

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2 *Série Mathématiques*

C. LANCZOS

Le tenseur de Riemann à quatre dimensions

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 167-170

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_167_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE TENSEUR DE RIEMANN A QUATRE DIMENSIONS

C. LANCZOS

(Dublin)

Je remercie Monsieur le Professeur Lichnerowicz qui m'a aimablement invité à parler ici de mes recherches en Relativité pendant les années passées. Il se trouve justement, que l'année dernière, j'ai réussi à trouver, par hasard, la solution de quelques problèmes qui m'avaient intéressé depuis longtemps.

Il est bien connu qu'Einstein n'a pas réussi à donner une interprétation physique du tenseur total de Riemann. Il a obtenu, par contraction, un nouveau tenseur du deuxième ordre, le "tenseur de courbure contracté" R_{ik} . De plus le tenseur :

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}$$

possède toutes les caractéristiques du "tenseur de matière" et apparaît comme l'interprétation géométrique de la matière physique. En raison de la très grande importance de cette découverte, le tenseur original de Riemann n'a jamais joué un rôle décisif dans le développement de la Relativité.

D'autre part, il était difficile de trouver dans la géométrie de Riemann quelque chose qui correspondrait aux phénomènes électro-magnétiques. Si nous analysons les équations fondamentales qui décrivent l'électro-magnétisme (c'est-à-dire les équations de Maxwell) :

$$F^{ia},_{\alpha} = 0$$

$$\tilde{F}^{ia},_{\alpha} = 0$$

(la virgule désigne la dérivation covariante), le signe $\sim$ désigne le tenseur dual).

nous remarquons que le nombre de dimensions de notre univers physique, qui est 4, devrait avoir une importance décisive. La symétrie de ces équations est une propriété spécifique d'un univers à quatre dimensions, parce que le tenseur dual :

$$F^{ik} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta ik} \quad (1)$$

(où $\delta^{\alpha\beta ik}$ représente le tenseur de permutation antisymétrique par rapport à tous les indices) est aussi un tenseur d'ordre 2. En général, l'ordre du tenseur dual est $n-2$ et nous n'obtenons 2 que si $n = 4$. De même, l'équation quantique de Dirac qui décrit l'électron, utilise spécifiquement la dimension quatre de l'univers physique. Toutefois la construction d'Einstein est possible pour toute dimension, sans caractère distinctif relatif à la dimension quatre.

Commençons par la remarque suivante. Habituellement, nous supposons que le deuxième système des équations de Maxwell :

$$\tilde{F}^{ia},_{\alpha} = 0 \quad (2)$$

est équivalent à l'existence d'un potentiel vecteur Φ_i tel que :

$$F_{ik} = \Phi_{k,i} - \Phi_{i,k} \quad (3)$$

En fait, cette conséquence exige que l'équation (2) soit valable en tous points du champ. Cependant,

nous pouvons déduire cette propriété du champ électro-magnétique d'une manière locale en procédant comme suit : nous utilisons le principe variationnel :

$$\delta \int F_{ik} F^{ik} d\tau = 0 \quad (4)$$

avec la condition auxiliaire :

$$\tilde{F}^{ia},_{\alpha} = 0 \quad (5)$$

ce qui nous donne par la méthode du multiplicateur de Lagrange le résultat (3). Nous pouvons considérer le multiplicateur de Lagrange - c'est-à-dire le potentiel vecteur - comme une "fonction génératrice" du champ électromagnétique.

Il semble remarquable qu'un développement tout à fait analogue soit possible dans le domaine d'une géométrie riemannienne à quatre dimensions. Nous définissons alors le tenseur dual du tenseur de courbure par :

$$\tilde{R}^{ijkm} = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} \delta^{\alpha\beta ij} \delta^{\mu\nu km} \quad (6)$$

On peut démontrer⁽¹⁾ que :

$$\delta \int R_{ijkm} \tilde{R}^{ijkm} d\tau = 0 \quad (7)$$

c'est une conséquence de la formule qui exprime la courbure de Riemann en fonction des g_{ik} . En outre, l'identité de Ricci nous donne :

$$\tilde{R}^{ijka},_{\alpha} = 0 \quad (8)$$

et nous devons considérer cette relation comme une condition auxiliaire du processus de variation. Nous observons que cette situation est tout à fait analogue à la situation précédente. Cependant, en vue de la propriété non-linéaire du nouveau problème, nous devons procéder d'une manière plus prudente dans l'application du principe variationnel.

Dans la théorie de la Relativité générale, il est usuel de considérer les quantités g_{ik} et Γ_{ik}^m comme des variables indépendantes du processus de variation. Nous allons utiliser cette méthode, mais d'une manière encore plus générale, parce que nous voulons y ajouter les quantités $\tilde{R}^{ijkm}$ comme variables indépendantes - c'est-à-dire que nous ne demandons pas que les $\tilde{R}^{ijkm}$ soient exprimés en fonction des g_{ik} . Nous voulons les considérer comme des quantités *purement algébriques*. Cela est possible, si nous ajoutons à notre fonction lagrangienne donnée $L(\tilde{R}^{ijkm}, g_{ik})$ les conditions auxiliaires :

$$\tilde{R}^{ijkm},_{m} = 0$$

$$\Gamma_{ik}^m - \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} = 0 \quad (9)$$

$$R_{ik} - F(\Gamma_{ik}^m) = 0$$

où $F(\Gamma_{ik}^m)$ désigne l'expression bien connue d'Einstein qui exprime R_{ik} en fonction des Γ_{ik}^m . Ces conditions auxiliaires nous donnent la fonction modifiée de Lagrange :

$$L' = L(\tilde{R}^{ijkm}, g_{ik}) + P_m^{ik} \left(\Gamma_{ik}^m - \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \right) + \rho^{ik} (R_{ik} - F(\Gamma_{ik}^m)) + H_{ijk} \tilde{R}^{ijkm},_{m} \quad (10)$$

Les variables canoniques de notre problème sont :

$$\left(\begin{matrix} g_{ik} & , & \Gamma_{ik}^m & , & \tilde{R}^{ijkm} \\ \rho^{ik} & , & P_m^{ik} & , & H_{ijk} \end{matrix} \right) \quad (11)$$

(1) C. Lanczos. Annals of Math. 39, 842 (1938).

Le tenseur H_{ijk} est anti-symétrique en i et j et possède donc 24 composantes indépendantes, tandis que le nombre des composantes indépendantes de $\tilde{R}_{ijkm}$ n'est plus que 20. L'équilibre est conservé grâce aux quatre conditions :

$$\tilde{H}^{ai}_{\alpha} = \frac{1}{2} H_{\mu\nu\alpha} \delta^{\mu\nu ai} = 0 \quad (12)$$

qui réduisent en fait le nombre 24 à 20. En outre, nous voulons remplacer H_{ijk} par l'expression :

$$H_{ijk} + \Phi_j g_{ik} - \Phi_i g_{jk} \quad (13)$$

ou le vecteur Φ_i est choisi de façon que :

$$H^{ai}_{\alpha} = 0 \quad (14)$$

Avec cette condition, le nombre des composantes de H_{ijk} est réduit de 20 à 16.

Si nous appliquons cette méthode au principe variationnel (7), nous démontrons encore une fois l'existence d'une "fonction génératrice" qui est maintenant un tenseur d'ordre 3 ; mais nous n'obtenons pas ainsi le tenseur total de Riemann. Divisons R_{ijkm} en deux parties en posant :

$$U_{ijkm} = R_{ijkm} - \tilde{R}_{ijkm} + \frac{R}{6} (g_{ik} g_{jm} - g_{im} g_{jk}) \quad (15)$$

$$V_{ijkm} = R_{ijkm} + \tilde{R}_{ijkm} - \frac{R}{6} (g_{ik} g_{jm} - g_{im} g_{jk})$$

Chacun de ces deux tenseurs possède 10 composantes. Le premier tenseur est bien connu à la suite des recherches de Rainich (1925) et Einstein (1926). Il s'exprime en fonction du tenseur contracté par la relation suivante :

$$\begin{aligned} U_{ijkm} = & \left(R_{ik} - \frac{R}{6} g_{ik} \right) g_{jm} + \left(R_{jm} - \frac{R}{6} g_{jm} \right) g_{ik} \\ & - \left(R_{im} - \frac{R}{6} g_{im} \right) g_{jk} - \left(R_{jk} - \frac{R}{6} g_{jk} \right) g_{im} \end{aligned} \quad (16)$$

Le tenseur V_{ijkm} contient toutes les composantes de R_{ijkm} qui ne sont pas absorbées par le tenseur R_{ik} . Pour ce dernier tenseur, nous obtenons le résultat :

$$\begin{aligned} V_{ijkm} = & 2 (H_{ijk,m} - H_{ijm,k} + H_{kmi,j} - H_{kmj,i}) \\ & - (A_{ik} g_{jm} + A_{jm} g_{ik} - A_{im} g_{jk} - A_{jk} g_{im}) \end{aligned} \quad (17)$$

où nous avons posé :

$$A_{ik} = A_{ki} = H^{a}_{i \quad k, \alpha} + H^{a}_{k \quad i, \alpha} \quad (18)$$

Ce résultat nous montre que le tenseur total de Riemann peut être construit à l'aide du tenseur contracté R_{ik} , si nous ajoutons une opération qui utilise les dérivations covariantes premières d'un nouveau tenseur H_{ijk} . Dans certaines conditions extraordinairement simplifiées, les 16 équations qui déterminent le tenseur H_{ijk} - et qui sont équivalentes à 8 équations complexes - se séparent en deux groupes indépendants de quatre équations complexes, correspondant à une paire d'équations de Dirac dans lesquelles le terme de masse est supprimé.

Nous obtenons un autre résultat intéressant. Supposons que nous remplacions le principe variationnel d'Einstein - qui utilise comme fonction lagrangienne la courbure scalaire R - par un principe dont la fonction de Lagrange est *quadratique* par rapport aux composantes de courbure. Il est bien connu que la fonction L la plus générale de ce type est :

$$L = a R_{ijkm} R^{ijkm} + b R_{ik} R^{ik} + c R^2 \quad (19)$$

Cependant cette expression est tautologique parce que le principe (7) nous permet de réduire la variation du premier terme à celle des autres termes. Il m'a semblé, dans mes recherches anté-

rieures, que nous pourrions omettre le premier terme et donc simplifier notre fonction de Lagrange en supprimant le tenseur total de Riemann. En fait, c'était une tactique bornée. En poursuivant de cette façon, les équations qui en résultent sont d'ordre 4 pour les g_{ik} et nous ne savons comment interpréter de telles équations ; car habituellement les équations fondamentales de la physique théorique sont des équations du premier ou du second ordre. Il est difficile d'opérer avec des équations d'ordre plus élevé.

Nous découvrons alors qu'il est possible de choisir la constante a de manière que les équations résultantes de champ soient *intégrées*. Nous n'obtenons plus une équation différentielle pour le tenseur de matière, mais une *expression explicite* en fonction du potentiel vecteur Φ_i et du tenseur H_{ijk} et de ses dérivées :

$$R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} = f(\Phi_i, H_{ijk})$$

Einstein s'est toujours opposé à l'idée de mettre quelques termes purement phénoménologiques à la droite de l'équation de la matière. Il considérait comme incompréhensible de combiner des quantités purement géométriques avec des quantités physiques qui ne possèdent aucun sens géométrique.

Dans notre étude, cette objection d'Einstein n'est pas valable, car nous n'avons pas ajouté d'éléments extérieurs ou étrangers à la géométrie de Riemann. Le second membre de l'équation de matière apparaît organiquement, comme conséquence du principe d'action quadratique, sans addition d'éléments qui ne sont pas déterminés par la géométrie elle-même(1).

DISCUSSION

M. LICHNEROWICZ - Il me semble que les résultats sont de deux sortes : algébriques pour une part et liés à la complète réductibilité du tenseur de courbure en dimension quatre, différentiels pour une autre part, avec l'existence de cette sorte de potentiel-tenseur de courbure.

(1) Pour une exposition plus détaillée de ces idées voir C. Lanczos "The splitting of the Riemann tensor" *Reviews of Modern Physics*, 34, 379, (1962).