

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2 *Série Mathématiques*

J. KUNTZMANN

**Panorama des méthodes de résolution numérique approchée des
problèmes différentiels de conditions initiales**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 8, série *Mathématiques*, n° 2 (1962), p. 117-127

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1962__8_2_117_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PANORAMA DES MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE APPROCHÉE DES PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS DE CONDITIONS INITIALES

J. KUNTZMANN

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble

I - NOTATIONS -

Précisons d'abord quelques notations. Nous nous proposons d'étudier des systèmes différentiels et nous désignerons par :

t la variable indépendante
y la colonne des fonctions inconnues

(il n'y a, en effet, aucune différence dans les méthodes que nous allons présenter entre le cas d'une seule fonction inconnue et celui de plusieurs fonctions).

Si le système ne contient que des dérivées premières, nous l'écrirons sous forme canonique :

$$y' = Y(y, t)$$

où $Y(y, t)$ désigne une colonne, fonction de la colonne y et de la variable t . Si le système contient des dérivées d'ordre supérieur, nous pourrions soit le réduire à la forme canonique par les procédés habituels, soit ramener tous les ordres de dérivation maxima à être égaux par une transformation telle que la suivante :

Dans le système :

$$\begin{aligned} x'' &= X(x, x', z, t) & (z \text{ et } x \text{ fonctions inconnues}) \\ z' &= Z(x, x', z, t) \end{aligned}$$

posons $z = u'$. Il vient :

$$\begin{aligned} x'' &= X(x, x', u', t) \\ u'' &= Z(x, x', u', t) \end{aligned}$$

C'est ce que nous nommerons forme résolue équilibrée.

Pour un tel système, on peut adopter une écriture au moyen de colonnes :

$$y'' = Y(y, y', t)$$

plus généralement :

$$y^{(p)} = Y(y, y', \dots, y^{(p-1)}, t) \quad (1)$$

Nous ne traiterons désormais que des systèmes sous forme canonique ou sous forme résolue équilibrée.

Problème de conditions initiales.

Un tel problème consiste à chercher la solution de (1) qui satisfait aux conditions :

$$y(a) = y_0, \dots, y^{(p-1)}(a) = y_0^{(p-1)}$$

II - METHODES NUMERIQUES -

Un problème différentiel n'est que rarement justifiable d'une solution explicite ou analytique (série ou intégrale). Les solutions analogiques ou graphiques peuvent donner des résultats pour des systèmes pas trop compliqués. Les seules méthodes d'emploi très général sont les méthodes numériques.

Elles permettent de traiter commodément un système quelle que soit sa complication. Les plus anciennes remontent à EULER. Bien entendu, pour traiter confortablement un système compliqué, il faut disposer d'une machine à calculer. Nous allons maintenant passer en revue ces méthodes.

Caractères généraux des méthodes numériques.

Nous ferons les remarques suivantes :

- on ne peut, en analyse numérique, considérer qu'un nombre fini de valeurs d'une variable. Nous ne donnerons à la variable t que les valeurs discrètes :

$$t_0 = a \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{n-1} < t_n$$

- on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'opérations. Il faudra donc remplacer les dérivées et intégrales (qui font appel à un passage à la limite) par des expressions approchées ;

- la solution d'un problème différentiel de conditions initiales possède les deux propriétés suivantes. Soit à trouver la solution pour $a \leq t \leq b$ et soit $a < c < b$:

α) on peut d'abord intégrer dans l'intervalle :

$$a \leq t \leq c$$

β) l'intégration pour :

$$c \leq t \leq b$$

ne fait intervenir que les valeurs :

$$y(c) \quad y'(c) \quad \dots \quad y^{(p-1)}(c)$$

Classification des méthodes numériques.

Nous distinguerons :

- les méthodes par pas. Elles consistent à faire une intégration approchée entre t_0 et t_1 , puis entre t_1 et t_2 , et ainsi de suite. Elles satisfont à la propriété α).

- les méthodes globales qui fournissent une approximation dans tout l'intervalle à la fois.

Citons, par exemple, des méthodes d'approximation par un polynôme de degré donné. Dans un tel cas, on ne connaîtra en général qu'après coup, l'approximation atteinte. On peut naturellement remplacer le polynôme par tout autre type d'expression simple (fraction rationnelle, somme trigonométrique, somme d'exponentielles). Ces méthodes ont la particularité, quelquefois avantageuse, de donner une solution approchée sous forme analytique. Cela peut être intéressant pour quelques équations simples.

Citons également les méthodes itératives qui fournissent une suite de solutions approchées $y_1, y_2, \dots, y_n$, chacune d'elles étant définie dans tout l'intervalle. On les utilise rarement comme méthodes d'intégration car elles sont très coûteuses. Par contre, elles peuvent être utiles pour améliorer un résultat. En dehors de ces deux cas particuliers, les méthodes globales ne sont guère utilisées. La raison en est qu'elles ne tiennent aucun compte des propriétés α) et β). Ceci se paie par une augmentation, souvent considérable, du volume, et par suite de la durée, du calcul.

Les véritables méthodes numériques sont les méthodes par pas auxquelles nous allons maintenant nous consacrer.

III - METHODES PAR PAS -

Principe général.

Le mode d'approximation habituellement utilisé est le développement de Taylor. C'est un instrument très raisonnable car dans le petit intervalle d'un pas, les solutions du problème se comportent à peu près certainement comme des polynômes.

L'instrument de mesure d'écart le plus convenable est alors l'ordre infinitésimal par rapport au pas.

D'autres possibilités d'approximation restent offertes mais n'ont pour ainsi dire pas été exploitées (par exemple l'approximation par des sommes d'exponentielles).

Parmi les méthodes par pas, nous distinguerons :

- les méthodes à pas séparés qui consistent à déterminer la solution de :

$$y^{(p)} = Y(y, \dots, y^{(p-1)}, t)$$

en t_{i+1} en utilisant uniquement les valeurs de y et de ses $p-1$ premières dérivées en t_i .

Ces méthodes respectent les deux conditions α) et β) posées plus haut.

- les méthodes à pas liés qui utilisent en plus des valeurs relatives à $t_{i-1}, t_{i-2}, \dots$. Ceci offre un avantage car on met en oeuvre des informations supplémentaires qui ne coûtent rien. Par contre, on ne respecte pas la condition β). Ceci se paie par des inconvénients qui apparaîtront plus tard.

Les chefs de file de ces deux catégories de méthodes sont :

- la méthode classique de RUNGE-KUTTA,
- la méthode d'ADAMS.

Le plan que nous allons maintenant suivre consiste à présenter le principe de la méthode de RUNGE-KUTTA qui nous paraît effectivement le plus judicieux, puis les autres par comparaison avec lui.

IV - METHODE DE RUNGE-KUTTA -

Nous nous limiterons au système :

$$y' = Y(y, t)$$

La méthode consiste à écrire pour le i ème pas des valeurs intermédiaires :

$$\begin{aligned} y_{i,\alpha} &= y_i + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha,\beta} Y_{i,\beta} & y_i &= y_{i,0} \\ Y_{i,\beta} &= Y(y_{i,\beta}, t_i + h \vartheta_\beta) & \vartheta_\beta &\text{ donnés} \\ y_{i+1} &= y_{i,q} \end{aligned} \quad (2)$$

Voici, par exemple, la formule classique de RUNGE-KUTTA :

$$q = 4, \quad \vartheta_1 = \frac{1}{2}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{2}, \quad \vartheta_3 = 1$$

(pas de longueur h).

$$y_{i,1} = y_i + \frac{h}{2} Y_i \quad y_{i,2} = y_i + \frac{h}{2} Y_{i,1} \quad Y_{i,3} = y_i + h Y_{i,2}$$

$$Y_{i+1} = y_{i,4} = y_i + \frac{h}{6} (Y_i + 2 Y_{i,1} + 2 Y_{i,2} + Y_{i,3})$$

Le développement de TAYLOR de y_{i+1} est exact jusqu'à l'ordre 4, et l'erreur à l'extrémité d'un intervalle fini est $O(h^4)$.

Cette méthode est très utilisée et donne, en général de bons résultats.

Remarques sur la méthode de RUNGE-KUTTA.

A la réflexion, cette méthode est très naturelle. Elle consiste à calculer les seules quantités qui se présentent naturellement et à les réutiliser immédiatement.

La condition imposée aux paramètres :

$$\vartheta_a, A_{a,\beta}$$

mérite d'être soulignée car elle est assez inhabituelle en analyse numérique, malgré son caractère très naturel. Elle consiste à essayer d'obtenir y_{i+1} exact jusqu'à un ordre aussi élevé que possible en sacrifiant la qualité des valeurs intermédiaires $y_{i,a}$ (qui, dans la méthode classique citée plus haut, ne sont exactes qu'à l'ordre 2). Cette décision hardie rend un peu laborieux l'établissement des formules mais non leur utilisation.

Remarquons toutefois que ce principe doit être utilisé avec mesure. Il serait, par exemple, sans intérêt, et même nuisible, de prendre des $y_{i,a}$ dont l'erreur serait $O(h)$ alors qu'on peut sans effort la rendre $O(h^2)$.

Formules existantes.

$q = 1$	ordre atteint	1	
$q = 2$	" "	2	(1 paramètre)
$q = 3$	" "	3	(2 paramètres)
$q = 4$	" "	4	(2 paramètres)

On ne peut atteindre l'ordre 5 que pour $q = 6$ et on n'utilise pour ainsi dire pas de telles formules.

Système sous forme non canonique.

Les formules sont un peu plus compliquées et les résultats sont assez décevants.

On peut obtenir sur un pas une erreur sur la fonction, d'ordre plus élevé que si l'on a gardé la forme canonique, mais ceci ne s'étend pas aux erreurs sur les dérivées.

Au cours de la propagation des erreurs, le calcul répété de $Y(y, y', \dots, y^{(p-1)})$ introduit entre elles un couplage qui vient détruire l'amélioration partielle obtenue.

Un cas particulier important.

Signalons cependant le cas important des systèmes de la forme :

$$y'' = Y(y, t)$$

c'est-à-dire ne contenant pas de dérivée première. Celle-ci doit être déterminée au début du pas, mais non aux valeurs intermédiaires. On est conduit à étudier des formules de la forme :

$$y_{i,a} = y_i + h \vartheta_a y'_i + \frac{h}{2} \sum_{\beta=0}^{a-1} B_{a,\beta} Y_{i,\beta} \quad y_{i+1} = y_{i,q}$$

$$y'_{i+1} = y'_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{a,\beta} Y_{i,\beta}$$

Ces formules ont été réétudiées récemment [5]. Il existe des formules au moins jusqu'à $q = 5$. Leur ordre est 6.

Une variante [7] consiste à écrire :

$$y'_{i+1} = y'_i + h \sum_{\beta=0}^q A_{a,\beta} Y_{i,\beta}$$

en calculant $Y_{i,q}$ (qui resservira au pas suivant).

Le résultat obtenu est très curieux. On est conduit en cherchant à atteindre l'ordre maximum, à rendre des θ nuls, c'est-à-dire à calculer des dérivées d'ordre supérieur au début du pas avec seulement une substitution intermédiaire.

Raffinements possibles.

On peut profiter des paramètres dont on dispose pour réaliser des conditions d'optimum, par exemple rendre minimum l'erreur après un pas. Voir [6].

V - FORMULES IMPLICITES, TOTALEMENT IMPLICITES -

On peut chercher à franchir de diverses manières l'obstacle qui se présente dans la méthode de RUNGE-KUTTA pour $q > 4$.

Une des premières idées qui se présentent consiste à augmenter dans les formules (2) le domaine de variation des indices.

Nous écrivons, soit :

$$y_{i,a} = y_i + h \sum_{\beta=0}^a A_{a,\beta} Y_{i,\beta}$$

soit :

$$y_{i,a} = y_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{a,\beta} Y_{i,\beta} \quad y_{i,0} \neq y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q,\beta} Y_{i,\beta}$$

Le 1er cas sera dit implicite, le second totalement implicite. Le résultat obtenu est, à première vue, surprenant, mais cependant facile à comprendre après réflexion :

- les formules implicites permettent de reculer un peu la difficulté (on gagne en gros une unité sur l'ordre infinitésimal atteint, à la fois parce qu'on augmente le nombre des coefficients et parce que Y_{i+1} sert dans deux pas différents).

- les formules totalement implicites sont, en réalité, des généralisations des formules de quadrature approchée. Elles existent pour toutes les valeurs de q , les θ_i y sont arbitraires, et l'ordre atteint est le même qu'en quadrature. (En particulier, il est possible d'étendre aux équations différentielles la méthode de quadrature de GAUSS).

De telles méthodes ne sont pas utilisables pour des systèmes non linéaires, mais sont très intéressantes dans le cas des systèmes linéaires, pour lesquels le caractère implicite de la méthode n'est pas gênant.

Une dernière remarque : Les résultats précédents sur les méthodes totalement implicites ne s'étendent pas aux systèmes contenant des dérivées d'ordre supérieur.

VI - INTRODUCTION DE DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR -

Revenons au système $y' = Y(y,t)$. On obtient immédiatement :

$$y'' = Y'_y y' + Y'_t$$

On peut donc calculer et utiliser des dérivées d'ordre supérieur. Ceci est possible de diverses manières, tout en respectant la séparation des pas.

Emploi de la série de TAYLOR.

Employer cette série consiste à calculer uniquement les dérivées au départ du pas. Ce calcul est possible théoriquement jusqu'à un ordre aussi élevé que possible. On pourrait croire qu'il est très laborieux. En fait, il devient très simple si l'on introduit suffisamment de quantités auxiliaires. Soit, par exemple :

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{1 + \sin x}$$

On posera :

$$\begin{aligned} z &= y & u &= yz & v &= x & r &= xv \\ w &= u + r & t &= 1 + \sin x \\ t y' &= w \end{aligned}$$

On voit que l'on peut calculer toutes les dérivées en faisant uniquement appel aux formules de dérivation des sommes, produits et de $\sin x$. Il n'est pas exclu que de telles formules soient utilisables en machine. Elles sont cependant, à ordre égal, bien moins précises que celles de RUNGE-KUTTA.

Formules de Fehlberg.

Il est possible de combiner l'idée qui précède avec celle de RUNGE-KUTTA, c'est-à-dire d'introduire des dérivées jusqu'à l'ordre j au début du pas et des substitutions $y_{i,\alpha}$. Cette idée proposée sous une autre forme par Fehlberg [2] [3] [4] donne les résultats suivants :

- il faut prendre toutes les valeurs intermédiaires exactes jusqu'à l'ordre j (ce qui n'exige aucun effort particulier).

On retrouve alors les caractères habituels des formules de RUNGE-KUTTA. On écrira par exemple pour un système sous forme canonique :

$$y_{i,\alpha} = y_i + h \vartheta_\alpha y'_i + \frac{h^k}{k!} \vartheta_\alpha^k y_i^{(k)} + h \sum_{\beta=0}^{a-1} A_{\alpha,\beta} Y_{i,\beta}$$

Formules de dérivation préalable.

Une autre idée consiste à faire des substitutions intermédiaires où l'on utilise non seulement $Y_{i,\alpha}$, mais aussi des dérivées d'ordre supérieur. Une étude détaillée [1] montre que le seul cas intéressant, tout au moins si l'on se borne aux dérivées secondes pour un système sous forme canonique, revient à effectuer la transformation préalable suivante. Soit :

$$\begin{aligned} y' &= Y(y, t) \\ y'' &= Z(y, y', t) \end{aligned}$$

On remplace y' par sa valeur pour obtenir :

$$y'' = K(y, t)$$

et on intègre cette équation.

Les formules relatives à ce cas ne sont pas exactement celles données à la fin du paragraphe IV. En effet, le calcul de y'_{i+1} se fait par une formule explicite. Un certain nombre de conditions disparaissent de ce fait. Pour l'étude de ces formules, voir [5].

VII - METHODES A PAS LIES -

Contrairement aux méthodes à pas séparés dont la théorie était assez laborieuse, les méthodes à pas liés, dont le prototype est la méthode d'ADAMS, sont faciles à obtenir. On écrira en intégrant :

$$\begin{aligned} y' &= Y(y, t) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y(y, t) dt \end{aligned}$$

et l'on évaluera le dernier membre par une formule de quadrature approchée :

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{\alpha=0}^r A_\alpha Y_{i-\alpha}$$

Plus généralement, on pourra écrire :

$$y_{i+1} = \sum_{\beta=0}^s K_{\beta} y_{i-\beta} + h \sum_{\alpha=0}^r A_{\alpha} Y_{i-\alpha}$$

r et s étant donnés. On déterminera les coefficients A_{α} et K_{β} en exigeant que le développement de TAYLOR de y_{i+1} autour de la valeur soit exact jusqu'à un ordre aussi élevé que possible (en principe jusqu'à l'ordre $s + r + 1$).

Les conditions nécessaires s'obtiennent en écrivant les développements de TAYLOR des $y_{i-\beta}$, $Y_{i-\alpha}$. Si les sommations commencent à β ou $\alpha = -1$, les formules sont dites implicites.

Ces formules ont les caractères généraux suivants :

a) elles ne respectent pas la condition β), ce qui se paie par deux sortes d'inconvénients.

a₁) il est nécessaire de déterminer par d'autres procédés les premières valeurs des y_i et Y_i .

a₂) dans certains cas, il se produit des instabilités qui peuvent être plus ou moins graves. Certaines formules, telles que :

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + 2h(2Y_i + Y_{i-1})$$

dites fortement instables, sont inutilisables.

D'autres, telles que :

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + 2hY_i$$

dites faiblement instables, sont utilisables avec certaines précautions.

Formules à plusieurs étages.

Les formules précédentes à pas liés définissaient toutes y_{i+1} par une seule égalité (éventuellement implicite). On a proposé des méthodes consistant à déterminer des quantités intermédiaires. La plus connue (mais non la seule) est la formule de MILNE qui utilise un prédicteur et un correcteur. (Le but essentiel de cette manière de faire est de vaincre la difficulté due au caractère implicite du correcteur). On écrira par exemple :

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{h}{12} (23Y_i - 16Y_{i-1} + 5Y_{i-2})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (5Y_{i+1}^* + 8Y_i - Y_{i-1})$$

Caractère général de ces méthodes.

Nous remarquerons que ces méthodes ont, en commun, les deux caractères suivants :

- elles n'utilisent que des points de l'échelle $t_0 + nh$,
- les points intermédiaires ne sont pas sacrifiés. La situation suivante est tout à fait typique.

On détermine un 1er point intermédiaire d'ordre α , un second d'ordre $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 1$, un troisième d'ordre $\beta \leq \gamma \leq \beta + 1$. L'élévation (éventuelle) dans l'échelle des ordres est donc progressive.

VIII - METHODES DE RUNGE-KUTTA A PAS LIES -

Une idée très naturelle consiste à transposer l'idée de RUNGE-KUTTA dans le domaine des méthodes à pas liés. On obtiendra ainsi les formules du type :

$$y_{i,\alpha} = \sum_{m=0}^l Q_{\alpha,m} Y_{i-m} + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha,\beta} Y_{i,\beta} \qquad y_{i+1} = y_{i,q}$$

L'étude des premières formules de ce type a été faite récemment [7] [9] [10].

Ces méthodes empruntent aux méthodes de RUNGE-KUTTA et aux méthodes à pas liés, certaines de leurs caractéristiques :

- elles exigent un démarrage,
- elles peuvent être instables,
- par contre, elles utilisent mieux les valeurs intermédiaires que ne le font les méthodes à pas liés ordinaires.

On peut se demander pourquoi nous ne faisons pas intervenir dans ces formules les Y_{i-m} . Tout simplement parce que cette possibilité est incluse dans la formule ci-dessus. Si, par exemple, on y fait $\phi_1 = -1$.

$$\begin{aligned} Q_{a,1} &= 1 & Q_{a,i} &= 0 & i \neq 1 \\ A_{1,0} &= 0 \end{aligned}$$

on trouve :

$$y_{i,1} = y_{i-1}$$

et par suite :

$$Y_{i,1} = Y_{i-1}$$

Nous économisons ainsi l'écriture d'une nouvelle sorte de coefficients. L'étude de cette catégorie de formules est à peine commencée, mais on peut penser qu'elle donnera des résultats intéressants.

IX - FORMULES DE STORMER -

Ce sont pour les systèmes :

$$y'' = Y(y, t)$$

des formules du type :

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h^2}{2} \sum_{a=0}^r B_a Y_{i-a}$$

Elles ont la particularité que, ni l'équation, ni la formule approchée ne contiennent la dérivée première. Leurs conditions initiales normales sont donc :

$$y(t_0) = y_0 \quad y(t_0 + h) = y_1$$

On en imaginera facilement des variantes implicites ($r = -1$) ou utilisant le principe RUNGE-KUTTA [9].

X - FORMULES D'OBRECHKOFF -

Ces formules utilisent les valeurs aux deux extrémités du pas. Elles sont particulièrement économiques puisque les valeurs à la fin du pas sont les valeurs de début du pas suivant. Elles sont naturellement implicites, mais diverses dispositions astucieuses permettent de réduire les itérations nécessaires si le système proposé n'est pas linéaire [8].

On peut écrire par exemple :

$$y_{i+1,1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i$$

$$y_{i+1,2} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{24} (3 y'''_i + y'''_{i+1,1})$$

$$y_{i+1,3} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} [7 y''_i + 3 y''_{i+1,2}] + \frac{h^3}{60} [3 y'''_i - 2 y'''_{i+1,1}]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (y'_i + y'_{i+1,3}) + \frac{h^2}{10} (y''_i - y''_{i+1,2}) + \frac{h^3}{120} (y'''_i + y'''_{i+1,1})$$

Ces formules, dont le principe mériterait une étude plus approfondie, présentent la particularité que les $y'_{i+1,3}$, $y''_{i+1,2}$, $y'''_{i+1,1}$ qui resserviraient au début du pas suivant, ne forment pas un système cohérent de valeurs des dérivées successives.

XI - COMPARAISON DES METHODES -

Pour un même système, la propagation des erreurs est indépendante de leur mode de génération. Il suffit donc pour comparer les méthodes de comparer les erreurs après un pas.

Pour faire cette comparaison sous une forme réaliste, nous admettrons que l'on travaille avec un même nombre de calculs de Y par unité de longueur.

Pour les formules implicites, nous avons admis qu'un *seul* tour d'itération était nécessaire.

Je caresse, depuis plusieurs années, le projet de faire cette comparaison à la fois théoriquement et pratiquement. N'ayant jamais eu jusqu'alors le loisir de la faire, je m'excuse de ne vous présenter que des résultats relatifs à quelques méthodes seulement (qui sont heureusement les plus classiques). Toutes les méthodes comparées donnent après un pas, une erreur en h^5 ; les nombres indiqués sont les coefficients des divers termes constituant l'erreur.

On trouve donc, par ordre de qualité décroissant, Différences centrales, RUNGE-KUTTA optimale, ADAMS explicite, RUNGE-KUTTA classique, ADAMS implicite, TAYLOR.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BARD - Essai de généralisation de formules du type de Runge-Kutta faisant intervenir la dérivée suivante. Thèse Grenoble, 1961.
- [2] E. FEHLBERG - Eine Method zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta Verfahren, Z. A. M. M. 38 (1958) p. 421-426.
- [3] E. FEHLBERG - Neue genauere Runge Kutta Formeln für Differentialgleichungen zweiter Ordnung Z. A. M. M. 40 (1960) p. 252-258.
- [4] E. FEHLBERG - Neue genauere Runge-Kutta Formeln für Differentialgleichungen nter Ordnung Z. A. M. M. 40 (1960) p. 449-455.
- [5] P. J. LAURENT - Méthodes du type de Runge-Kutta pour des systèmes différentiels de formes particulières. Thèse Grenoble, 1960.
- [6] J. KUNTZMANN - Deux formules optimales du type de Runge-Kutta, Chiffres 2 (1959), p. 21-26.
- [7] J. KUNTZMANN - Nouvelle méthode pour l'intégration approchée des équations différentielles. Congrès de Munich, 1962.
- [8] F. CESCHINO - Une méthode de mise en oeuvre des formules d'Obrechhoff pour l'intégration des équations différentielles. Chiffres 2, p. 49-54.
- [9] J. B. NUGEYRE - Un procédé mixte (Runge-Kutta, pas liés) d'intégration des systèmes différentiels du type $x'' = X(x,t)$. Chiffres 2 (1961).
- [10] Y. SIRET - Principe des méthodes de Runge-Kutta à pas liés. Thèse Grenoble, 1962.

METHODE	RUNGE-KUTTA CLASSIQUE	RUNGE-KUTTA OPTIMUM	TAYLOR	ADAMS IMPLICITE	ADAMS EXPLICITE	DIFFERENCES CENTRALES
Pas	4h	4h	4h	2h	h	2h
C_4	16/45	1024/3600	128/15	76/45	251/180	32/45
$L_1 C_1$	32/15	0	256/5	152/15	251/30	64/15
R	32/5	3072/880	128/5	76/15	251/10	32/15
$K_1 C_2$	32/15	0	512/15	304/45	251/45	128/45
$K_1 J_1 C_1$	128/15	1024/120	512/15	304/45	251/45	128/45
$J_1 C_3$	64/45	4096/3600	128/15	76/45	251/180	32/45
$J_1 K_1 C_1$	64/15	0	128/5	76/15	251/60	32/45
$J_1^3 C_1$	128/15	1024/120	128/15	76/45	251/180	32/45
$J_1^2 C_2$	32/15	0	128/15	76/45	251/180	32/45
TOTAL	1616/45	1066/45	9216/45	1824/45	1506/45	768/45

DISCUSSION

M. Ch. BLANC - Avez-vous examiné également la possibilité d'établir des méthodes de comparaison, non pas en recherchant une erreur d'ordre aussi élevée que possible, mais en la rendant minimum dans un sens de Tchébycheff.

M. KUNTZMANN - Ceci revient à prendre un autre instrument de mesure. Je n'ai pas travaillé dans cette direction.

M. de POSSEL - Existe-t-il des cas où l'équation du second ordre présente un avantage net du point de vue calcul à la machine sur le système équivalent de deux équations du premier ordre.

M. KUNTZMANN - Si la dérivée première ne figure pas, il est intéressant de garder l'équation du second ordre.

M. de POSSEL - A-t-on intérêt, pour un calcul à la machine, à obtenir des formules donnant une meilleure approximation pour chaque pas, plutôt que de raccourcir le pas ?

M. KUNTZMANN - On a avantage à choisir un ordre raisonnable. La tendance actuelle préconise l'emploi de la méthode de Runge-Kutta qui est un équilibre.