ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ALFRED RÉNYI

Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 7-13

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_7_0>

THÉORIE DES ÉLÉMENTS SAILLANTS D'UNE SUITE D'OBSERVATIONS

Alfred RÉNYI
Professeur à l'Université de Budapest
(Budapest, Hongrie)
VI - Benczur Utca 28

1 - INTRODUCTION -

Considérons une suite infinie de variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mutuellement indépendantes et ayant la même fonction de répartition :

$$F(x) = P\{X_n < x\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

En ce qui concerne la fonction $F(x)$ nous supposons seulement qu'elle est continue. La suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ peut être interprétée comme une suite d'observations d'une quantité dont la valeur dépend du hasard, prises l'une après l'autre dans le temps. Nous pouvons supposer par exemple, sans restreindre la généralité, que X_n est l'observation obtenue à l'instant n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Nous disons que X_n est un élément saillant de la suite d'observations $X_1, X_2, \ldots$ s'il est plus grand que toutes les observations précédentes, c'est-à-dire X_n est saillant si l'on a :

$$X_n > \operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n-1} X_k \tag{2}$$

En vertu de cette définition X_1 est évidemment toujours un élément saillant. Posons $\nu_0 = 1$. Soit ν_1 l'indice de l'élément saillant suivant : c'est-à-dire X_{ν_1} est saillant et les X_j avec $1 < j < \nu_1$ ne sont pas saillants. Autrement dit, X_{ν_1} est le premier élément saillant non-trivial. En général soit ν_k l'indice du k-ième élément saillant non-trivial, c'est-à-dire X_{ν_k} est saillant et les X_j avec $\nu_{k-1} < j < \nu_k$ ne sont pas saillants $(k = 1, 2, \ldots)$.

Evidemment les $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$ sont des variables aléatoires. Un des buts de nos recherches était d'examiner les propriétés probables de la suite ν_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Il est clair que c'est un problème où la nature de la fonction de répartition $F(x)$ ne joue aucun rôle. En effet, posons $X'_n = F(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors les X'_n sont aussi indépendants et sont uniformément répartis dans l'intervalle $(0, 1)$; outre cela si X_n est un élément saillant de la suite $X_1, X_2, \ldots$ alors X'_n est aussi un élément saillant de la suite $X'_1, X'_2, \ldots$, et inversement.

Ceci montre, quant au comportement des variables ν_k $(k = 1, 2, \ldots)$, qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les X_n eux-mêmes sont répartis avec la loi uniforme sur $(0, 1)$.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants concernant les ν_k.

THEOREME 1 - On a presque sûrement (avec probabilité 1)

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\nu_k} = e \tag{3}$$

(ou e est la base des logarithmes naturels).

THEOREME 2 - La répartition de la variable aléatoire $\log \nu_k$ obéit en limite pour $k \longrightarrow +\infty$ à une loi de Laplace :

$$\lim_{k \to +\infty} P\left(\frac{\log \nu_k - k}{\sqrt{k}} < y\right) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{4}$$

(Ici et partout dans la suite P(...) désigne la probabilité de l'évènement qui figure dans les parenthèses).

THEOREME 3 - On a presque sûrement :

$$\limsup_{k \to +\infty} \frac{\log \nu_k - k}{\sqrt{2k \log\log k}} = +1 \quad \text{et} \quad \liminf_{k \to +\infty} \frac{\log \nu_k - k}{\sqrt{2k \log\log k}} = -1, \tag{5}$$

c'est-à-dire la loi du logarithme itéré est valable pour les $\log \nu_k$.

On peut exprimer ces résultats sous une autre forme équivalente. Soit μ_N le nombre des éléments saillants parmi les N premières observations de la suite $X_1, X_2, \ldots$ On a $\mu_1 = 1$ et pour $N = 2,3,\ldots$ les μ_N sont aussi des variables aléatoires. Il existe une relation simple entre les ν_k et les μ_N qui est exprimée par la formule :

$$P(\mu_N \leq k) = P(\nu_k > N) \tag{6}$$

En vertu de (6) on peut formuler les Théorèmes 1, 2, 3 en termes des μ_N de la façon suivante.

THEOREME 1' - On a presque sûrement

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\mu_N}{\log N} = 1. \tag{3'}$$

THEOREME 2' - La répartition des variables aléatoires μ_N obéit en limite pour $N \longrightarrow +\infty$ à une loi de Laplace :

$$\lim_{N \to +\infty} P\left(\frac{\mu_N - \log N}{\sqrt{\log N}} < y\right) = \Phi(y) \tag{4'}$$

THEOREME 3' - On a presque sûrement :

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{\mu_N - \log N}{\sqrt{2 \log N . \log\log\log N}} = +1 \quad \text{et} \quad \liminf_{N \to +\infty} \frac{\mu_N - \log N}{\sqrt{2 \log N . \log\log\log N}} = -1 \tag{5'}$$

La démonstration de ces résultats est basée sur le lemme fondamental suivant :

LEMME 1 - Soit $A_k (k = 1,2,\ldots)$ l'évènement que le k-ième élément X_k d'une suite d'observations est saillant. Alors les évènements $A_k (k = 1,2,\ldots)$ sont mutuellement indépendants dans leur ensemble, et on a :

$$P(A_k) = \frac{1}{k}. \tag{7}$$

L'énoncé du Lemme 1 est frappant, parce que l'évènement A_k dépend de toutes les k observations $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Malgré l'importance, la simplicité et le caractère frappant de ce Lemme il semble qu'il n'ait pas été observé jusqu'ici.

Dans le § 2 nous donnons une démonstration de nature combinatoire tout à fait élémentaire de ce lemme. Cette démonstration conduit à un résultat plus général, puisque nous établirons le lemme 2 qui contient le lemme 1 comme cas particulier.

Avant de formuler ce lemme nous introduisons encore une notion. Ordonnons par grandeur les k premières observations $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Soit X^*_{k1} la plus grande entre les valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_k$, X^*_{k2} la seconde en grandeur, etc., et X^*_{kk} la plus petite parmi les valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_k$. (Nous pouvons négliger la possibilité qu'il y ait des valeurs égales entre les k observations $X_1, X_2, \ldots, X_k$, parce que, en vertu de la continuité de la répartition F(x) et l'indépendance des observations, cela ne peut avoir lieu que seulement avec la probabilité zéro). Si $X_k = X^*_{kr_k}$, nous disons que le rang de X_k est égal à r_k. Evidemment X_k est un élément saillant si et seulement si son rang est égal à 1. Le rang r_k de X_k est une variable aléatoire. Nous démontrons le lemme suivant :

LEMME 2 - Les variables aléatoires $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ sont mutuellement indépendantes, et la répartition de r_k est uniforme sur les nombres $1, 2, \ldots, k$, c'est-à-dire :

$$P(r_k = j) = \frac{1}{k} \qquad \text{pour} \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{8}$$

La démonstration du lemme 2 sera donnée dans le § 3.

Il est aisé de voir comment on peut utiliser le lemme 2 (ou le lemme 1) pour démontrer les théorèmes 1', 2', 3'. En effet, nous avons :

$$\mu_N = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N \tag{9}$$

où ε_k est égal à 1 ou 0 suivant que X_k est un élément saillant ou non. Alors d'après le lemme 2 les variables aléatoires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ sont mutuellement indépendantes et on peut appliquer des théorèmes généraux connus sur les sommes des variables indépendantes : la loi forte des grands nombres nous fournit le théorème 1', la loi de la limite centrale le théorème 2', et la loi du logarithme itéré le théorème 3'.

Dans le § 3 nous montrerons en détail comment on peut déduire nos théorèmes des théorèmes généraux mentionnés. Dans le § 4 nous indiquerons la connexion entre notre lemme 2 et un résultat bien connu sur le nombre des cycles d'une permutation aléatoire. Dans le § 5 nous établirons la connexion de la théorie des éléments saillants avec un certain algorithme pour la représentation des nombres réels, les développements en séries d'Engel (appelés par M. E. Borel "développements unitaires normaux"). Enfin il est évident qu'il est possible de construire des tests non-paramétriques fondés sur nos résultats. Nous espérons revenir sur ce sujet à une autre occasion.

2 - DEMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL -

Nous allons maintenant démontrer notre lemme 2. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les rangs de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Si les valeurs de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont données ($1 \leqq r_k \leqq k$; $k = 1, 2, \ldots, n$), alors on peut reconstruire, en utilisant aucune autre information, l'ordre de grandeur des valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En effet ceci peut être démontré facilement par récurrence. Notre assertion est évidemment valable pour $n = 2$ (car on a $X_1 < X_2$ ou $X_1 > X_2$ suivant que $r_2 = 1$ ou $r_2 = 2$) ; si notre assertion est déjà démontrée pour n, c'est-à-dire que, en partant des valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$, on peut uniquement établir l'ordre de grandeur des nombres $X_1, X_2, \ldots, X_n$; si de plus la valeur de r_{n+1} est donnée, alors nous pouvons insérer X_{n+1} dans l'ordre de grandeur parmi les nombres $X_1, X_2, \ldots, X_n$; en effet, posons X_{n+1} au r_{n+1} -ième place. Nous avons démontré ainsi qu'a toute suite $r_1, r_2, \ldots, r_n$ possible (comme $1 \leqq r_k \leqq k$ le nombre de ces suites est égal à $n!$) correspond une seule permutation d'ordre n, à savoir la permutation formée par les indices des nombres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si on les arrange dans une suite décroissante. Comme les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et sont réparties suivant la même loi de probabilité, alors toutes ces permutations ont la même probabilité $\frac{1}{n!}$. Nous obtenons donc :

$$P(r_1 = a_1, \; r_2 = a_2, \ldots, \; r_n = a_n) = \frac{1}{n!} \qquad (1 \leqq a_k \leqq k \; ; \; k = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

Par l'addition de toutes les égalités (10) pour $1 \leqq a_k \leqq k$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient :

$$P(r_n = a_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqq a_n \leqq n. \tag{11}$$

($n = 1, 2, \ldots$). La comparaison de (10) et (11) nous donne :

$$P(r_1 = a_1, \; r_2 = a_2, \ldots, \; r_n = a_n) = P(r_1 = a_1) \; P(r_2 = a_2) \ldots P(r_n = a_n) \tag{12}$$

pour $1 \leqq a_k \leqq k$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$.

Mais (12) montre que les variables aléatoires $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont mutuellement indépendantes. En tenant compte de (11) le lemme 2 est démontré.

Ajoutons que nous n'avons pas utilisé tout ce qui dérive de la supposition de l'indépendance des variables $X_1, X_2, \ldots$; en effet, nous avons besoin de cette hypothèse seulement pour que tous les n! ordres de grandeur des valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient équiprobables. Mais pour celà il suffit de supposer que les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont équivalentes (dépendantes d'une manière symétrique). Notre lemme 2 (et par conséquent le lemme 1 et tous nos autres résultats, c'est-à-dire les théorèmes 1, 1', 2, 2', 3, 3') restent aussi valables sous cette hypothèse plus faible.

3 - DEMONSTRATION DES THEOREMES 1, 2 et 3 -

Pour démontrer le théorème 1' nous pouvons appliquer, en vertu de (9) et du lemme 1, la forme suivante connue (voir p. e. [1], p. 238, ou [2]) de la loi forte des grands nombres, dûe essentiellement à M. A. Kolmogoroff :

Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ des variables aléatoires non-négatives mutuellement indépendantes : soient $E_n = E(Y_n)$ (l'espérance mathématique de Y_n) et $D_n = D(Y_n)$ (l'écart moyen quadratique de Y_n) finies ($n = 1, 2, \ldots$). Posons $A_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ et supposons que :

$$\text{a)} \quad \lim_{n \to +\infty} A_n = +\infty \tag{13}$$

et :

$$\text{b) La série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^2}{A_n^2} \text{ est convergente.} \tag{14}$$

Alors on a presque sûrement :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} Y_k}{A_N} = 1. \tag{15}$$

On peut appliquer ce théorème aux variables $Y_n = \varepsilon_n$, parce que dans ce cas $E_n = \frac{1}{n}$, $D_n^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et, par conséquent, $A_N \sim \log N$ et $\frac{D_N^2}{A_N^2} \sim \frac{1}{N \log^2 N}$ et les conditions a) et b) sont évidemment satisfaites. Alors (15) a lieu pour $Y_n = \varepsilon_n$, et notre théorème 1' est établi. Le théorème 1 s'obtient immédiatement à partir du théorème 1' grâce à (6).

Remarquons que d'après le théorème 1 on peut évaluer le nombre e par les éléments saillants d'une suite d'observations quelconque de la même façon qu'on peut évaluer le nombre π par la fameuse expérience de l'aiguille de Buffon.

En ce qui concerne le théorème 2', il est une conséquence immédiate du théorème de Liapounoff, car $E\left(\left|\varepsilon_n - \frac{1}{n}\right|^3\right) \leq \frac{1}{n}$ et, par conséquent, la condition de Liapounoff est satisfaite.

On obtient le théorème 2 à nouveau par l'application de la relation (6).

Enfin le théorème 3' est un cas particulier de la loi du logarithme itéré de Kolmogoroff (voir [3]).

4 - CONNEXION DU NOMBRE DES ELEMENTS SAILLANTS AVEC LE NOMBRE DE CYCLES D'UNE PERMUTATION ALEATOIRE -

On peut donner sans difficulté des formules exactes et explicites pour la répartition des variables aléatoires μ_N. On obtient, en tenant compte de (6) et du lemme 1 :

$$P(\mu_N = n) = \frac{1}{N} \sum_{1 < k_1 < \ldots < k_n \leq N} \frac{1}{(k_1 - 1)(k_2 - 1)\ldots(k_n - 1)} \tag{16}$$

où la sommation doit être étendue à toutes les suites croissantes de n termes de nombres entiers naturels $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq N$. On a aussi :

$$P(\mu_N = n) = \frac{|S_N^{(n)}|}{N!} \tag{17}$$

où $S_N^{(n)}$ désigne les nombres de Stirling de première espèce (voir [9]). On obtient une formule plus simple pour la fonction génératrice de μ_N. En effet, en posant :

$$Q_N(x) = \sum_{n=1}^{N} P(\mu_N = n)\, x^n \tag{18}$$

on a :

$$Q_N(x) = \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x-1}{k}\right) \tag{19}$$

On voit à partir de cette dernière formule que la répartition de μ_N est exactement identique à celle du nombre γ_N des cycles d'une permutation d'ordre N choisie au hasard (de telle façon que le choix de chacune des N! permutations ait la même probabilité) (voir [4] et [5]). Lorsqu'on rencontre une telle coïncidence de formules, on est tenté d'en trouver la raison. Dans le cas présent il est aisé de trouver cette raison, c'est-à-dire de donner une démonstration directe et élémentaire qui montre que les variables aléatoires μ_N et γ_N doivent avoir la même répartition.

Soit ρ_k le rang de $X_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ dans la suite ordonnée en grandeur croissante des nombres $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Les nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ constituent une permutation Π des nombres $1, 2, \ldots, N$. Dans cette permutation $\rho_j > \underset{1 \leqq i \leqq j-1}{\text{Max}}\ \rho_i$ si et seulement si X_j est un élément saillant, c'est-à-dire si $j = \nu_s$ $(s = 0, 1, \ldots, \mu_N - 1)$. Nous appellerons les nombres $\rho_{\nu_0}, \rho_{\nu_1}, \ldots, \rho_{\nu_{\mu_N - 1}}$ les éléments saillants de la permutation Π. Soit Π' la permutation qui est représentée par les cycles suivants :

$$\Pi' = (\rho_1, \ldots, \rho_{\nu_1 - 1})\ (\rho_{\nu_1}, \ldots, \rho_{\nu_2 - 1}) \ldots (\rho_{\nu_{\mu_N - 1}}, \ldots, \rho_N)$$

Il est facile de voir que la correspondance entre Π et Π' est biunivoque. Comme à une permutation ayant m éléments saillants il correspond une permutation ayant m cycles, l'identité de la distribution de μ_N et γ_N est ainsi établie. Notons, que la distribution de γ_N était déterminée par W. Feller [4] en représentant cette quantité comme la somme des N variables aléatoires indépendantes, admettant seulement les valeurs 0 et 1, par analogie avec la formule (9).

5 - CONNEXION AVEC LE DEVELOPPEMENT D'ENGEL DES NOMBRES REELS -

Il est facile de voir que la suite des variables aléatoires ν_n $(n = 0, 1, \ldots)$ est une chaine de Markoff homogène, avec les états $1, 2, \ldots$, et avec les probabilités de passage :

$$P(\nu_n = k \mid \nu_{n-1} = 1) = \frac{1}{k(k-1)} \qquad \text{pour} \qquad k > 1 \tag{20}$$

On peut déduire de cette relation, que la variable aléatoire :

$$\tau = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{(\nu_1 - 1)\nu_2} + \ldots + \frac{1}{(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1) \ldots (\nu_{n-1} - 1)\nu_n} + \ldots \tag{21}$$

a une loi uniforme sur l'intervalle $(0, 1)$.

Le développement (21) du nombre τ est semblable au développement d'Engel (appelé par M. Borel [6] "développement unitaire normal"). Le développement d'Engel d'un nombre réel τ $(0 < \tau \leqq 1)$ a la forme :

$$\tau = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} + \tag{22}$$

où les entiers q_n forment une suite non-décroissante et peuvent être définis par l'algorithme suivant : q_1 est le plus petit entier pour lequel $\frac{1}{q_1} < \tau$; si $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ sont déjà calculés $(n = 2, 3, \ldots)$, on obtient q_n comme le plus petit nombre naturel pour lequel $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} < \tau$. De même, nous pouvons développer tout nombre réel $\tau (0 < \tau \leqq 1)$ en une série de la forme :

$$\tau = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{(\nu_1 - 1)\nu_2} + \ldots + \frac{1}{(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1) \ldots (\nu_{n-1} - 1)\nu_n} + \ldots \tag{23}$$

où les entiers ν_n forment une suite croissante et sont définis par l'algorithme tout à fait analogue à celui d'Engel : ν_1 est le plus petit entier pour lequel $\frac{1}{\nu_1} < \tau$; si $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$ sont déjà calculés ($n \geq 2$) on obtient ν_n comme le plus petit entier pour lequel $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{(\nu_1-1)\nu_2} + \ldots + \frac{1}{(\nu_1-1)(\nu_2-1)\ldots(\nu_{n-1}-1)\nu_n} < \tau$. Nous appelons (23) le développement modifié d'Engel du nombre τ et les nombres ν_n figurant dans (23) les dénominateurs de ce développement. Avec cette terminologie nous pouvons dire que les indices des éléments saillants d'une suite d'observations ont les mêmes propriétés statistiques que les dénominateurs du développement modifié d'Engel d'un nombre réel pris au hasard (avec une répartition uniforme) dans l'intervalle (0,1).

M. Borel [6] a démontré que les dénominateurs q_n du développement (22) d'Engel de presque tous les nombres réels τ satisfont à la relation :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{q_n} = e. \tag{24}$$

Notre théorème 1 fournit un résultat correspondant pour les développements modifiés d'Engel 23 . En analysant l'analogie entre les développements (22) et (23) on trouve aisément une nouvelle démonstration très simple du théorème de M. Borel. En effet soit λ_k égal au nombre des dénominateurs q_n dans le développement (22) d'un nombre réel τ (pris au hasard avec répartition uniforme dans l'intervalle (0,1)) qui sont égaux à k. Alors on peut montrer (Lemme 3) que les variables aléatoires $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont mutuellement indépendantes, et leur répartition est donnée par la formule :

$$P(\lambda_k = r) = \frac{k-1}{k^{r+1}} \qquad (r = 0,1,\ldots \ ; \ k = 2,3,\ldots) \tag{25}$$

(24) s'en déduit immédiatement par la loi forte des grands nombres. On obtient aussi immédiatement, en faisant usage à nouveau de l'indépendance des variables aléatoires λ_k et en appliquant la forme de Liapounoff de la loi limite centrale, le théorème suivant dû à M. P. Lévy [7] : La variable aléatoire $\log q_n$ obéit en limite pour $n \longrightarrow \infty$ à une loi de Laplace : on a notamment :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{\log q_n - n}{\sqrt{n}} < y\right) = \Phi(y) \tag{26}$$

On obtient aussi par cette méthode sans aucune difficulté la loi du logarithme itéré pour les variables $\log q_n$, c'est-à-dire qu'on a pour presque tous les τ,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log q_n - n}{\sqrt{2n \log\log n}} = +1 \qquad \text{et} \qquad \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log q_n - n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1 \tag{27}$$

Ce résultat a été obtenu pour la première fois par MM. P. Erdös, P. Szüsz qui font l'objet de la note [8] par une démonstration très difficile. Dans notre travail mentionné nous avons décomposé $\log q_n$ de la façon suivante :

$$\log q_n = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{q_k}{q_{k-1}} \qquad (q_0 = 1) \tag{28}$$

et nous avons prouvé que les variables aléatoires $\log \frac{q_k}{q_{k-1}}$ sont "presque indépendantes". La technique pour traiter les variables aléatoires presque indépendantes est, comme il est bien connu, très laborieuse. Mais quand on a réussi, comme nous l'avons faits dans le cas présent, à ramener la recherche des sommes des variables aléatoires presque indépendantes à la recherche des variables auxiliaires indépendantes, on obtient toujours une simplification énorme. On peut appeler ces variables aléatoires indépendantes auxiliaires (comme par exemple les λ_k dans notre cas) les variables indépendantes auxiliaires résolvantes. Malheureusement il manque une méthode générale pour reconnaitre l'existence et pour trouver effectivement des telles variables indépendantes auxiliaires résolvantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. LOÈVE - Probability theory, Van Nostrand, New-York, 1955. pp. 238.

[2] A. RÉNYI - A new axiomatic theory of probability, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6/1955 pp. 185-336.

[3] A. KOLMOGOROFF - Über das Gesetz des iterierten Logarithmus, Math. Ann. 101/1929. pp. 126-135.

[4] W. FELLER - An introduction to probability theory and its applications, New-York, 1950. Chapter 10. § 7.

[5] J. RIORDAN - An introduction to combinatorial analysis. Wiley, New-York, 1958, pp. 70-71.

[6] E. BOREL - Sur les développements unitaires normaux, Comptes Rendus 225/1947. p. 51.

[7] P. LEVY - Remarques sur un théorème de M. Emile Borel, Comptes Rendus 225/1947. pp. 918-919.

[8] P. ERDÖS, A. RÉNYI, P. SZÜSZ - On Engel's and Sylvester's series, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. 1/1958. pp. 7-32.

[9] Ch. JORDAN - Calculus of finite differences, Budapest, 1939.

DISCUSSION

M. NEVEU - Le lemme 3 étant analogue au lemme 1, quel est l'analogue pour la série de Engel du lemme 2 ?

M. FORTET - Y-a-t'il des résultats analogues pour les fonctions aléatoires continues ?

M. RÉNYI - C'est possible.

M. FORTET - Que peut-il arriver si les X_k ont une fonction de répartition discontinue ?

M. RÉNYI - Le résultat dépend de la distribution.

M. CRAMÈR - Serait-il possible de faire quelque chose d'analogue dans le cas où l'on suppose seulement qu'il y a dépendance stationnaire entre les X_n ?

M. RÉNYI - Dans ce cas ces méthodes élémentaires sont insuffisantes.

M. CRAMÈR signale le résultat suivant : Si X'(t) est continue, stationnaire laplacienne à distribution spectrale non régulière.

Il existe toujours : $\operatorname{Max}_{a \leqslant t \leqslant T} X(t)$

avec $E[X(t)] = 0$

$E[X^2(t)] = 1$ et on prouve que : $\Pr\left\{ \operatorname{Max}_{a \leqslant t \leqslant T} X(t) - \sqrt{2 \operatorname{Log} T} > \varepsilon \right\} \longrightarrow 0$ quand $T \longrightarrow +\infty$.