ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

C. LANCZOS

Intégration globale

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 97-107
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_97_0>

INTÉGRATION GLOBALE

C. LANCZOS
Professeur à l'Institut des Hautes Études de Dublin

Je suis très honoré par l'invitation du Professeur de Possel, qui m'a demandé de donner une conférence à cette occasion solennelle, en mémoire au grand génie Blaise Pascal. La science s'est développée énormément pendant les trois siècles qui se sont écoulés depuis son temps. Les mathématiques modernes ont développé un langage nouveau très abstrait, et presque incompréhensible excepté pour les initiés. Je crois, néanmoins, qu'il y a des problèmes éternels qui ne changent pas. Ils sont toujours anciens et toujours nouveaux. En réfléchissant à ces problèmes nous trouvons à chaque occasion quelque chose de nouveau et nous pouvons exprimer nos résultats dans une langue qui reste compréhensible pour tout le monde. J'ai choisi un sujet pour ma conférence qui est bien connu, et je veux parler un langage, que Pascal pourrait bien comprendre. J'espère qu'il aurait trouvé notre problème assez intéressant et je veux assumer, par hypothèse, qu'il serait satisfait de la solution que je voudrais vous soumettre.

Si nous considérons les grandes possibilités des nouvelles machines et la grande flexibilité avec laquelle nous pouvons coder, il semble judicieux de développer une variété de méthodes, parmi lesquelles nous pouvons choisir celle qui s'adapte le mieux aux circonstances. Prenons, comme exemple, le problème bien connu d'intégration numérique, qui fera le sujet de notre discussion : nous voulons obtenir l'intégrale indéfinie d'une fonction donnée :

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Ce problème n'est pas identique au problème de quadrature, parce que dans le dernier cas nous désirons obtenir une aire définie bornée par les ordonnées aux points a et b :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

et la fonction est donc transformée en un scalaire, tandis que dans notre cas, la fonction f(x) est transformée en une nouvelle fonction F(x).

La première chose que nous devons considérer, c'est qu'un calculateur opérant avec des chiffres ne peut pas exécuter d'opérations continues, il faut donc résoudre la continuité par un ensemble de points discrets. Pour l'intégration de la fonction f(x) de a à x il n'est pas nécessaire de connaitre le cours de la fonction de x à b. Si la fonction f(x) est donnée entre a et x, notre F(x) est déjà uniquement déterminée. Cèci est certainement vrai, si nous possédons *toutes* les valeurs de f(x) entre a et x. Si nous pouvons imiter l'opération du monde physique et agir d'une façon continue entre a et x, il n'y aurait pas de raison de considérer les valeurs fonctionnelles qui existent au-delà de l'intervalle [a,x]. Du point de vue de la continuité, toutes ces valeurs fonctionnelles ne pourraient en rien contribuer à l'intégrale F(x). Mais la situation est toute différente si nous la regardons du point de vue des opérations discrètes.

Il est certainement vrai que nous pouvons utiliser les expansions locales, commençant au point a et progressant de proche en proche jusqu'à ce que le point x soit atteint. Mais en vue des erreurs inévitables inhérentes à ce procédé nous ne pouvons pas dire *à priori* que c'est la meilleure méthode que nous puissions suivre. Il est très possible que le remplacement de l'opération d'intégration par une opération de sommation ait la conséquence de réduire l'erreur résultante en utilisant toutes les ordonnées au lieu des ordonnées comprises seulement dans l'intervalle [a,x]. En d'autres termes, il est possible qu'un procédé *global* puisse nous donner un résultat meilleur qu'un ensemble de procédés locaux. Habituellement l'évaluation des ordonnées fondamentales est le processus qui demande le maximum de temps. Ayant obtenu ces ordonnées nous pouvons être satisfaits d'ajouter une opération de routine un peu plus compliquée, si par cette opération supplémentaire nous obtenons une précision beaucoup plus grande.

Nous commençons notre discussion avec une formule qui est intéressante parce qu'elle fournit une base commune pour les deux séries les plus importantes de la mathématique pure et appliquée : la série de Taylor et la série de Fourier. Nous vérifions sans difficulté la validité de la formule suivante, obtenue par la méthode de l'intégration par parties :

$$\int_a^b f'(\xi)\, G(x-\xi)\, d\xi = -\left| f'(\xi)\, G_1(x-\xi) + \ldots + f^{(k)}(\xi)\, G_k(x-\xi) \right|_a^b + \int_a^b f^{(k+1)}(\xi)\, G_k(x-\xi)\, d\xi \qquad (1)$$

ou $G_1(t)$, $G_2(t)$, ... $G_k(t)$ indiquent les intégrales successives de $G(t)$:

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \int G(t)\, dt \\ G_2(t) &= \int G_1(t)\, dt \\ &\vdots \\ G_k(t) &= \int G_{k-1}(t)\, dt \end{aligned} \qquad (2)$$

A chaque étape successive une constante d'intégration reste libre.

1 - LA SERIE DE TAYLOR -

Choisissons :

$$\begin{aligned} b &= x \\ G(t) &= 1 \\ G_1(t) &= t \\ &\vdots \\ G_k(t) &= \frac{t^K}{k!} \end{aligned} \qquad (3)$$

Alors notre formule donne la série de Taylor :

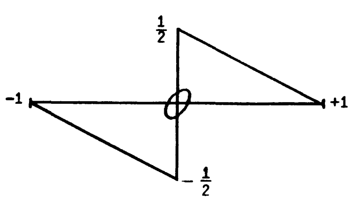
$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (4)$$

avec le reste de Lagrange :

$$\eta(x) = \frac{1}{k!} \int_a^x f^{(k+1)}(\xi)\, (x-\xi)^k\, d\xi \qquad (5)$$

2 - LA FORMULE DE EULER ET MACLAURIN -

Choisissons :



$$a = -1, \qquad b = +1$$

$$G(-t) = -G(t), \quad G(t+2) = G(t)$$

$$G(t) = \frac{1-t}{2} \quad (0 < t \leqslant 1)$$

Cette fonction peut être développée dans une série de Fourier :

$$G(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \pi m t}{\pi m} = \mathrm{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi m t}}{i\pi m} \tag{6}$$

et nous définissons :

$$G_k(t) = \mathrm{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi m t}}{(i\pi m)^{k+1}} \tag{7}$$

Notre formule nous donne maintenant :

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2} [f(1) - f(-1)]\, B_1(x) = \\ = \frac{1}{2} [f'(1) - f'(-1)]\, B_2(x) \\ + \ldots \\ + \frac{1}{2} [f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1)]\, B_{k+1}(x) \\ + \int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi)\, G_k(x-\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{8}$$

où nous avons posé :

$$B_n(x) = -2G_{m-1}(-1+x) \tag{9}$$

Nous voyons directement de la définition des $G_k(t)$ que les polynomes successifs $B_n(x)$ sont alternativement pairs et impairs :

$$B_{2k}(-x) = B_{2k}(x)$$

$$B_{2k+1}(-x) = -B_{2k+1}(x)$$

et que :

$$B_{2k+1}(1) = 0$$

En outre :

$$B_{n+1}(x) = \int B_n(x)\, dx$$

Par ces conditions les constantes d'intégration successives sont uniquement déterminées, commençant avec :

$$B_1(x) = x$$

Par exemple :

$$B_2(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

mais :

$$B_3(x) = \frac{x^3}{6} + cx$$

et la condition $B(1) = 0$ nous donne $c = -\frac{1}{6}$. De cette façon tous les polynomes $B_n(x)$ peuvent être construits :

$$B_1(x) = x$$

$$B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = \frac{x^3 - x}{6}$$

$$B_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{12} + \frac{7}{360}$$

$$B_5(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}$$

$$B_6(x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{144} + \frac{7x^2}{720} - \frac{31}{15120}$$

$$B_7(x) = \frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{720} + \frac{7x^3}{2160} - \frac{31x}{15120}$$

....

Ce sont les *polynomes de Bernoulli*, transformés par le changement de variable x à x - 1.

Appliquons notre formule (8) à la valeur spéciale $x = 1$, en posant :

$$f(-1 + 2x) = \varphi(x)$$

(le nouveau x varie entre 0 et 1). Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,[\varphi(0) + \varphi(1)] - \int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi = {} & \\
& [\varphi'(1) - \varphi'(0)]\,\frac{B_2(1)}{4} \\
& + [\varphi'''(1) - \varphi'''(0)]\,\frac{B_4(1)}{4^2} \\
& \vdots \\
& + [\varphi^{(2k-1)}(1) - \varphi^{(2k-1)}(0)]\,\frac{B_{2k}(1)}{4^k} \\
& + \int_0^1 \varphi^{(2k+1)}(\xi)\ \mathrm{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m \xi}}{(2\pi i m)^{2k+1}}\,d\xi
\end{aligned} \tag{10}$$

Si nous ajoutons la même expression, mais changeant les limites de [0,1] à [1,2], [2,3], ..., [N - 1, N], nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,f(0) + f(1) + f(2) + \dots f(N-1) + \frac{1}{2}\,f(N) - \int_0^N f(\xi)\,d\xi = {} & \\
& [f'(N) - f'(0)]\,\frac{B_2(1)}{4} \\
& + [f'''(N) - f'''(0)]\,\frac{B_4(1)}{4^2} \\
& \vdots \\
& + [f^{(2k-1)}(N) - f^{(2k-1)}(0)]\,\frac{B_{2k}(1)}{4^k}
\end{aligned} \tag{11}$$

C'est la formule célèbre de Euler et Maclaurin. Pour le reste nous obtenons l'expression :

$$\eta = 2 \int_0^1 f^{(2k+1)}(\xi) \, \mathrm{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m \xi}}{(2\pi i m)^{2k+1}} \, d\xi \qquad (12)$$

3 - LA SERIE FINIE DE FOURIER -

Nous retournons à notre formule (8) et considérons l'approximation obtenue par la série finie de Fourier. En vue du (8) nous pouvons remplacer f(x) par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi + \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{1}{2} [f^{(\alpha)}(1) - f^{(\alpha)}(-1)] \, B_{\alpha+1}(x)$$

$$+ \int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi) \, G_k(x-\xi)\, d\xi \qquad (13)$$

Nous opérons à la droite de l'équation (14) et obtenons la série finie de Fourier pour chaque terme. Cela nous donne :

$$f^*(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi + \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{1}{2} [f^{(\alpha)}(1) - f^{(\alpha)}(-1)] \, B^*_{\alpha+1}(x)$$

$$+ \int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi) \, G^*_k(x-\xi)\, d\xi \qquad (14)$$

Les quantités $B^*_m(x)$ représentent les expansions des fonctions $B_m(x)$ à l'aide de la série finie de Fourier, qui emploie des fonctions :

$$e^{\pm \pi i x}, \; e^{\pm 2\pi i x}, \ldots, \; e^{\pm (N-1) i x} \qquad (15)$$

L'erreur d'approximation $f^*(x)$ est donnée par la différence de (13) et (14). Si nous posons :

$$B_m(x) - B^*_m(x) = \Phi_m(x) \qquad (16)$$

nous obtenons :

$$\eta(x) = f(x) - f^*(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{1}{2} [f^{(\alpha)}(1) - f^{(\alpha)}(-1)] \, \Phi_{\alpha+1}(x)$$

$$+ \int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi) \, \Delta G_k(x-\xi)\, d\xi \qquad (17)$$

où :

$$\Delta G_k(t) = G_k(t) - G^*_k(t) = \mathrm{Re} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{e^{i\pi m t}}{(i\pi m)^{k+1}} \qquad (18)$$

L'avantage de la formule (17) est que la variable x est seulement présente dans les *fonctions universelles* et pas dans la fonction arbitraire $f(\xi)$. Alors nous opérons dans l'estimation de $\eta(x)$ avec les fonctions universelles qui ne sont pas influencées par f(x). Il n'est pas difficile d'estimer l'ordre de magnitude des fonctions $\Phi_2(x), \Phi_3(x), \ldots, \Phi_{k+1}(x)$. Si nous posons :

$$\frac{1}{N-1} = h \qquad (19)$$

nous trouvons que la fonction $\Phi_m(x)$ change avec h comme h^{m-1}. Pour l'estimation du dernier terme nous procédons comme suit :

$$\left| \int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi) \, \Delta G_k(x-\xi)\, d\xi \right| \leq \int_{-1}^{+1} |f^{(k+1)}(\xi)| \, |\Delta G_k(x-\xi)| \, d\xi$$

Mais :

$$|\Delta G_k(t)| \leqslant \frac{1}{\pi^{k+1}} \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}}$$

$$< \frac{1}{\pi^{k+1} k\, N^k}$$

$$< \frac{h^k}{k\, \pi^{k+1}} \tag{20}$$

Alors :

$$\left| \int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi)\ \Delta G_k(x-\xi)\ d\xi \right| < \frac{h^k}{k\pi^{k+1}} \int_{-1}^{+1} |f^{(k+1)}(\xi)|\ d\xi \tag{21}$$

La formule (17) nous donne un résultat important. Assumons que nous voulions obtenir une approximation de la fonction f(x) analytique (qui peut être différentiée indéfiniment), par une série finie de Fourier. Si notre fonction n'est pas automatiquement périodique, nous gagnons beaucoup, si nous ne sommes pas satisfaits de la série Fourier finie, mais ajoutons une expression qui dépend des valeurs des dérivations successives *aux bornes*. Si nous remplaçons $f^*(x)$ par la fonction $\bar{f}(x)$, définie par :

$$\bar{f}(x) = f^*(x) + \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{1}{2} [f^{(\alpha)}(1) - f^{(\alpha)}(-1)]\ \Phi_{\alpha+1}(x) \tag{22}$$

l'erreur de cette approximation est beaucoup plus petite que l'erreur de $f^*(x)$ seule :

$$|\eta(x)| < \frac{h^k}{k\pi^{k+1}} \int_{-1}^{+1} |f^{(k+1)}(\xi)|\ d\xi \tag{23}$$

Cela nous démontre que l'efficacité des fonctions trigonométriques (15) de Fourier peut être fortement augmentée, si nous ajoutons à ces fonctions les fonctions $\Phi_\alpha(x)$; ($\alpha = 1, 2, \ldots\ k+1$). Ces fonctions possèdent la propriété intéressante qu'elles sont *orthogonales* aux fonctions trigonométriques (15), tandis qu'elles ne sont pas orthogonales en elles-mêmes.

Le nombre k + 1 des fonctions $\Phi_\alpha(x)$ que nous devrions ajouter pour obtenir les meilleurs résultats, dépend de la fonction f(x) et de la grandeur de h. Il est possible que la quantité :

$$\int_{-1}^{+1} f^{(k+2)}(\xi)\ \Delta G_{k+1}(x-\xi)\ d\xi \tag{24}$$

devienne plus grande que la quantité précédente :

$$\int_{-1}^{+1} f^{(k+1)}(\xi)\ \Delta G_k(x-\xi)\ d\xi \tag{25}$$

donc l'accroissement du dérivatif $f^{(k+2)}(\xi)$ compense et au-delà la petitesse de h, de telle façon que l'intégrale résultante (25) devienne plus grande que l'intégrale précédente (24).

Par cette méthode nous pouvons compenser le manque de périodicité et *étendre les avantages des fonctions périodiques aux fonctions non-périodiques.*

Il est bien connu qu'il est toujours possible de transformer une fonction d'intervalle [-1, +1] en une fonction périodique du même intervalle, en transformant la variable x en une nouvelle variable ϑ par la formule :

$$x = \cos \pi \vartheta \tag{26}$$

qui nous donne une fonction paire périodique, représentable par une série de cosinus de Fourier. Mais les données, qui sont équidistantes en ϑ, ne le sont pas en x. Cette circonstance est fréquemment assez incommode et nous aimerions mieux opérer avec les données équidistantes. Dans ce cas la correction par les termes ajoutés présente l'avantage d'une précision beaucoup plus grande. En fait, l'addition des termes de borne nous gagne plus que la substitution (26), parce que en différentiant relativement à ϑ le facteur π apparait en chaque étape et la quantité précédente h/π est remplacée par h lui-même, avec la conséquence que l'erreur s'accroit par une puissance de π.

4 - L'INTERPOLATION TRIGONOMETRIQUE -

Tous les résultats obtenus pour la série finie de Fourier restent applicables dans le cas d'interpolation trigonométrique. Les erreurs de cette méthode sont pratiquement les mêmes que celles de la série trigonométrique finie correspondante, mais nous avons l'avantage additionnel d'une beaucoup plus grande facilité du procédé numérique.

Nous assumons que nous avons une fonction f(x), donnée dans l'intervalle [0, 1]. Habituellement nous modifions la fonction donnée par l'addition d'une expression linéaire $\alpha + \beta x$ telle que la nouvelle fonction g(x) soit égale à zéro pour x = 0 et 1 [1]. En outre, nous supposons cette fonction g(x) impaire :

$$g(-x) = -g(x) \tag{27}$$

Alors la série de Fourier n'est composée que de sinus, et notre intervalle est encore une fois [-1, +1].

Si nous appliquons les formules (13) et (14) au cas d'une fonction impaire, chaque second terme disparait, parce que :

$$f^{(2k+1)}(-1) = f^{(2k+1)}(1) \tag{28}$$

et nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) = f^{*}(x) &+ f(1)\,\Phi_1(x) + f(0)\,\Phi_1(1-x) \\ &+ f''(1)\,\Phi_3(x) + f''(0)\,\Phi_3(1-x) \\ &\;\vdots \\ &+ f^{(2k)}(1)\,\Phi_{2k+1}(x) + f^{(2k)}(0)\,\Phi_{2k+1}(1-x) \end{aligned} \tag{29}$$

avec l'erreur :

$$\eta(x) = \int_{-1}^{+1} f^{(2k+2)}(\xi)\,[G_{2k}(x-\xi) - G_{2k}^{*}(x,\xi)]\,d\xi \tag{30}$$

Maintenant $f^*(x)$ représente l'approximation de f(x), obtenue par l'interpolation trigonométrique, tandis que la définition de $\Phi_m(x)$ devient :

$$\Phi_m(x) = B_m(x) - B_m^{*}(x)$$

où $B_m^*(x)$ est l'interpolation trigonométrique de $B_m(x)$.

Il faut que nous estimions le maximum de $|\Phi_m(x)|$ et de $|\eta(x)|$. Dans le cas de la série finie de Fourier l'estimation était simple, parce que l'opération "astérique" ne changeait pas les fonctions $\sin n\pi x$ $(n < N)$, tandis que les fonctions $\sin n\pi x$ $(n \geqslant N)$ étaient annihilées. Dans le processus d'interpolation trigonométrique nous trouvons encore une fois que les fonctions $\sin n\pi x$ $(n < N)$ ne sont pas modifiées (et donc $\sin n\pi x - [\sin n\pi x]^* = 0$). Mais la fonction $\sin (N+\alpha)\, x$ $(\alpha < N)$ est changée en $-\sin (N-\alpha)\pi x$, et $\cos (N+\alpha)\pi x$ en $\cos (N-\alpha)\pi x$. Alors :

$$\sin (N+\alpha)\pi x - [\sin (N+\alpha)\pi x]^* = 2 \sin N\pi x \cos \alpha\pi x$$

$$\cos (N+\alpha)\pi x - [\cos (N+\alpha)\pi x]^* = -2 \sin N\pi x \sin \alpha\pi x$$

$$\sin (N+\alpha)\pi (x-\xi) - [\sin (N+\alpha)\pi (x-\xi)]^* = 2 \sin N\pi x \cos (\alpha\pi x - (N+\alpha)\pi\xi)$$

Les résultats analogues sont obtenus pour toutes les autres fonctions. Ceci démontre que dans la sommation des valeurs absolues (20) chaque terme est doublé et le résultat devient :

$$|G_m(x-\xi) - G_m^{*}(x,\xi)| < \frac{2h^m}{m\pi^{m+1}} \tag{31}$$

et alors, en vue de la relation (9) :

----

(1) Voir C. Lanczos, Applied Analysis, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956), p. 236.

$$|\Phi_m(x)| < \frac{4h^{m-1}}{(m-1)\pi^m} \tag{32}$$

Retournons à la formule (29). La correction de $f^*(x)$ par les termes :

$$f(1)\ \Phi_1(x) + f(0)\ \Phi_1(1-x)$$

correspond exactement à la modification précédente de f(x) à g(x). Si nous n'ajoutons pas d'autres termes, l'erreur estimée devient :

$$|\eta(x)| < \frac{2h^2}{\pi^3}\{f''(0),\ f''(1)\} + \frac{4h^3}{3\pi^4}\int_{-1}^{+1}|f''''(\xi)|\,d\xi \tag{33}$$

où le crochet { } signifie la plus grande des deux valeurs $|f''(0)|$, $|f''(1)|$; (le second terme est négligeable devant le premier terme, si h est suffisamment petit). Mais si nous ajoutons les deux termes suivants :

$$f''(1)\ \Phi_3(x) + f''(0)\ \Phi_3(1-x),$$

l'erreur estimée se réduit à :

$$|\eta(x)| < \frac{h^4}{\pi^5}\{f''''(0),\ f''''(1)\} + \frac{4h^5}{5\pi^6}\int_{-1}^{+1}|f^{(6)}(\xi)|\,d\xi \tag{34}$$

et nous avons gagné beaucoup de précision, si h est suffisamment petit.

5 - L'INTEGRALE INDEFINIE -

Finalement nous voulons appliquer cette méthode à l'évaluation d'intégrale indéfinie :

$$F(x) = \int f(x)\,dx \tag{35}$$

Pour ce but nous obtenons d'abord l'interpolation trigonométrique de f(x), calculée de la manière précédente, et ensuite nous intégrons terme par terme. Ceci nous donne :

$$F^*(x) = \sum_{\alpha=-(N-1)}^{N-1} y_\alpha\ W(x - x_\alpha) \tag{36}$$

où :

$$y_\alpha = f(x_\alpha)$$

avec :

$$x_\alpha = \frac{\alpha\pi}{N} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N-1)$$

et nous définissons :

$$y_{-\alpha} = -y_\alpha \qquad (y_0 = 0)$$

La fonction W(t) est définie comme suit :

$$W(t) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\sin m\pi t}{m\pi} \tag{37}$$

Il est particulièrement convenable d'obtenir $F^*(x)$ dans les points fondamentaux x_m. A cet effet nous demandons seulement une série des poids, définie par :

$$w_k = \sum_{m=1}^{N-1}\frac{\sin m\pi\frac{k}{N}}{m\pi N} \qquad w_{-k} = -w_k$$

et nous obtenons[1] :

$$F^*(x_m) = - \sum_{\alpha=-(N-1)}^{N-1} y_\alpha \, w_{\alpha-k} \tag{38}$$

qui représente un processus numérique très convenable.

En outre, nous assumons que nous possédons les valeurs aux bornes f(0), f(1), et aussi f''(0) et f''(1). Nous pouvons donc ajouter les termes :

$$f(1)\ \Phi_2(x) - f(0)\ \Phi_2(1-x) \tag{39}$$

et aussi :

$$f''(1)\ \Phi_4(x) - f''(0)\ \Phi_4(1-x) \tag{40}$$

où $\Phi_m(x)$ est définie par :

$$\Phi_m(x) = B_m(x) - B^*_{m-1}(x)$$

$B^*_{m-1}(x)$ représentant l'application de l'opération (36) à la fonction $B_{m-1}(x)$. Les $\Phi_m(x)$ sont les fonctions universelles et les valeurs $\Phi_2(x_k)$ et $\Phi_4(x_k)$ peuvent être prétabulées. Il est donc simple d'obtenir :

$$\begin{aligned}\overline{F}(x_k) = F^*(x_k) &+ f\ (1)\ \Phi_2\ (x_k) - f\ (0)\ \Phi_4(1-x_k) \\ &+ f''(1)\ \Phi\ \ (x\ \ ) - f''(0)\ \Phi_4(1-x_k)\end{aligned} \tag{41}$$

L'erreur de cette approximation est obtenable à l'aide d'erreur précédente (34). Le processus d'intégration réduit l'amplitude des oscillations de Gibbs par le facteur h/π et nous obtenons donc :

$$|\eta(x)| < \frac{h^5}{\pi^6}\{f''''(0),\ f''''(1)\} + \frac{4\,h^6}{5\,\pi^7}\int_{-1}^{+1}|f^{(6)}(\xi)|d\xi \tag{42}$$

Quelque fois il est difficile d'utiliser l'expression théorique de l'erreur, parce que nous ne possédons pas les valeurs f''''(0) et f''''(1). Mais nous obtenons une estimation pratique si nous possédons les valeurs de la fonction f(x) au centre des points fondamentaux, particulièrement près des deux bornes. L'amplitude des oscillations de Gibbs est un maximum dans ces points. Obtenant cette amplitude à l'aide de l'interpolation trigonométrique dans les centres points, nous attachons le facteur h/π. Ceci nous donne une estimation d'amplitude des oscillations de Gibbs de l'approximation $\overline{F}(x)$.

Finalement, si nous ne possédons pas les valeurs f''(0) et f''(1), nous pouvons néanmoins appliquer notre méthode, si nous raccourcissons un peu l'intervalle donné, opérons avec l'intervalle $\left[\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}\right]$. Les valeurs critiques sont maintenant $f''\left(\frac{1}{N}\right)$ et $f''\left(1-\frac{1}{N}\right)$ et nous pouvons remplacer les dérivations par les coefficients de différence, suivant la formule :

$$f''\left(\frac{1}{N}\right) = N^2\left[f(0) + f\left(\frac{1}{N}\right) - 2\,f\left(\frac{1}{N}\right)\right]$$

L'erreur causée par cette substitution augmente l'erreur précédente du facteur 2,6.

Il est d'intérêt de comparer ce résultat avec la formule de Simpson, qui ne nous donne pas F(x), mais les valeurs spéciales :

$$F(x_{2k}) - F(0)$$

L'erreur de la formule de Simpson est bornée par :

$$|\eta(x)| < \frac{h^4}{180}\left|f''''(\xi)\right|_{max}$$

Nous observons que dans notre processus la puissance quatre de h devient cinq et le dénominateur 180 s'accroît à π^6 qui est presque 1 000. Donc nous avons gagné le facteur h/5, en comparaison

----

(1) Voir C. Lanczos, Linear Differential Operators, (D. Van Nostrand, London, 1961), p. 539.

de la formule de Simpson, en dehors de ce fait, que nous avons obtenu une approximation $\bar{F}(x)$ qui existe dans tout l'intervalle [0, 1] et pas seulement dans les N/2 points x_{2k}.

Démontrons l'opération des principes généraux par un exemple numérique facile. Déterminons numériquement l'intégrale de la fonction :

$$f(x) = \log(1 + 2.4\,x) \tag{43}$$

Puisque nous possédons dans ce problème le résultat dans une forme explicite, une analyse complète des erreurs devient possible. Nous avons :

$$F(x) = \frac{1}{2.4}(1 + 2.4\,x)\log(1 + 2.4\,x) - x - 0.269691319 \tag{44}$$

La constante d'intégration est déterminée par la condition :

$$\int_0^1 F(\xi)\,d\xi = 0 \tag{45}$$

qui est une propriété caractéristique de notre procédé. Nous voulons opérer avec N = 12 points fondamentaux.

Dans la tabulation suivante les colonnes successives représentent les quantités suivantes :

1/ $\eta_0(x_k)$ = l'erreur $F(x_k) - F^*(x_k)$, sans ajouter les termes de borne.

2/ $\eta_1(x_k)$ = l'erreur $F(x_k) - \bar{F}(x_k)$, si le terme (39) est ajouté.

3/ $\eta_2(x_k)$ = l'erreur $F(x_k) - \bar{F}(x_k)$, si - selon (41) - tous les deux termes (39) et (40) sont ajoutés.

4/ $\eta_2'(x_k)$ = la même erreur si la constante d'intégration est normalisée par la définition :

$$F(x) = \int_{0,5}^{x} f(t)\,dt \tag{46}$$

5/ $\eta_5(x_{2k})$ = l'erreur de la formule de Simpson pour la même fonction (46).

Toutes les valeurs numériques sont multipliées par 10^9.

k	$\eta_0(x_k)$	$\eta_1(x_k)$	$\eta_2(x_k)$	$\eta_2'(x_k)$	$\eta_5(x_{2k})$
0	- 679577	- 59346	+ 851	+ 814	- 6340
1	- 780132	+ 17547	- 423	- 460	
2	- 620048	- 6011	+ 206	+ 169	- 1937
3	- 806087	+ 4870	- 137	- 174	
4	- 592951	- 1346	+ 75	+ 48	- 560
5	- 843827	+ 2693	- 71	- 108	
6	- 535478	- 158	+ 37	0	0
7	- 936801	+ 1958	- 51	- 88	
8	- 373008	+ 363	+ 22	- 15	+ 270
9	- 1255684	+ 1502	- 38	- 75	
10	+ 384247	+ 947	+ 21	- 16	+ 415
11	- 3847061	+ 281	- 33	- 68	
12	+ 38081710	+ 5658	+ 8	- 29	+ 500

DISCUSSION

M. GHIZZETTI - Dans quels cas la formule est-elle exacte ?

M. LANCZOS - Si la fonction est donnée par une série trigonométrique finie de moins de N termes, alors la formule est exacte. On obtient donc une plus grande classe de fonction, satisfaisant la formule avec exactitude, que pour la formule de Simpson.

M. Ch. BLANC - Puisque une telle formule nécessite la connaissance de f'', ne pourrait-on pas l'améliorer en utilisant cette dérivée en plus de deux points ou en utilisant des dérivées d'ordre supérieur ?

M. LANCZOS - Ceci est possible si ces dérivées sont connues en plusieurs points. Pour une fonction périodique ceci donne même une excellente méthode.