

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J. GEHENIAU

Problèmes mathématiques de la physique des particules

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 151-157

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_151_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA PHYSIQUE DES PARTICULES

J. GEHENIAU
(Bruxelles)

INTRODUCTION -

On connaît de nombreuses propriétés des particules élémentaires. On n'a cependant pas encore réussi à en dégager la notion fondamentale, le "micro-objet" dont elles seraient les manifestations. Il manque peut-être une donnée expérimentale essentielle, mais je voudrais souligner ici le rôle important que pourraient jouer, que joueront sans doute les mathématiques pour atteindre le but poursuivi.

La Mécanique quantique a pu disposer à ses débuts de mathématiques appropriées. Les raisonnements n'ont pas toujours été rigoureux, mais on peut considérer que la M.Q. des systèmes à un nombre fini de degrés de libertés constitue aujourd'hui, grâce aux perfectionnements qui lui ont été apportés peu à peu, une théorie satisfaisante du point de vue mathématique. Elle a réalisé la synthèse des aspects corpusculaires et ondulatoires de la matière et en même temps la quantification des observables. Elle n'a pas pu rendre compte des caractéristiques des particules élémentaires ni de leurs lois de transformation.

Par la quantification du champ électro-magnétique on a pu représenter les phénomènes de création et d'absorption des quanta de lumière, mais cette électrodynamique quantique n'a jamais eu la rigueur mathématique de la Mécanique quantique. En 1ère approximation, lorsqu'un seul quantum intervient, les résultats sont satisfaisants. A l'approximation suivante, lorsque des quanta de toutes énergies interviennent, les résultats sont inexacts (infinis).

Sur certains points la rigueur mathématique a été retrouvée, grâce à la théorie des distributions de L. Schwartz, qui a donné la signification précise des "fonctions de Green", des "propagateurs", mais ceci n'a pas rétabli la convergence désirée.

Les divergences sont si essentielles qu'elles se présentent même pour un électron libre, dont l'énergie est infinie par suite de son interaction avec le champ de photons. Plus précisément, cette interaction apporte à la densité d'hamiltonien un terme de la forme :

$$\delta m \cdot \bar{\psi}(x) \psi(x)$$

qui s'ajoute donc au terme de masse :

$$m \bar{\psi}(x) \psi(x)$$

de l'hamiltonien initial.

Cette remarque est à l'origine de la technique de "renormalisation". La renormalisation de la masse revient à supprimer ce terme infini (défini de manière précise par "régularisation").

L'intérêt de cette idée résulte de ce que, en présence d'un champ é.m. extérieur, la self-énergie de l'électron est la somme d'un tel terme infini et déterminé indépendant du champ extérieur, et d'un terme fini qui en dépend, et qui est observable.

On peut démontrer cette propriété de diverses manières, par exemple en utilisant les propagateurs relatifs à l'électron compte tenu du champ extérieur. Un tel propagateur est la somme du propagateur correspondant de l'électron libre et de termes qui dépendent du champ extérieur. Ce sont ces termes additifs qui fournissent les contributions finies au phénomène étudié.

Il n'existe actuellement aucune donnée expérimentale relative à l'électron et au muon (électron lourd) qui soit en désaccord avec l'électrodynamique quantique renormalisée, et cependant on doit faire à son égard plusieurs réserves.

1/ La méthode ne s'étend pas au cas des interactions fortes, ni au cas des interactions faibles.

2/ Il est possible que les termes infinis δm correspondent à des effets observables (différence de masse du pion chargé et du pion neutre).

Devant les difficultés rencontrées en électrodynamique quantique pour obtenir des solutions exactes, on a construit des modèles de particules en interactions dont les équations pouvaient être résolues exactement, à l'aide de renormalisations.

Typique à cet égard est le "modèle de Lee". Les équations sont bien résolubles, mais pas dans l'espace de Hilbert. La rigueur n'est réalisée en général que dans un *espace pseudo-hilbertien* (à métrique indéfinie).

Il s'agit, il est vrai, d'un modèle non réaliste, mais les espaces pseudo-hilbertiens se présentent aussi à partir d'autres considérations.

Les divergences de la théorie proviennent des produits de propagateurs qui figurent dans les expressions à calculer. Or les singularités de ces propagateurs proviennent des bases généralement admises de la TQC, celles-mêmes sur lesquelles se fonde la théorie axiomatique, qui essaie d'extraire le maximum d'informations d'un petit nombre de postulats, à l'aide de mathématiques "propres". De ces postulats on tire déjà que pour un champ scalaire réel A :

$$F(x_1, x_2) = \langle 0 | A(x_1) A(x_2) | 0 \rangle \quad (1)$$

est de la forme :

$$i \int_0^\infty d\xi \rho(\xi) \Delta^+(x_1 - x_2, \xi) \quad (1')$$

où Δ^+ est l'une des distributions invariantes relatives à la masse $\xi^{1/2}$, et $\rho(\xi)$ est une fonction positive si l'espace des états est de Hilbert :

$$\rho(\xi) = \sum_i |c_i|^2 \delta(\xi - \xi_i) + \sigma(\xi) \quad (1'')$$

Il en résulte que les singularités de F sont au moins aussi fortes que celles de Δ^+ , sauf si l'espace est pseudo-hilbertien, car dans ce cas $\rho(\xi)$ peut prendre des valeurs négatives.

Cette dernière propriété semble nécessaire dans la théorie unitaire de l'Ecole de Heisenberg [1].

Si l'on admet que la théorie unitaire des particules peut être encore une théorie de champ, la voie suivie par Heisenberg semble inévitable. Le champ doit être spinoriel pour rendre compte des spins. L'équation du champ doit être non linéaire pour rendre compte des interactions, et celle proposée par Heisenberg et Pauli est la plus simple de ce type qui possède les invariances requises (1).

EQUATION DE HEISENBERG - PAULI -

Il est commode d'écrire l'équation de Heisenberg-Pauli sous la forme :

$$-i \sigma^\nu \partial_\nu \chi + : l^2 \sigma^\nu \chi (\chi^* \sigma_\nu \chi) : = 0 \quad (2)$$

où $\sigma_\nu = (I, \sigma_k)$, $\sigma^\mu = (-I, \sigma_k)$, σ_k = matrice de Pauli ; la variance du champ χ est celle du produit d'un semi-spineur (spineur de Weyl) par un iso-spineur ; χ^* est l'opérateur adjoint de χ ; le symbole : : sera expliqué plus loin.

Il s'agit de tirer de cette équation des propriétés des particules. Les possibilités sont réduites par le fait qu'elle n'est pas invariante pour les symétries d'espace, mais elle est suffisamment générale pour l'exposé du problème fondamental qui est la résolution d'une équation de ce type.

Désignons par :

$$\tau \left(\begin{array}{cc|cc} x_1 \dots x_n & & y_1 \dots y_m & \\ r_1 & r_n & s_1 & s_m \\ \hline t_1 & t_n & u_1 & u_m \end{array} \right)$$

Les éléments de matrices qui représentent les produits ordonnés dans le temps - chronologiques - de n composantes χ et de m composantes χ^* . Les équations (2) sont remplacées par des relations entre :

$$\tau \left(\begin{array}{c|c} x_1 \dots x_n & y_1 \dots y_m \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right) \text{ et } \tau \left(\begin{array}{c|c} x_1 \dots x_n x' & x' y_1 \dots y_m \\ \cdot & s' \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & t' \cdot \end{array} \right) \quad (3)$$

Par exemple, sous forme différentielle,

$$-i \sigma_{rs}^\nu \frac{\partial}{\partial x_1^\nu} \tau \left(\begin{array}{c|c} x_1 \dots x_n & y_1 \dots y_m \\ s & \cdot \\ t & \cdot \end{array} \right) = l^2 \sigma_{rs}^\nu \tau \left(\begin{array}{c|c} x_1 \dots x_n x_1 & x_1 y_1 \dots y_m \\ s & p \\ t & u \end{array} \right) \sigma_{\nu pq} \quad (4)$$

ou sous forme intégrale :

$$\tau \left(\begin{array}{c|c} x_1 \dots x_n & y_1 \dots y_m \\ r & \cdot \\ t & \cdot \end{array} \right) = l^2 \int dx' G_{rr'}(x - x') \sigma_{r's}^\nu \tau \left(\begin{array}{c|c} x' x_2 \dots x_n x' & x' y_1 \dots y_m \\ s' & p \\ t & u \end{array} \right) \sigma_{\nu pq} \quad (5)$$

où $G(x - x')$ est une fonction de Green appropriée (causale).

Pour simplifier ces relations on s'inspire de la méthode d'approximation de Tamm-Dancoff.

D'après le théorème de Wick (3) (4) le produit chronologique d'un système de n champs libres est égal à une certaine somme de produits normaux multipliés par des "fonctions de contraction", valeurs moyennes pour le vide de produits de deux champs. Ceci permet de remplacer des éléments de matrices de produits chronologiques par des éléments de matrices de produits normaux et la méthode d'approximation de Tamm-Dancoff consiste à supprimer dans les équations les contributions dues aux produits normaux de degrés supérieurs à une valeur choisie.

Pour le champ χ ci-dessus, le théorème de Wick devient une règle, une définition par laquelle les fonctions $\tau(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_m)$ sont remplacées par des sommes de fonctions $\varphi(x_1 \dots x_n | y_1 \dots y_m)$, qui correspondent à des "produits normaux", multipliés par des fonctions de contraction. La notation : : représente un produit normal.

En théorie linéaire, ces fonctions de contraction sont bien connues. Ce sont des valeurs moyennes pour le vide de produits de deux champs. En théorie non linéaire, leur lien avec l'équation à résoudre n'a pas été établi jusqu'à présent. Compte tenu de propriétés démontrées en théorie axiomatique des champs, on peut penser que :

$$\langle 0 | \chi_{r,t}(x) \chi_{r',t'}^*(x') | 0 \rangle \sim \int d\xi \rho(\xi) \int dp e^{ip(x-x')} \frac{\sigma_{rr'}^\nu p_\nu}{p^2 + \xi} \delta_{tt'} \quad (6)$$

où $\rho(\xi)$ est la fonction spectrale des masses, inconnue. C'est par ses singularités, en δ , que les masses des particules apparaissent dans la théorie de l'Ecole de Heisenberg. Si elle était définie positive, (6) serait une matrice de distributions formées de "fonctions" δ et δ' , ce qui n'est pas compatible avec l'équation fondamentale.

Heisenberg a pu donner une idée du comportement de la fonction de contraction au voisinage de l'hypercône de lumière, en traitant une équation non linéaire plus simple. Il a montré que ce qui correspond à (6) dans ce cas particulier n'a pas de singularités en δ et δ' , mais prend des valeurs oscillantes au voisinage de l'hypercône de lumière (1).

En l'absence d'autres indications, on impose à $\rho(\xi)$ de satisfaire aux deux conditions :

$$\int \rho(\xi) d\xi = 0 \quad \int \xi \rho(\xi) d\xi = 0 \quad (7)$$

qui permettent de régulariser (6), de lui enlever les singularités en δ et δ' , en remplaçant :

$$(p^2 + \xi)^{-1} \text{ par } (p^2 + \xi)^{-1} - (p^2)^{-1} + \xi(p^2)^{-2} = \xi^2(p^2)^{-2} (p^2 + \xi)^{-1} \quad (8)$$

NUCLEONS -

On obtient une valeur approchée de la constante l en isolant le cas du nucléon, c'est-à-dire en posant :

$$\rho(\xi) = \delta(\xi - \kappa^2) \quad (9)$$

où κ est la masse du nucléon. L'intégrale en ξ de (6) disparaît alors. Il reste une intégrale sur l'espace des impulsions p_0, \dots, p_3 qui porte sur :

$$\kappa^4 e^{i p(x - x')} \sigma_\nu p^\nu [(p^2)^2 (p^2 + \kappa^2)]^{-1}. \quad (10)$$

Avec cette fonction de contraction simplifiée, la méthode de Tamm-Dancoff a fourni en 1ère approximation :

$$\kappa l = 6,39$$

La constante l étant ainsi déterminée par la masse du nucléon, d'autres problèmes peuvent être étudiés à partir de l'équation (2), notamment celui de la masse du pion, de la diffusion nucléon-nucléon, etc.

La *parité* a été introduite en doublant le nombre de composantes du champ, dont la variance est maintenant celle du produit d'un spineur de Dirac par un iso-spineur. L'équation (2) est remplacée par :

$$\Gamma^\nu \partial_\nu X + \frac{1^2}{2} [\Gamma_5 \Gamma^\nu X (\bar{X} \Gamma_5 \Gamma_\nu X) + \Gamma^\nu X (\bar{X} \Gamma_\nu X)] = 0 \quad (11)$$

où les Γ forment un système de matrices de Dirac et $\bar{X} = X^* \Gamma_4$.

La méthode utilisée pour résoudre (11) est la même que ci-dessus, avec une fonction de contraction qui généralise (6). Elle a permis d'améliorer l'étude du nucléon et des systèmes de nucléons, mais une nouvelle idée a été nécessaire pour traiter le cas des particules étranges, parce que la théorie précédente implique une relation entre le spin et l'iso-spin qui n'est pas réalisée dans ce cas.

PARTICULES ETRANGES -

Dans la théorie de l'Ecole de Heisenberg, les particules étranges mettent en cause la nature du vide. Il a été nécessaire de lui attribuer une multiplicité, une dégénérescence par rapport à l'iso-spin et la parité. En d'autres termes, le vide renferme des "subquanta" ou "spurions" porteurs d'un iso-spin 1/2 et d'une parité ± 1 . Les particules étranges sont formées par adjonction de spurions aux particules ordinaires.

Ces considérations ne modifient pas l'équation (11), mais ajoutent des indices d'iso-spin et de parité, aux fonctions τ et φ qui sont des éléments de matrices associés à des transitions relatives au vide. De même, des termes nouveaux apparaissent dans la fonction de contraction.

Par la méthode de Tamm-Dancoff, Heisenberg et Durr ont obtenu le spectre de masse des hypérons à un spurion lié (Λ, Σ). Il est formé de quatre niveaux qui, par ordre de valeurs croissantes, ont les multiplicités suivantes : singulet, triplet, triplet, singulet; la parité change en passant d'un niveau au suivant. Ces résultats sont fort intéressants, mais du point de vue mathématique subsiste le problème de la validité de la méthode utilisée.

EQUATIONS D'ONDES -

En se limitant au problème de l'ordre de succession des niveaux, il est possible de contourner cette difficulté. L'équation finale qui fournit ce résultat est, en effet, très simple. C'est une équation de Dirac avec des termes supplémentaires qui proviennent de la nouvelle fonction de contraction, mais qui peuvent être déterminés directement par des conditions d'invariances, sans passer par la résolution de (11). De plus, cette étude peut être étendue aux hypérons Ξ , à deux spurions liés (Durr, Géheniau).

Enonçons le problème dans le cas d'une particule formée d'un nucléon et n spurions. La fonction d'onde φ possède, en plus de l'ancien indice α de spin et de parité du spineur de Dirac, un indice d'iso-spin t relatif au nucléon et n indices de parité $p_1 \dots p_n$ et d'iso-spin $t_1 \dots t_n$ relatifs aux spurions. Il s'agit de déterminer l'équation d'onde la plus générale qui satisfait à certaines conditions : invariance pour le groupe complet de Lorentz lorsqu'il porte sur toutes les variables (du nucléon et des spurions), invariance pour les transformations PCT et PG lorsqu'elles portent sur l'une quelconque des particules (nucléon ou spurion), etc. (5).

Désignons par $\tau_r(\rho_r)$ un système de trois matrices de Pauli qui opèrent sur l'indice d'iso-spin du nucléon (du spurion), par Σ_r un système de trois matrices de Pauli qui opèrent sur l'indice de parité du spurion. Pour une particule au repos et à un spurion, l'équation la plus générale qui possède les invariances indiquées ci-dessus s'écrit :

$$[p(1 + \delta_1 \Sigma_1) - \Gamma_4(1 + \delta_2 \Sigma_1) + \alpha \Gamma_5 \Sigma_2 + \eta i \Gamma_4 \Gamma_5 \Sigma_3 (\vec{\tau} \vec{\rho})] \varphi = 0 \quad (12)$$

où p est la masse de la particule et $\delta_1, \delta_2, \alpha, \eta$ des constantes (ou plus généralement des invariants).

C'est bien une équation de ce type qu'ont obtenue Durr et Heisenberg [5]. Ils n'ont pas écrit les termes en Σ_1 ; il est en effet justifié de penser que ce sont les termes en Γ_5 qui sont essentiels. Avec $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, on obtient les mêmes niveaux, mais α et η sont remplacés par :

$$\alpha/\sqrt{1 - \delta^2} \quad \eta/\sqrt{1 - \delta^2} \quad (13)$$

Si $\delta_1 \neq \delta_2$, on obtient la même succession des niveaux pourvu que $\delta_1 - \delta_2$ soit suffisamment petit.

Cette étude peut être étendue au cas des hyperons Ξ . Les problèmes à résoudre sont plus d'ordre physique que d'ordre mathématique. On peut penser cependant qu'ils constituent une étape utile dans la résolution de (11) qui devrait déterminer les valeurs des paramètres introduits ci-dessus.

FONCTIONS SPECIALES -

La résolution de (6), (11) par la méthode indiquée utilise certaines fonctions spéciales nouvelles, qui se présentent sous la forme d'intégrales octuples, plus précisément de doubles produits de convolution dans l'espace-temps de Minkowski.

Notations : J_ν = composantes d'un vecteur énergie-impulsion, $J^2 = J_\nu J^\nu$, $(pq) = p_\nu q^\nu$, κ = masse de la particule, γ_ν = matrices de Dirac, $X^2 = -J^2/\kappa^2$, $*$ = produit de convolution. Les intégrations par rapport aux variables temporelles sont prises sur les chemins propres aux fonctions causales.

Les fonctions en question dérivent de :

$$K(J, a, b) = -i \frac{(J\gamma)}{J^2} * [(J^2 + (aJ)) (J^2 + \kappa^2)]^{-1} * [(J^2 - (bJ)) (J^2 + \kappa^2)]^{-1}$$

On a :

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial a_\nu \partial b^\nu} \right|_{a=b=0} = i(J\gamma) \frac{\pi^4}{\kappa^4} L(X^2) = -i \frac{(J\gamma)}{J^2} * \frac{J_\nu}{(J^2)^2 (J^2 + \kappa^2)} * \frac{J^\nu}{(J^2)^2 (J^2 + \kappa^2)}$$

$$K|_{a=b=0} = -\frac{\pi^4}{\kappa^2} (J\gamma) M(X^2) = -i \frac{(J\gamma)}{J^2} * \frac{1}{J^2 (J^2 + \kappa^2)} * \frac{1}{J^2 (J^2 + \kappa^2)}$$

$$\text{Tr. } \gamma^\nu \left. \frac{\partial K}{\partial a^\nu} \right|_{a=b=0} = \frac{4i\pi^4}{\kappa^2} N(X^2) = 4i \frac{J_\nu}{J^2} * \frac{J^\nu}{(J^2)^2 (J^2 + \kappa^2)} * \frac{1}{J^2 (J^2 + \kappa^2)}$$

La fonction $L(X^2)$ intervient dans le problème du nucléon par l'équation :

$$1 + \left(\frac{\kappa l}{4\pi}\right)^4 L(X^2) = 0$$

dont la solution par $X^2 = 1$, $\kappa = \kappa_n$ fournit l .

Les fonctions M et N interviennent dans le calcul des masses des hypérons Λ , Σ , par leur rapport, qui est à peu près constant lorsque $X^2 = -J^2/\mu^2$ (μ = masse "moyenne") varie dans l'intervalle des masses des baryons.

Une bonne connaissance des fonctions L, M, N s'avère utile pour le développement de la théorie.

Pour assurer le succès (ou l'échec) des conceptions de l'Ecole de Heisenberg, beaucoup de problèmes mathématiques doivent encore être élucidés. Certes, ce ne sont pas les seuls. Des questions d'ordre physique restent aussi en suspens. Mais il est clair qu'une meilleure connaissance des équations du type Heisenberg-Pauli est nécessaire pour progresser avec assurance.

REFERENCES

- [1] H. P. DURR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER, K. YAMAZAKI - Z. Naturforschg 14a (1959) 441.
- [2] H. P. DURR - Z. Naturforschg 16a (1961) 327.
- [3] N. N. BOGOLIUBOV, D. V. SHIRKOV - Introduction to the theory of quantized fields, Interscience monographs in physics and astronomy, Ed. R. E. Marshak, Vol. III, 1959, Interscience publishers, New-York, London.
- [4] P. T. MATTHEWS, A. SALAM - Proc. Roy. Soc. 221 A (1954) 128.
- [5] H. P. DÜRR, W. HEISENBERG - Z. Naturforschg 16a (1961) 726.

DISCUSSION

M. COMBE - Heisenberg a-t-il proposé une interprétation physique simple, indépendante du formalisme mathématique de la longueur fondamentale de l ?

M. GEHENIAU - Cette longueur l est probablement liée à la portée des forces nucléaires.

M. LICHNEROWICZ - Quels sont les propagateurs utilisés dans le théorème de Wick ? Je crois que ce sont les propagateurs provenant de la théorie linéaire, et ceci n'est évidemment pas satisfaisant. Il faudrait adopter des propagateurs *associés* à l'équation de Heisenberg. A l'aide des noyaux élémentaires, il est possible de définir un tel propagateur.

M. GEHENIAU - Dans la définition des φ à partir des τ figurent déjà des propagateurs très généraux puisqu'ils renferment une fonction arbitraire $\rho(\xi)$ mais leur lien avec l'équation de Heisenberg - Pauli n'est pas clair. Il serait fort intéressant de construire des propagateurs *associés* à cette équation.

M. MERCIER - Peut-on dire que la raison d'utiliser les spineurs pour écrire l'équation de Heisenberg est de partir d'entités assez élémentaires pour pouvoir construire, par un procédé analogue à la fusion, des entités moins élémentaires au point de vue tensoriel ? ou pour élargir la question, peut-on donner le ou les critères qui sont invoqués lorsqu'on cherche à poser une équation fondamentale censée décrire la constitution de quelque particule fondamentale ?

A ces questions, j'ajoute une autre question subsidiaire : si l'on prend pour critère quelque invariance par rapport à un groupe de transformations, tel que celui de Lorentz, puisqu'on y ajoute celui d'une invariance comparable (spin \rightarrow isospin \rightarrow ...), alors de tels critères se multiplient ; n'y a-t-il pas là quelque chose de choquant parce qu'une sorte d'arbitraire se produit ?

Enfin : y a-t-il un formalisme lagrangien parallèle au formalisme que vous nous avez exposé ?

M. GEHENIAU - On part en effet pour chaque groupe de la représentation irréductible la plus simple à partir de laquelle on peut construire toutes les autres par produits directs et réductions.

Le problème des groupes à introduire n'est pas complètement résolu. L'important est que l'équation fondamentale ne renferme pas trop de paramètres arbitraires.

Il est possible de présenter la théorie à l'aide d'un formalisme lagrangien.

Mme TONNELAT - L'application de la méthode de Heisenberg entraîne certaines conséquences qui ne sont pas sans rapport avec l'ancienne méthode de fusion. Pourriez-vous indiquer comment on pourrait retrouver certains résultats concernant les mésons (+1,0 - 1) et éventuellement les spins d'ordre supérieur ?

M. GEHENIAU - Les fonctions d'ondes des particules complexes sont des éléments de matrices associées à des produits de χ ou χ^* . Leurs composantes sont donc liées à des représentations du groupe de Lorentz, comme dans la théorie de la fusion de L. de Broglie. De même, les isospins des particules complexes sont donnés par la loi de réduction de la représentation $D_{1/2} \times D_{1/2} \dots$ du groupe des rotations euclidiennes (dans l'isoespace).