{(1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1)\}$.

## § 2 - Le théorème

Dans tout ce paragraphe, A désignera encore un élément de $P_I$ et T une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$. De plus, si J est une partie non vide de I, nous identifierons $\mathbb{R}^J$ à un sous-espace de $\mathbb{R}^I$ (nous noterons de la même façon un élément de $\mathbb{R}^J$ et l'élément de $\mathbb{R}^I$ construit en attribuant la valeur zéro à toutes les coordonnées d'indice dans $I \setminus J$) ; de même, nous identifierons $P_J$ à un sous-ensemble de $P_I$ (et nous noterons de la même façon un élément B de $P_J$ et l'élément de $P_I$ construit en posant $B(i, j) = 0$ si $(i, j)$ n'est pas dans $J \times J$) ; nous utiliserons enfin les notations suivantes :

Notation 1 : si D est un élément de $\mathbb{R}^I$ , $\Pi_J(D)$ désignera sa projection canonique sur $\mathbb{R}^J$.

<u>Notation 2</u> : si B est un élément de $P_I$ , $\Pi_J$ (B) désignera l'élément de $P_J$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^J$

$$(1) \qquad < \Pi_J (B)\, x,\, x > \; = \inf_{y \in \mathbb{R}^{I \setminus J}} < B\,(x+y),\, x+y > \,,$$

où $< Bz, z >$ désigne la valeur au point z de $\mathbb{R}^I$ de la forme quadratique associée à B.

<u>Remarque 2.1</u>

Il est facile de voir que (1) définit bien une matrice semi-définie positive $\Pi_J$ (B) qui est la borne supérieure (pour la relation $\leqslant$ introduite dans la preuve de la proposition 1.1), de l'ensemble $\{C \in P_J \; ; \; C \leqslant B\}$ .

<u>Remarque 2.2</u>

Les notations 1 et 2 coïncident pour un élément de $D_I^+$ (compte tenu de l'identification de $D_I^+$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}^I$).

<u>Notation 3</u> : si J est une partie non vide de I, nous noterons $T_J$ la restriction de T à l'ensemble $\mathbb{R}^J$.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le lemme suivant, valable pour une forme linéaire arbitraire T sur $\mathbb{R}^I$ :

<u>Lemme 2.1</u>

Soit (J, K) une partition de l'ensemble I supposé de cardinal $\geqslant 2$. Alors

i) si D est dans $G_I$ (A), la section de $G_I$ (A) au point $\Pi_J$ (D) (suivant $\mathbb{R}^K$) est égale à $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))) ;

ii) si D est dans $S_T$ (A), la section de $S_T$ (A) au point $\Pi_J$ (D)(suivant $\mathbb{R}^K$) est contenue dans $S_{T_K}$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))).

*Preuve.*

i) Soit $F = \{ \Delta \in \mathbb{R}^K ; \Delta + \Pi_J (D) \in G_I (A)\}$ la section de $G_I$ (A) au point $\Pi_J$ (D). Montrons d'abord que F est inclus dans $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))). Soit $\Delta$ dans F ; $\Delta + \Pi_J$ (D) est dans $G_I$ (A), donc $\Delta \leqslant A - \Pi_J (D)$. D'après la remarque 2.1, on a $\Delta \leqslant \Pi_K (A - \Pi_J (D))$, ce qui signifie que l'élément $\Delta$ de $D_K^+$ appartient à $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))).

Montrons maintenant que $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))) est inclus dans F. Soit $\delta$ dans $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))) c'est-à-dire $\delta \leqslant \Pi_K (A - \Pi_J (D))$ ; d'après la remarque 2.1, $\Pi_K (A - \Pi_J(D)) \leqslant A - \Pi_J (D)$, donc $\delta \leqslant A - \Pi_J (D)$ et par suite $\delta$ est un élément de $\mathbb{R}^K$ tel que $\delta + \Pi_J$ (D) est dans $G_I$ (A), donc $\delta$ est dans F.

ii) Soit $\Delta$ dans la section de $S_T$ (A) au point $\Pi_J$ (D) ; donc $\Delta$ est dans $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))). Pour tout $\delta$ de $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))), $\delta + \Pi_J$ (D) est dans $G_I$ (A) d'après i), et comme $\Delta + \Pi_J$ (D) est dans $S_T$ (A), on a :

$$T (\delta + \Pi_J(D)) = T (\delta) + T (\Pi_J(D))) \leqslant T (\Delta + \Pi_J (D)) = T (\Delta) + T (\Pi_J (D))$$

et par conséquent :

$$T (\delta) = T_K (\delta) \leqslant T (\Delta) = T_K (\Delta)$$

L'élément $\Delta$ de $G_K$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))) est donc dans $S_{T_K}$ ($\Pi_K$ (A - $\Pi_J$ (D))).

<u>Théorème 2.1</u>

Si T est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$ strictement positive, pour tout élément A de $P_I$ l'ensemble $S_T$ (A) des points où T atteint son maximum sur $G_I$ (A) est réduit à un point.

*Preuve*. Procédons par récurrence sur la taille n de I, en remarquant que le théorème est trivialement vrai pour n = 1 et en supposant (hypothèse de récurrence) que, pour K de taille < n, non vide, toute forme linéaire $T_K$ sur $\mathbb{R}^K$ strictement positive, et tout élément $A_K$ de $P_K$, l'ensemble $S_{T_K}(A_K)$ est réduit à un point.

D'après la proposition 1.5, il existe une partie finie non vide J de I telle que $\Pi_J(S_T(A))$ est réduit à un point ; soit $D_o$ ce point ; posons $K = I \setminus J$ et $A_K = \Pi_K(A - D_o)$. Si K est non vide (le cas $K = \emptyset$ donne aussitôt le théorème), d'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $S_{T_K}(A_K)$ est réduit à un point ; or, d'après le lemme 2.1, $S_{T_K}(A_K)$ contient la section de $S_T(A)$ au point $D_o = \Pi_J(D)$ (suivant $\mathbb{R}^K$) et cette section est égale d'après la définition de $D_o$, à $S_T(A) - \{D_o\}$ qui est non vide ; par suite $S_T(A) - \{D_o\}$ est réduit à un point et donc $S_T(A)$ aussi.

Corollaire 2.1

Si T est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^I$ ne s'annulant sur aucun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, pour tout élément A de $P_I$ l'ensemble $S_T(A)$ des points où T atteint son maximum sur $G_I(A)$ est réduit à un point.

*Preuve*. Soit $I' = \{i \in I \,;\, T(e_i) < 0\}$ et $I'' = I \setminus I'$.

1er cas : $I' = I$. Alors $S_T(A) = \{0\}$. En effet soit D dans $S_T(A)$ et supposons non vide l'ensemble $\{i \in I \,;\, D(i) > 0\}$ ; comme 0 est dans $G_I(A)$, on a

$$T(0) = 0 \leqslant T(D) = \sum_{i \in I} D(i)\, T(e_i) = \sum_{i \in I \,;\, D(i)>0} D(i)\, T(e_i) < 0,$$

ce qui est impossible ; donc $\{i \in I \,;\, D(i) > 0\}$ est vide, c'est-à-dire $D = 0$.

2ème cas : $I' = \emptyset$. Alors T est strictement positive : c'est le théorème 2.1.

3ème cas : (I', I") est une partition de I. D'après le théorème 2.1, $S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A))$ est réduit à un point, soit $\Delta$. Nous allons montrer que $S_T(A) = \{\Delta\}$. Soit D arbitraire dans $S_T(A)$ (que l'on sait non vide) ; alors on a :

a) $\Pi_{I'}(D) = 0$ ; en effet, d'après le lemme 2.1, $\Pi_{I'}(D)$ est dans $S_{T_{I'}}(\Pi_{I'}(A - \Pi_{I''}(D)))$, ensemble qui, d'après l'étude du premier cas est égal à $\{0\}$.

b) $\Pi_{I''}(D) = \Delta$ ; en effet, toujours en utilisant le lemme 2.1, $\Pi_{I''}(D)$ est dans $S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A - \Pi_{I'}(D))) = S_{T_{I''}}(\Pi_{I''}(A)) = \{\Delta\}$.

Par conséquent, on a bien $S_T(A) = \{\Delta\}$ .

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Hermann (1966) 2ème édition revue et corrigée, II.5.2.

[2] F.R. GANTMACHER, Théorie des matrices 1, Dunod (1966), chapitre 10.

[3] M. HAKIM, E.O. LOCHARD, J.P. OLIVIER, E. TEROUANNE, Sur les traces de Spearmann (I), Montpellier (1972), multigraphié.