ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. FORTET

Remarques sur la programmation dynamique

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, nº 2 (1962), p. 41-51

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_41_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REMARQUES SUR LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

R. FORTET
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

1 - INTRODUCTION -

L'objet de cette Note est de présenter quelques remarques sur la *programmation dynamique* ; nous donnons à cette expression le sens qu'elle a, par exemple, dans l'ouvrage classique de Bellmann et dans la littérature qui en est issue. D'ailleurs notre premier point sera de rappeler la définition des programmations dynamiques, afin de mettre en évidence, avec autant de netteté que possible, les éléments divers qui constituent une programmation dynamique, leurs connexions mutuelles, leur signification et interprétation.

Tout d'abord, on ne peut définir une programmation dynamique spécifique, ni même dire ce qu'est en général une programmation dynamique, si on ne se réfère à des solutions définies de quelques problèmes préliminaires, d'ailleurs bien connus, mais qu'il n'est pas inutile de passer en revue.

Problème Préliminaire I :

Supposons qu'à un individu $\mathcal{E}$ supposé capable de choix, on donne à choisir entre les deux situations suivantes :

- Situation 1 : X étant une variable aléatoire (réelle) de fonction de répartition F donnée, on procède - à l'instant même - au tirage au sort de la valeur x de X, conformément à F, et $\mathcal{E}$ touche - immédiatement - la somme (positive, négative ou nulle) x.

- Situation 2 : On verse à $\mathcal{E}$ immédiatement une somme déterminée, non aléatoire, y (positive, négative ou nulle).

Quelle valeur $\mathcal{V}(X)$ doit avoir y pour que le choix entre les situations 1 et 2 soit indifférent ?

Précisons d'abord que l'individu $\mathcal{E}$, ici et par la suite, peut être une personne, un groupe de personnes, une firme, une nation, etc.

On reconnaît dans ce Problème Préliminaire I, à peine transposé, le "problème des partis" de B. Pascal ; ce problème célèbre a, on le sait, soulevé bien des discussions.

Une première attitude, vis à vis de ce problème, est de déclarer qu'il est dépourvu de sens et qu'on se refuse à le considérer ; mais cette attitude n'est pas soutenable dans le domaine pratique ; il est aisé de voir que si personne n'acceptait jamais d'échanger une somme fixée y contre une somme aléatoire X, l'humanité disparaîtrait immédiatement.

Il faut donc bien accepter de définir la fonctionnelle $\mathcal{V}(X)$; la solution la plus couramment admise est de prendre $\mathcal{V}(X) = E(X)$, espérance mathématique de X ; cette solution est pour le moins incomplète, puisqu'elle laisse irrésolu le cas où X n'aurait pas d'espérance mathématique.

En toute rigueur, il n'y a probablement pas *un* choix correct *unique* de $\mathcal{V}(X)$: le choix de $\mathcal{V}(X)$ doit être fonction du $\mathcal{E}$ considéré ; par exemple, si $\mathcal{E}$ est mortel et n'échappe pas au vieillissement (cas où $\mathcal{E}$ est un homme déterminé) $\mathcal{V}$ doit dépendre de l'âge de $\mathcal{E}$, et par suite, pour un $\mathcal{E}$ donné, de l'époque t où le problème se pose ; il n'en est plus ainsi si, comme on le suppose en général implicitement, $\mathcal{E}$ échappe au vieillissement (cas où $\mathcal{E}$ est une nation, une société, à la rigueur une famille).

Nous ne nous proposons pas ici de discuter sérieusement ces questions ; mais, nous restreignant de toutes façons au cas d'un $\mathcal{V}(X)$ indépendant de t, nous pouvons considérer comme logiquement nécessaire que $\mathcal{V}(X)$ satisfasse aux propriétés suivantes :

α) $\mathcal{V}(X)$ ne dépend que de la fonction de répartition F de X ; si presque-sûrement X égale le nombre certain λ, $\mathcal{V}(X) = \lambda$.

β) Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que presque-sûrement $X \leq Y$, on a :

$$\mathcal{V}(X) \leq \mathcal{V}(Y).$$

Considérons en outre la propriété γ) suivante :

γ) Si X et Y sont deux variables aléatoires quelconques, on a :

$$|\mathcal{V}(Y) - \mathcal{V}(X)| \leq \mathcal{V}(|Y - X|).$$

Cette propriété γ) n'est peut être pas aussi logiquement nécessaire que les précédentes ; elle est néanmoins naturelle, et adéquate à la plupart des applications.

Nous supposerons que pour tout ce qui suit, un choix déterminé de l'opérateur $\mathcal{V}$ a été fait, possédant les propriétés α), β), γ), à part cela quelconque.

Problème Préliminaire II :

t désignant l'instant actuel, supposons qu'on donne à $\mathcal{E}$ à choisir entre les deux situations suivantes :

- Situation 1 - Une somme déterminée (non aléatoire) x sera versée à $\mathcal{E}$ à l'époque τ ($\tau > t$) ;

- Situation 2 - Une somme déterminée (non aléatoire) y est versée à $\mathcal{E}$ immédiatement à l'instant actuel t ;

Quelle doit être, pour x donné, la valeur $\mathcal{A}_{t,\tau}(x)$ de y pour que le choix soit indifférent ?

Là encore, nous éviterons d'entrer dans des discussions, qui rejoindraient d'ailleurs celles relatives au Problème Préliminaire I ; nous pouvons considérer comme logiquement nécessaire que l'opérateur $\mathcal{A}_{t,\tau}(x)$ possède les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{A}_{t,\tau}(x)$ est une fonction monotone non-décroissante de x ; $\mathcal{A}_{t,\tau}(o) = 0$, et pour $x \neq 0$, $\mathcal{A}_{t,\tau}(x)$ est nulle ou du signe de x ;

b) $|\mathcal{A}_{t,\tau}(x)| \leq |x|$;

c) $\lim_{\tau \to t+o} \mathcal{A}_{t,\tau}(x) = x$;

d) $\mathcal{A}_{t,\tau}(x) = \mathcal{A}_{t,u}[\mathcal{A}_{u,\tau}(x)]$ pour tout $t \leq u \leq \tau$ (1,1)

(propriété de semi-groupe généralisé).

Un intérêt particulier s'attache aux $\mathcal{A}_{t,\tau}(x)$ qui satisfont en outre à la propriété de stationnarité :

e) Dans $\mathcal{A}_{t,\tau}(x) = \mathcal{A}(h ; x)$, t et τ n'interviennent que par leur différence $h = \tau - t \geq 0$; il semble en effet nécessaire que le propriété e) soit satisfaite lorsque le $\mathcal{E}$ de référence échappe au vieillissement ; alors la condition d) s'écrit :

$$\mathcal{A}(u + v ; x) = \mathcal{A}[u ; \mathcal{A}(v ; x)] \quad (u, v \geq 0). \tag{1,2}$$

et nous poserons :

$$\mathcal{A}(1 ; x) = A(x). \tag{1,3}$$

Considérons enfin la propriété de linéarité suivante :

f) $\mathcal{A}_{t,\tau}(x + y) = \mathcal{A}_{t,\tau}(x) + \mathcal{A}_{t,\tau}(y)$;

cette propriété f) ne s'impose pas de façon évidente, il y a sans doute des cas où elle ne conviendrait pas, mais elle est naturelle et convenable dans la plupart des applications intéressantes.

Or, il y a une seule façon de satisfaire à la fois à a), b), c), d), e), f), c'est de prendre $\mathcal{A}(h ; x)$ de la forme :

$$\mathcal{A}(h\ ;\ x) = e^{-ih}.\ x \tag{1,4}$$

où i est une constante ≥ 0 quelconque ; si on pose :

$$e^{-i} = \frac{1}{1+r}, \tag{1,5}$$

la constante ≥ 0, r, qui définit $\mathcal{A}(h\ ;\ x)$ est connue sous le nom de *taux d'actualisation* ; de sorte que :

$$A(x) = \frac{x}{1+r}. \tag{1,6}$$

Nous supposerons pour la suite qu'on a choisi une fois pour toute un taux d'actualisation $r \geq 0$, et nous adopterons pour $\mathcal{A}_{t,\tau}(x)$ la forme (1,4) - (1,6) correspondante.

Problème Préliminaire III :

Supposons qu'à l'instant actuel t, on donne à un individu $\mathcal{E}$ à choisir entre les deux situations suivantes :

- Situation 1 : Une somme aléatoire X sera versée à l'époque $\tau(\tau = t + h,\ h \geq 0)$;
- Situation 2 : Une somme déterminée (non aléatoire) y est versée à $\mathcal{E}$ immédiatement ;

Quelle doit être la valeur de y pour que le choix soit indifférent ?

La réponse $y = \mathcal{A}[h\ ;\ \mathcal{V}(X)]$ découle obligatoirement de la résolution des Problèmes Préliminaires I et II.

Notion de programmation dynamique :

A certains égards, il y a lieu de distinguer les programmations dynamiques *discrètes* (dans le temps) et les programmations dynamiques *permanentes* (dans le temps) ; les réflexions qui vont suivre sont évidemment valables pour les unes comme pour les autres ; nous conviendrons de nous placer, sauf mention du contraire, dans le cas discret, plus commode pour l'exposition.

Considérons l'évolution (discrète dans le temps) d'un système, par exemple économique, Σ dont les états possibles, x, y,... forment un ensemble ou espace $\mathcal{X}$ sur lequel nous ne supposerons pour le moment rien de particulier ; supposons que cette évolution est à la fois partiellement *aléatoire* et partiellement *contrôlée* ; autrement dit, le passage de l'état x_n occupé par Σ à l'époque n, à l'état x_{n+1} pris par Σ à l'époque *suivante* (n + 1) se fait sous l'influence d'une intervention H_n du *hasard* et de la prise D_n d'une *décision* par l'organe (en général humain) contrôlant le système.

Naturellement, comme cas particulier, il peut arriver que :

1/ il n'y a pas d'interventions du hasard ; on a alors affaire à une évolution *déterministe* ;

2/ il n'y a pas d'intervention de décisions par un organe de contrôle ; l'évolution considérée n'est alors pas autre chose qu'un *processus stochastique*.

Les processus stochastiques ne nous intéressent pas ici ; nous supposerons donc toujours qu'il y a intervention de décisions. Ceci dit, nous nous réfèrerons en principe au cas général non-déterministe, l'adaptation de ce que nous dirons au cas particulier déterministe étant naturellement immédiate.

Il y a également lieu de distinguer le cas d'une évolution débutant à une époque déterminée, que nous supposerons alors être n = 0 ; et le cas d'une évolution en cours depuis $n = -\infty$; ce deuxième cas soulève quelques questions spécifiques ; mais en principe nous nous limiterons au cas d'une évolution débutant à l'époque n = 0.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, considérer que les interventions du hasard H_n et les prises de décision D_n se succèdent au cours du temps en s'alternant mutuellement, selon le schéma :

$$\ldots,\ H_{n-1},\ D_{n-1},\ H_n,\ D_n,\ H_{n+1},\ D_{n+1},\ldots\ ; \tag{1,7}$$

en effet, deux interventions du hasard, H et H', qui se succèderaient sans que s'intercale entre elles une prise de décision, peuvent toujours être considérées comme formant une intervention du hasard unique ; de façon analogue, deux prises de décision D et D' qui se succèderaient sans que s'intercale entre elles une intervention du hasard, peuvent être considérées comme une prise de

décision unique ; ce qui permet de toujours se ramener au schéma (1,7), auquel nous nous référerons toujours par la suite.

Nous supposerons que les "périodes" : ..., (n - 1, n), (n, n + 1), ..., sont toutes de même durée 1 ; l'extension de ce qui va suivre au cas où ces périodes auraient des durées quelconques s'étudierait facilement.

2 - EVOLUTIONS DE PREMIERE ESPECE -

Ceci dit, il apparaît qu'on peut distinguer deux cas :

Nous dirons que l'évolution de Σ est de *première espèce* si, pour tout $n \geq 0$, l'intervention H_n du hasard *précède* la prise D_n d'une décision ; elle sera dite *de seconde espèce* si au contraire la prise D_n d'une décision précède l'intervention H_n du hasard.

Il est facile de se rendre compte qu'une même évolution peut être décrite comme une évolution de première espèce, aussi bien que comme une évolution de seconde espèce ; seules des raisons de commodité amènent à choisir un mode de description au lieu de l'autre ; les deux descriptions présentent d'ailleurs de grandes analogies ; mais la description de première espèce est souvent plus facile à manier. Il est curieux que dans la littérature, cette possibilité de choisir entre les deux descriptions ait été peu soulignée, et qu'on ait presque toujours utilisé la description de seconde espèce.

Nous ferons au contraire usage en principe de la description de première espèce ; elle se prête plus facilement à l'exposé ; d'autre part, les deux descriptions ont une analogie telle que les principales notions et les principaux résultats que nous mettrons en évidence à l'aide de la description de première espèce, s'étendraient au cas d'une description de seconde espèce, le plus souvent de façon si immédiate que nous nous dispenserons de procéder explicitement à cette extension.

Il y a cependant des points à propos desquels la situation n'est pas la même suivant qu'on a affaire à une description de première espèce, ou a une description de seconde espèce, nous en signalerons à l'occasion.

Considérons donc l'évolution de Σ en description de première espèce.

On peut interpréter H_n comme consistant à attribuer à un paramètre aléatoire Ω_n à valeurs dans un espace $\mathcal{H}$, une valeur ω_n selon une loi de probabilité p_n ; on peut toujours supposer que $\mathcal{H}$ ne dépend pas de n ni de l'histoire de Σ jusqu'à l'époque n incluse.

D_n peut s'interpréter comme consistant à choisir pour Σ un état déterminé, qui sera son état x_{n+1} pour l'époque (n+1), ce choix se faisant parmi les états d'un sous-ensemble $e_n \subset \mathcal{X}$.

L'évolution de Σ jusqu'à l'époque n est donc constituée par la suite ordonnée :

$$x_o, \omega_o \; ; \; x_1, \omega_1 \; ; \; x_2, \omega_2 \; ; \ldots ; \; x_{n-1}, \omega_{n-1} \; ; \; x_n$$

que nous appellerons la suite S_n.

La loi de probabilité :

$$\begin{aligned} p_n &= p_n(x_o, \omega_o \; ; x_1, \omega_1 \; ; \ldots ; x_{n-1}, \omega_{n-1} \; ; x_n, d\omega_n) \\ &= p_n(S_n \; ; d\omega_n) \end{aligned}$$

peut donc dépendre de n et de cette suite S_n. Quant au sous-ensemble :

$$\begin{aligned} e_n &= e_n(x_o, \omega_o \; ; x_1, \omega_1 \; ; \ldots ; x_{n-1}, \omega_{n-1} \; ; x_n, \omega_n) \\ &= e_n(S_n \; ; \omega_n), \end{aligned}$$

il peut dépendre de n, de la suite S_n, et également de ω_n.

Evolutions économiques et bénéfice annuel.

Nous ne nous intéresserons qu'aux évolutions que nous appellerons "économiques" ; l'évolution de Σ est une *évolution économique* si elle satisfait à la condition suivante, que nous énonçons en supposant, pour faciliter le langage, que l'unité de temps est l'année :

A chaque époque n est associée une fonction réelle déterminée de n, de S_n, de ω_n et de x_{n+1}, que nous désignerons par :

$$G_n = G_n(x_o, \omega_o ; x_1, \omega_1 ; \ldots ; x_n, \omega_n ; x_{n+1})$$
$$= G_n(S_n, \omega_n ; x_{n+1}) ;$$

nous dirons que G_n est le *bénéfice annuel* à l'époque n, et nous l'interprèterons comme un bénéfice ou somme ($\gtrless 0$) *perçu à l'époque* (n + 1) par l'individu $\mathcal{E}$ possédant, contrôlant et exploitant Σ, *si l'évolution de* Σ *jusqu'à l'époque* (n + 1) *a été celle décrite par* S_n, ω_n, x_{n+1}.

Une évolution économique est définie par la donnée, pour tout n, des fonctions p_n, e_n, G_n.

Applications de transition des évolutions économiques :

n ayant une valeur fixée quelconque, appelons $\mathcal{A}_{n+1}$ la classe des fonctions :

$$f(x_o, \omega_o ; \ldots ; x_n, \omega_n ; x_{n+1}) = f(S_n, \omega_n ; x_{n+1})$$

numériques réelles (finies) des x_j ($0 \leqslant j \leqslant n+1$) et des ω_j ($0 \leqslant j \leqslant n$), ou plus brièvement de S_n, de ω_n et de x_{n+1} ; et soit Φ_n l'application de $\mathcal{A}_{n+1}$ dans $\mathcal{A}_n$ définie par :

$$g(S_{n-1}, \omega_{n-1}, x_n) = A[\mathcal{V}\left\{\max_{y \in e_n(S_n, \Omega_n)} [G_n(S_n, \Omega_n, y) + f(S_n, \Omega_n, y)]\right\} \in \mathcal{A}_n \qquad (2,1)$$

ou symboliquement :

$$g = \Phi_n[f] ; \qquad (2,2)$$

l'opérateur A est celui défini par (1,6) ; l'opérateur $\mathcal{V}$ est celui introduit au paragraphe 1 à propos du Problème Préliminaire I.

On remarque tout de suite que le second membre de (2,1) n'a pas forcément un sens pour tout f de $\mathcal{A}_{n+1}$; nous appellerons $\mathcal{B}_{n+1}$ la classe des fonctions $f \in \mathcal{A}_{n+1}$ qui ont la propriété suivante :

pour tous : x_j ($0 \leqslant j \leqslant n$),

pour presque-tous : ω_j ($0 \leqslant j \leqslant n - 1$),

le second membre de (2,1) a un sens.

Dans cet énoncé, le terme "presque-tous" est pris au sens du Calcul des Probabilités, c'est-à-dire relativement aux mesures p_j ($0 \leqslant j \leqslant n - 1$).

Il faut donc considérer que Φ_n est une application, non pas de $\mathcal{A}_{n+1}$, mais seulement de $\mathcal{B}_{n+1}$, dans $\mathcal{A}_n$. Nous dirons que Φ_n est *l'application de transition* pour l'époque n de l'évolution dynamique.

Pour la suite, il nous sera également utile d'introduire la définition suivante : nous appellerons $\mathcal{C}_{n+1}$ la classe des fonctions $f \in \mathcal{B}_{n+1}$ possédant la propriété suivante :

pour tous : x_j ($0 < j < n$),

pour presque-tous : ω_j ($0 < j < n$),

il existe au moins un élément : $y = \varphi_n(S_n, \omega_n) \in e_n(S_n, \omega_n)$ (2,3)

de $e_n(S_n, \omega_n)$ tel que :

$$G_n[S_n, \omega_n ; \varphi_n(S_n, \omega_n)] + f[S_n, \omega_n ; \varphi_n(S_n, \omega_n)] = \max_{y \in e_n(S_n, \omega_n)} [G_n(S_n, \omega_n ; y) + f(S_n, \omega_n ; \varphi_n(S_n, \omega_n)].$$

Remarque (2,1) - En description de seconde espèce également, s'introduisent des applications de transition ψ_n analogues aux Φ_n ci-dessus ; la définition des ψ_n est analogue à (2,1), la différence principale consistant en ce que l'ordre des opérateurs $\mathcal{V}$ et max. est inversé. S'introduisent également les analogues des classes $\mathcal{A}_{n+1}$, $\mathcal{B}_{n+1}$, $\mathcal{C}_{n+1}$.

Valuations et programmations dynamiques :

n ayant une valeur fixée quelconque ; S_n, ω_n, x_{n+1} ayant des valeurs fixées quelconques, posons-nous le problème suivant :

Supposons que l'individu $\mathcal{E}$ (possédant, contrôlant et exploitant Σ, ait à l'époque (n + 1), connaissant n, S_n, ω_n et x_{n+1}, à choisir entre les deux situations suivantes :

- Situation 1 - Continuer l'exploitation de Σ ;

- Situation 2 - Abandonner la propriété et l'exploitation de Σ mais percevoir (sur le champ) une somme y ; pour quelle valeur de y le choix est-il indifférent ?

Il n'est pas évident que, dans le cas général, cette question ait un sens ; si elle a un sens, cela implique qu'il existe une valeur $\bar{y}$ de y pour laquelle le choix est effectivement indifférent, et cette valeur est nécessairement unique.

Nous dirons que l'évolution économique est *valuée* pour l'époque (n + 1), si pour cette époque (n + 1), et pour toutes valeurs données de S_n, ω_n, x_{n+1}, le problème précédent a un sens ; la valeur $\bar{y}$ de y pour laquelle le choix est indifférent est alors une fonction déterminée $f(S_n, \omega_n ; x_{n+1})$ de S_n, ω_n, x_{n+1} ; autrement dit, c'est une fonction déterminée de la classe $\mathcal{A}_{n+1}$, dont nous dirons qu'elle est la *valuation* de l'évolution économique pour l'époque (n + 1).

On appelle *programmation dynamique*, l'étude, pour une évolution économique donnée, de l'existence et des propriétés de ses valuations aux diverses époques.

Nous désignerons d'une façon générale par :

$$f_n = f_n(S_{n-1}, \omega_{n-1} ; x_n) = f_n(x_o, \omega_o ; x_1, \omega_1 ; \ldots ; x_{n-1}, \omega_{n-1} ; x_n)$$

la valuation à l'époque n de l'évolution économique, si cette valuation existe, c'est-à-dire si l'évolution est valuée pour l'époque n.

Programmations dynamiques régulières et presque-régulières à une époque donnée.

Une programmation dynamique est *presque-régulière à l'époque n*, si l'évolution économique est valuée à l'époque (n + 1), et si la valuation f_{n+1} pour cette époque appartient à la classe $\mathcal{B}_{n+1}$. Elle est *régulière* à l'époque n si plus strictement f_{n+1} appartient à $\mathcal{C}_{n+1}$.

Conclusion

Comme on le verra par la suite, les seules programmations dynamiques auxquelles il y a lieu de s'intéresser sont les programmations dynamiques régulières, ou au moins presque-régulières.

Or on constate que cette notion de programmation dynamique régulière ou presque-régulière est extrêmement complexe ; elle comporte d'une part une structure de processus, définie par les p_n et les e_n ; puis l'intervention des G_n superpose à cette structure de processus, une structure "économique".

Tout ceci ne fait encore qu'une évolution économique ; on n'arrive à la notion de programmation dynamique que par l'adjonction de la notion de valuation.

Mais pour arriver plus précisément à la notion de programmation dynamique *régulière*, ou *presque-régulière*, il faut en outre, pour la définition des classes $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{B}_{n+1}$, se référer à des solutions déterminées des Problèmes Préliminaires du paragraphe 1, puisque les $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{B}_{n+1}$ dérivent des applications de transition Φ_n dont la définition suppose celle préalable des opérateurs A et $\mathcal{V}$.

3 - VALUATIONS ET APPLICATIONS DE TRANSITION -

Soit une programmation dynamique, *presque-régulière* à *l'époque n*, et soit f_{n+1} sa valuation à l'époque (n + 1). Plaçons-nous à l'époque n ; S_n est connue ; si Ω_n prend la valeur ω_n, et si D_n place Σ, à l'époque (n + 1) dans l'état y, $\mathcal{E}$ percevra [la perception s'effectuant à l'époque (n + 1)], $G_n(S_n, \omega_n ; y)$; en outre $\mathcal{E}$ se trouvera à cette même époque (n + 1) "propriétaire" d'un système Σ "valant" par hypothèse $f_{n+1}(S_n, \omega_n ; y)$, de sorte qu'au total $\mathcal{E}$ sera détenteur à l'époque (n + 1) d'une valeur égale à :

$$F_{n+1}(S_n, \omega_n ; y) = G_n(S_n, \omega_n ; y) + f_{n+1}(S_n, \omega_n ; y). \qquad (3,1)$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas d'une programmation régulière à l'époque n ; puisque H_n intervient avant D_n (nous supposons toujours une description de première espèce), la prise de décision D_n de $\mathcal{S}$ consistera naturellement à attribuer à Σ à l'époque (n + 1) comme état x_{n+1} l'état (ou l'un des états) :

$$x_{n+1} = \varphi_n(S_n, \omega_n) \tag{3,2}$$

défini par (2,3) comme maximant (3,1) : ceci a un sens et est possible, puisque par hypothèse $f_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$; nous dirons que, ce faisant, $\mathcal{S}$ suit *la tactique optimale* TO_n *pour l'époque n*.

Dans ces conditions, la valeur que $\mathcal{S}$ détiendra effectivement à l'époque (n + 1) sera :

$$\max_{y \in e_n(S_n, \omega_n)} F_{n+1}(S_n, \omega_n ; y). \tag{3,3}$$

Prenons maintenant le cas d'une programmation qui est seulement presque-régulière ; alors il peut ne pas exister de $y \in e_n(S_n, \omega_n)$ maximant $F_{n+1}(S_n, \omega_n ; y)$; mais il existe toujours des $y \in e_n(S_n, \omega_n)$ rendant $F_{n+1}(S_n, \omega_n ; y))$ aussi proche qu'on le veut de son maximum sur $e_n(S_n, \omega_n)$; dans ces conditions, (3,3) est encore l'évaluation correcte de la valeur totale détenue par $\mathcal{S}$ à l'époque (n + 1).

Alors, compte-tenu de ce que Ω_n est aléatoire, par application de notre étude des Problèmes Préliminaires I, II, III, il existe une somme déterminée $f_n(S_{n-1}, \omega_{n-1} ; x_n)$, équivalente à l'époque n (donc avant H_n) à (3,3) ; et elle est donnée par :

$$f_n(S_{n-1}, \omega_{n-1}; x_n) = A\left\{ \mathcal{V}\left\{ \max_{y \in e_n(S_n, \Omega_n)} [G_n(S_n, \Omega_n ; y) + f_{n+1}(S_n, \Omega_n ; y)\right\}\right\} \tag{3,4}$$

on reconnaît dans (3,4) l'application de transition Φ_n ; d'où :

THEOREME (3,1) - Si une programmation dynamique est presque-régulière à l'époque (n + 1), et de valuation f_{n+1} à cette époque, elle est valuée à l'époque *précédente* n, et sa valuation f_n à cette époque n se déduit de f_{n+1} par l'application de transition Φ_n :

$$f_n = \Phi_n[f_{n+1}]. \tag{3,5}$$

La programmation dynamique va donc poser deux problèmes principaux : l'étude des valuations ; l'étude des tactiques optimales.

L'étude des valuations reposera sur la relation de récurrence rétrograde (3,5), dont il suffit pour qu'elle ait un sens qu'il y ait presque-régularité.

Par contre, la notion de tactique optimale ne peut être introduite que s'il y a régularité.

Pour tout couple d'époques (n, s) avec n < s, nous poserons :

$$\Phi_{n,s} = \Phi_n \Phi_{n+1} \dots \Phi_{s-1} \Phi_s. \tag{3,6}$$

Nous dirons que :

- Φ_n est presque-régulière si $\Phi_n(f) \in \mathcal{B}_n$ pour toute $f \in \mathcal{B}_{n+1}$;
- Φ_n est régulière si $\Phi_n(f) \in \mathcal{C}_n$ pour toute $f \in \mathcal{C}_{n+1}$;
- la programmation dynamique est presque-régulière si pour chaque n, Φ_n est presque-régulière ;
- la programmation dynamique est régulière si, pour chaque n, Φ_n est régulière.

4 - ETUDES DES VALUATIONS -

Comme Corollaire du Théorème (3,1) on obtient immédiatement :

THEOREME (4,1) - Si une programmation dynamique est presque-régulière à l'époque s ; si elle est presque-régulière et si sa valuation à l'époque (s + 1) est $f_{s+1} \in \mathcal{B}_{s+1}$, elle est valuée pour toute époque $n \leqslant s$, et sa valuation f_n pour l'époque n se déduit de f_{s+1} par :

$$f_n = \Phi_{n,s}\,[f_{s+1}]. \tag{4,1}$$

Concernant les valuations, le problème posé sera généralement le suivant : calculer f_n pour l'époque présente (initiale) $n = 0$, et pour les époques futures rapprochées, soit finalement pour les valeurs :

$$0 \leqslant n < h$$

comprises entre 0 et un nombre h positif de l'ordre de quelques unités, (de 5 à 10, l'unité étant l'année). Alors on sera généralement dans l'un ou l'autre des deux cas suivants :

Cas I - Il existe une époque $s \geqslant h$, telle qu'on connaît la valuation f_{s+1} pour l'époque $(s + 1)$; alors (4,1) résoud immédiatement le problème posé.

Ce cas I n'est sans doute pas fréquent ; on peut toutefois en citer des exemples.

Cas II - Il n'existe aucune époque $s \geqslant h$ telle qu'on connaisse la valuation f_{s+1} pour l'époque $(s + 1)$.

Au premier abord, il peut sembler paradoxal que, si par hypothèse l'évolution économique est valuée à l'époque $(s + 1)$, donc si par hypothèse il existe une f_{s+1} bien déterminée, on ne puisse connaître cette f_{s+1} ; mais, sur une époque $(s + 1)$ future un peu éloignée, notre information est généralement très faible ; lui associer une f_{s+1} correspondante significative et bien déterminée se heurte à des objections et à des difficultés, qui sont de même nature que celles que l'on rencontre très souvent lorsque, en Statistique et pour l'estimation d'un paramètre, on essaie d'introduire la loi de probabilité a priori de ce paramètre, afin par exemple d'utiliser la formule de Bayes.

On se trouve alors en présence de deux difficultés :

Difficulté n° 1 - Difficulté dans les concepts eux-mêmes, portant particulièrement sur le concept même de valuation ;

Difficulté n° 2 - Difficulté pratique, puisque le calcul des f_n pour $n < h$, qui était l'objet même du problème, ne peut être exécuté.

Mais choisissons une valeur déterminée quelconque de $s \geqslant h$; et, dans $\mathcal{B}_{s+1}$, prenons une fonction g déterminée quelconque ; posons :

$$g_n = \Phi_{n,s}[g] \; ; \tag{4,2}$$

si on se reporte à la forme (3,6) de $\Phi_{n,s}$, et à la théorie des "Théorèmes de point fixe", il devient intuitif que, sous certaines conditions, mais assez larges, il doit se produire le fait suivant : si $(s - h)$ est assez grand, g_n dépend arbitrairement peu du choix de $g \in \mathcal{B}_{s+1}$; s'il en est ainsi, on pourra procéder de la façon suivante : on choisira une valeur de s assez grande, puis dans $\mathcal{B}_{s+1}$ on choisira arbitrairement une fonction g déterminée ; la fonction g_n qu'on en déduira par (4,2) pourra être considérée comme une approximation suffisante de la f_n cherchée ; et l'on peut admettre que la difficulté n° 2 ci-dessus (difficulté pratique) est ainsi résolue de façon satisfaisante. Nous ne nous demanderons pas ici si la difficulté n° 1 se trouve résolue du même coup.

L'application envisagée des "Théorèmes de point fixe" a été entreprise de longue date, mais pas dans des conditions aussi générales qu'il est possible - et facile - de le faire ; c'est pourquoi nous allons y revenir. Notons d'abord deux propriétés fondamentales et immédiates des applications de transition.

Pour une époque n déterminée quelconque, soient $g^{(1)} = g^{(1)}\,(S_n, \omega_n, y)$ et $g^{(2)} = g^{(2)}\,(S_n, \omega_n, y)$ deux fonctions de $\mathcal{B}_{n+1}$, telles que :

$$g^{(1)} \leqslant g^{(2)}$$

pour toutes valeurs des variables

$$S_n, \omega_n, y \; ;$$

mais quelconques par ailleurs. Il résulte alors de la propriété β) de $\mathcal{V}$ et de la propriété a) de $\mathcal{A}_{t,\tau}$ que :

THEOREME (4,2) - Si $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ sont deux fonctions de $\mathcal{B}_{n+1}$, telles que :

$$g^{(1)} \leqslant g^{(2)} \tag{4,3}$$

et quelconques par ailleurs, on a :

$$\Phi_n(g^{(1)}) \leqslant \Phi_n(g^{(2)}). \tag{4,4}$$

Maintenant, soit g une fonction quelconque de $\mathcal{B}_{n+1}$, et λ une constante quelconque ; alors la fonction :

$$g + \lambda = g(S_n, \omega_n, y) + \lambda$$

appartient aussi à $\mathcal{B}_{n+1}$; d'après la propriété γ) de $\mathcal{V}$ et le choix (1,6) de A, il vient :

THEOREME (4,3) - Quelle que soit la fonction $g \in \mathcal{B}_{n+1}$ et quelle que soit la constante λ, on a :

$$|\Phi_n(g + \lambda) - \Phi_n(g)| \leqslant \frac{\lambda}{1 + r}. \tag{4,5}$$

Remarque (4,1) - On peut vérifier immédiatement que les Théorèmes (4,2) et (4,3) valent également pour les applications de transition en description de deuxième espèce.

Soient maintenant $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ de $\mathcal{B}_{n+1}$; posons :

$$\lambda(S_n, \omega_n) = \underset{y \in e_n(S_n, \omega_n)}{\text{p. p. b. s.}} \; |g^{(2)}(S_n, \omega_n ; y) - g^{(1)}(S_n, \omega_n ; y)| \; ;$$

on déduit immédiatement de la définition (2,1) de Φ_n, de (4,4) et de (4,5) que :

$$\underset{x \in e_{n-1}(S_{n-1}, \omega_{n-1})}{\text{p. p. b. s.}} \; |\Phi_n(g^{(2)}) - \Phi_n(g^{(1)})| \leqslant \frac{1}{1 + r} \mathcal{V}[\lambda(S_n, \Omega_n)] \tag{4,6}$$

Remarque (4,2) - Un résultat analogue à (4,6) quoiqu'un peu différent, peut être établi dans le cas d'une description de seconde espèce.

D'une façon générale, pour deux fonctions (numériques réelles) $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$ d'un même argument z tout à fait quelconque, posons :

$$||h^{(2)} - h^{(1)}|| = \underset{z}{\text{p. p. b. s.}} \; |h^{(2)}(z) - h^{(1)}(z)| \leqslant +\infty. \tag{4,7}$$

Il résulte alors de (4,6) que :

THEOREME (4,4) - Si $g^{(1)}$ et $g^{(2)}$ sont deux fonctions de $\mathcal{B}_{s+1}$ et si la programmation est presque-régulière, on a pour tout $n \leqslant s$:

$$\| \Phi_{n,s}(g^{(2)}) - \Phi_{n,s}(g^{(1)}) \| \leqslant \frac{1}{(1+r)^{s-n+1}} \|g^{(2)} - g^{(1)}\| \tag{4,8}$$

Remarque (4,3) - Le Théorème (4,4) est visiblement valable également en description de seconde espèce.

Sous les hypothèses qui ont été précisées, et si le taux d'actualisation r à une valeur > 0 (d'ailleurs quelconque), (4,8) établit bien, pour les grandes valeurs de (s-n), une indépendance du type cherché entre le choix d'une fonction $g \in \mathcal{B}_{s+1}$ et la fonction g_n qu'on en déduit par :

$$g_n = \Phi_{n,s}(g).$$

Si on interprète en termes de "Théorèmes de point fixe" le résultat obtenu, on reconnaît qu'il se rattache à la sorte la plus sommaire et élémentaire de "Théorèmes de point fixe" ; et l'idée vient à l'esprit que le recours à des Théorèmes de point fixe perfectionnés, à découvrir ou pris parmi ceux déjà existants, pourrait faire faire un pas important à la Théorie de la programmation dynamique.

Nous n'avons pas un tel espoir, du moins s'agissant d'un problème à signification économique ; en effet (4,8) met en évidence que l'indépendance asymptotique de $g_n = \Phi_{n,s}(g)$ vis à vis de $g \in \mathcal{B}_{s+1}$ provient fondamentalement, compte-tenu des propriétés de $\mathcal{V}$, du choix (1,6) de A, et du choix d'un $r > 0$.

Or la discussion au parag. 1 du Problème Préliminaire II montre que ce choix (1,6) de A, à première vue assez arbitraire, n'est pas loin d'être obligatoire si l'on veut respecter quelques conditions bien naturelles.

Il serait par ailleurs bien contestable, dans un problème économique, de ne pas prendre $r > 0$: alors (4,8) nous convainc qu'avec un $r > 0$, ce seront toujours des propriétés de point fixe relativement grossières qui interviendront.

Mais naturellement, si on a pris $r = 0$, ce qui peut être justifié dans un problème d'origine physique, par exemple, ou même peut être dans un problème économique de caractère spécial, il est possible que des Théorèmes de point fixe perfectionnés puissent prendre une grande importance.

Remarque (4,4) - (4,8) n'est de toutes façons significatif que si $\|g^{(2)} - g^{(1)}\| < +\infty$, ce qui limite sa portée ; si Σ est un système économique, à extension non-bornée d'avance, les fonctions de la classe $\mathcal{B}_{s+1}$, et par suite la différence de deux d'entre elles, ne seront probablement pas bornées ; un progrès important à obtenir serait l'élargissement de (4,8) dans cette direction ; mais nous ne considèrerons pas ici ce problème, à notre connaissance encore peu étudié.

Nous regarderons plutôt comment on peut utiliser (4.8) dans un cas où par hypothèse (4,8) serait valide et suffisant.

Etant donnée la valuation f_l pour une époque l quelconque, soit g_l une estimation plus ou moins erronnée de f_l ; convenons d'évaluer l'erreur commise en adoptant g_l comme valeur de f_l par la quantité (supposée finie) :

$$\|g_l - f_l\|.$$

Soit alors ε un nombre > 0 tel que, pour tout $n < h$, une erreur $\leqslant \varepsilon$ sur l'évaluation de f_n soit considérée comme négligeable.

Enfin appelons Hypothèse L l'hypothèse qu'on sait, pour toute époque $s \geqslant h$, trouver une estimation g de f_{s+1}, erronée mais avec une erreur :

$$\|g - f_{s+1}\|$$

ne surpassant pas un nombre $M > 0$ fixé quelconque. Si l'hypothèse L est satisfaite, il suffira alors de prendre $s \geqslant h$ assez grand pour que :

$$M/\varepsilon \leqslant (1 + r)^{s+1-h} \tag{4,9}$$

pour que les fonctions :

$$g_n = \Phi_{n,s}(g) \tag{4,10}$$

soient des estimations satisfaisantes des f_n pour $0 \leqslant n < h$.

Ce résultat n'a pas autant de portée qu'il semble au premier abord parce que l'Hypothèse L ne sera souvent pas satisfaite. Il serait intéressant de discuter ce point en détail, mais nous ne le ferons pas ici.

Plaçons-nous toujours dans un cas où l'Hypothèse L est satisfaite ; (4,9) assigne à s une limite inférieure s_o, plus petit entier $\geqslant h$ tel que :

$$M/\varepsilon \leqslant (1 + r)^{s_o+1-h}$$

mais d'autre part, en général, l'estimation des p_1, e_1, G_1 etc. deviendra, pour l croissant, de plus en plus floue, au point d'être à peu près dépourvue de sens à partir d'une certaine époque s, de sorte qu'il faudra éviter d'utiliser (4,10) avec $s > s_1$; il faut donc finalement opérer avec une valeur de s telle que :

$$s_o \leqslant s \leqslant s_1$$

ce qui est possible si, *mais seulement si* $s_1 \geqslant s_o$; c'est-à-dire si :

$$M/\varepsilon \leqslant (1 + r)^{s_1+1-h} \; ; \tag{4,11}$$

si l'on admet que s_1 est déterminé sans doute sans rigueur, mais objectivement, nous arrivons à la conclusion que r doit être assez grand pour que (4,11) ait lieu ; l'intérêt de cette remarque est qu'elle donne une interprétation du taux d'actualisation, et une base raisonnable pour choisir sa valeur ; on peut en effet énoncer (4,11) en langage qualitatif en disant que le taux d'actualisation r doit être assez grand pour rendre négligeable, sur l'époque présente et le futur à court terme, l'effet de l'impossibilité de faire des prévisions significatives, sur les époques futures dépassant une certaine date s_1. Ceci différencie nettement le taux d'actualisation d'un taux d'intérêt lié au marché de l'argent à court terme.

Remarque (4,5) - (4,8) et ce que nous venons d'en déduire, pourrait s'étendre de façon évidente si l'on envisageait d'introduire un taux d'actualisation variable au cours du temps.

DISCUSSION

M. FERON - Dans la notion de valuation peut-on faire intervenir les bénéfices futurs ?

M. FORTET - La valuation est faite des bénéfices futurs - Il faut se poser la question de convergence mais on est gêné par le fait que l'évolution a une fin.