ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Solution des trois problèmes de maxima proposés à la page 246 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 86-95

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__86_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des trois problèmes de maxima *proposés à la pag.* 246 *du précédent volume ;*

Par M. P. S.

PROBLÈME I. *Quel est le plus grand de tous les quadrilatères plans qu'il soit possible de former, avec les trois mêmes côtés consécutifs, en variant la grandeur des deux angles compris* (*) ?

Solution. Soient c le côté intermédiaire du quadrilatère, a, b les deux côtés extrêmes, α, β les angles variables qu'ils forment respectivement avec celui-là.

Pour fixer les idées, supposons les angles α, β obtus. Prolongeons les côtés a, b jusqu'à leur point de concours, et soient a', b' les longueurs respectives de leurs prolongemens jusqu'à ce point. Il est visible que ces prolongemens comprendront entre eux un angle $(\alpha+\beta)-\varpi$ dont les sinus et cosinus seront les sinus et cosinus de $\alpha+\beta$, pris négativement.

(*) Nous avons aussi reçu de M. Marc Secretan, licencié en droit, à Lausanne, une solution de ce problème sur laquelle celle que nous publions n'a d'autre avantage qu'un peu plus de symétrie dans les calculs.

J. D. G.

Cet angle sera commun à deux triangles dans lesquels les côtés adjacens seront $a+a'$, $b+b'$ pour le plus grand, et a', b' pour le plus petit. En vertu d'une proposition connue, les aires de ce triangle seront respectivement

$$-\tfrac{1}{2}(a+a')(b+b')\text{Sin.}(\alpha+\beta)\ ; \qquad -\tfrac{1}{2}a'b'\text{Sin.}(\alpha+\beta)\ .$$

L'aire du quadrilatère étant la différence des aires de ces deux triangles, en représentant cette aire par Q, on aura

$$Q=-\tfrac{1}{2}\{(a+a')(b+b')-a'b'\}\text{Sin.}(\alpha+\beta)\ ;$$

c'est-à-dire, en développant et réduisant,

$$Q=-\tfrac{1}{2}\{(ab'+ba')+ab\}\text{Sin.}(\alpha+\beta)\ . \qquad (1)$$

D'un autre côté, le plus petit des deux triangles donne

$$a'=-c\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}\ , \qquad b'=-c\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}\ ; \qquad (2)$$

d'où

$$ab'+ba'=-c\frac{a\text{Sin.}\alpha+b\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}\ ;$$

substituant donc dans la formule (1), elle deviendra

$$Q=\tfrac{1}{2}\{c(a\text{Sin.}\alpha+b\text{Sin.}\beta)-ab\text{Sin.}(\alpha+\beta)\}\ . \qquad (3)$$

Le problème consiste donc à profiter de la variabilité des deux angles α, β pour rendre cette fonction *maximum*.

On tire de là

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}=\tfrac{1}{2}a\{c\text{Cos.}\alpha-b\text{Cos.}(\alpha+\beta)\}\ , \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\beta}=\tfrac{1}{2}b\{c\text{Cos.}\beta-a\text{Cos.}(\alpha+\beta)\}\ ,$$

$$\frac{d^2Q}{d\alpha^2}=\tfrac{1}{2}a\{b\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\alpha\}\ ,\quad \frac{d^2Q}{d\beta^2}=\tfrac{1}{2}b\{a\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\beta\}\ ,$$

$$\frac{d^2Q}{d\alpha d\beta}=\tfrac{1}{2}ab\text{Sin}.(\alpha+\beta)\ ;$$

ce qui donne

$$\left(\frac{d^2Q}{d\alpha d\beta}\right)^2-\frac{d^2Q}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2Q}{d\beta^2}=\tfrac{1}{4}abc\{(a\text{Sin}.\alpha+b\text{Sin}.\beta)\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\}\ . \quad (4)$$

En conséquence les conditions communes au *maximum* et au *minimum* seront

$$c\text{Cos}.\alpha=b\text{Cos}.(\alpha+\beta)\ ,\qquad c\text{Cos}.\beta=a\text{Cos}.(\alpha+\beta)\ ;\quad (5)$$

on en conclut, sur-le-champ,

$$a\text{Cos}.\alpha=b\text{Cos}.\beta\ ;\qquad (6)$$

ce qui veut dire qu'*il faut que les projections des deux côtés extrêmes, sur la direction du côté intermédiaire, soient de même longueur, mais tournées en sens inverse ;* cela exige que les angles α, β soient tous deux obtus ou tous deux aigus.

Posons $\alpha+\beta=x$, il en résultera

$$\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta=\text{Cos}.x\ ;$$

ou bien

$$\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta-\text{Cos}.x=\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\ ;$$

d'où, en quarrant et en remplaçant ensuite les sinus par des fonctions équivalentes des cosinus,

$$2\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\text{Cos}.x-\text{Cos}.^2x-\text{Cos}.^2\alpha-\text{Cos}.^2\beta+1=0\ ;$$

mais, dans le cas actuel, les équations (5) deviennent simplement

$$c\text{Cos}.\alpha=b\text{Cos}.x\ ,\qquad c\text{Cos}.\beta=a\text{Cos}.x\ ;\qquad (7)$$

éléminant donc Cos.α et Cos.β de la précédente, à l'aide de celle-ci, il deviendra

$$2ab\text{Cos}.^3x-(a^2+b^2+c^2)\text{Cos}.^2x+c^2=0\ ;\qquad (9)$$

ou bien encore

$$c^2\text{Séc}.^3x-(a^2+b^2+c^2)\text{Séc}.x+2ab=0\ ;\qquad (10)$$

équation du troisième degré, sans second terme, que l'on résoudra par les fonctions circulaires. Lorsqu'on aura déterminé x, on en conclura α et β, au moyen des équations (7). Il est d'ailleurs aisé de voir que le problème, toujours possible, admettra une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27a^2b^2c^2-(a^2+b^2+c^2)^3\ ,$$

sera positive, nulle ou négative. On reconnaîtra ensuite, au moyen de la formule (4), si chacune de ces solutions appartient à un *maximum* ou à un *minimum*.

Si l'on désigne respectivement par α' et β' les angles du quadrilatère respectivement opposés à α et β, on aura, en faisant usage des formules (2)

$$\frac{\text{Sin}.\alpha'}{\text{Sin}.\beta'}=\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\beta}{b\text{Sin}.(\alpha+\beta)-c\text{Sin}.\alpha}\ ;$$

d'où, en mettant pour a et b leurs valeurs données par les formules (5)

$$\frac{\text{Sin}.\alpha'}{\text{Sin}.\beta'}=\frac{\text{Sin}.(\alpha+\beta)\text{Cos}.\beta-\text{Cos}.(\alpha+\beta)\text{Sin}.\beta}{\text{Sin}.(\alpha+\beta)\text{Cos}.\alpha-\text{Cos}.(\alpha+\beta)\text{Sin}.\alpha}=\frac{\text{Sin}.\alpha}{\text{Sin}.\beta}\ ;$$

d'où on conclura facilement que, si le quadrilatère est convexe, les angles α' et β' devront être les supplémens respectifs des angles α et β ; et que conséquemment ce quadrilatère doit être inscriptible au cercle ; proposition qui n'est, au surplus, qu'un cas particulier de cette autre proposition bien connue : *De tous les polygones formés avec les mêmes côtés, tous donnés, excepté un seul, le plus grand est le polygone inscriptible au cercle.*

Sortons présentement de ces généralités, et posons $b=a$; en vertu de la relation (6) il en résultera $\beta=\alpha$; de sorte qu'alors le quadrilatère devra être un trapèze isocèle. Dans cette hypothèse, on aura simplement

$$Q=a(c-a\text{Cos}.\alpha)\text{Sin}.\alpha\ ; \qquad (11)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}=a(a+c\text{Cos}.\alpha-2a\text{Cos}.^2\alpha)\ ; \qquad (12)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\alpha^2}=a(4a\text{Cos}.\alpha-c)\text{Sin}.\alpha\ ; \qquad (13)$$

la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera donc

$$2a\text{Cos}.^2\alpha-c\text{Cos}.\alpha-a=0\ ; \qquad (14)$$

ce qui donnera

$$\text{Cos}.\alpha=\frac{c\pm\sqrt{c^2+8a^2}}{4a}=-\frac{2a}{c\mp\sqrt{c^2+8a^2}}\ ;$$

d'où résulte

$$4a\text{Cos}.\alpha-c=\pm\sqrt{c^2+8a^2}\ ;$$

et, comme Sin.α est nécessairement positif, on voit que $\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\alpha^2}$

aura même signe que le radical, de sorte que son signe *inférieur* répondra à un *maximum*, et son signe *supérieur* à un *minimum*, lequel même ne sera possible qu'autant que c ne sera pas $>a$; puisqu'autrement on aurait $\text{Cos.}\alpha>1$.

Dans le cas du *maximum*, ou du signe négatif, on voit 1.° que, si l'on a c infini, il viendra $\text{Cos.}\alpha=0$, d'où $\alpha=90°$; 2.° que, si l'on a $c=a$, il viendra $\text{Cos.}\alpha=-\frac{1}{2}$, d'où $\alpha=120°$; 3.° qu'enfin, si l'on a $c=0$, il viendra $\text{Cos.}\alpha=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d'où $\alpha=135°$. Ainsi, dans le cas de c infini, les deux côtés extrêmes du trapèze devront être parallèles; ils devront ensuite diverger de plus en plus, à mesure que c deviendra plus petit, par rapport à a; de telle sorte que, lorsque c sera égal à a, ces deux côtés extrêmes devront déjà faire l'un avec l'autre un angle de 60°; enfin cet angle devra être droit, lorsque c sera devenu tout à fait nul (*).

(*) Le bois de chauffage, qui se pèse dans le midi de la France, se mesure, au contraire, dans le nord, en le disposant dans des cadres ou chassis, formés d'une pièce de bois horizontale, des deux extrémités de laquelle s'élèvent deux montans verticaux. On voit que, de la sorte, la surface rectangulaire du chassis détermine la surface transversale de la masse de bois qu'on achète; et, comme les bûches ont une longueur invariable, on peut faire abstraction de cette longueur et payer le bois à raison de la surface de la section transversale, qui est la même que celle du chassis; tout comme on mesure les étoffes, à cause de leur largeur constante, avec l'unité linéaire.

Ordinairement les montans verticaux de ce chassis sont maintenus en situation, au moyen d'arcs-boutans extérieurs, placés à leur partie inférieure. Mais quelquefois aussi ces arcs-boutans sortent de place, par vétusté, et alors, par l'effet du poids des bûches placées dans le cadre, les montans cèdent et s'inclinent plus ou moins en dehors.

Or, on voit, par l'analyse qui précède, que, pourvu que l'inclinaison ne soit pas très-considérable, elle procurera toujours un plus ou moins grand

PROBLÈME II. En portant successivement une certaine taxe à a, a', a'', a''', ... *ses produits sont devenus respectivement* A, A', A'', A''', ... ; *à combien faut-il porter cette taxe, pour en obtenir un produit* maximum ?

Solution. Soient posés

---

avantage à l'acheteur ; et que conséquemment ce n'est point lui mais bien le vendeur qui est intéressé au rétablissement des arcs-boutans.

C'est encore dans la même analyse que rentre la question de savoir quelle est la disposition des pieds de l'homme debout, la plus favorable à la stabilité de son corps. On voit en effet que le plus petit polygone convexe, comprenant la surface des pieds en contacts avec le sol, sera le plus grand possible quand le quadrilatère formé par les axes de ces pieds et par les droites qui joignent les extrémités de ces axes sera lui-même le plus grand possible ; d'où l'on voit d'abord qu'en supposant les deux pieds de même longueur, ils devront être également en dehors. On voit ensuite que, plus les pieds seront écartés l'un de l'autre et plus petit devra être aussi l'angle formé par leurs axes ; que, si la distance entre les extrémités antérieures de ces axes est égale à la longueur de l'un d'eux, cet angle devra être de $60°$; qu'il devra croître ensuite de plus en plus, à mesure que les talons se rapprocheront, mais sans jamais atteindre $90°$, attendu qu'il faudrait pour cela que les extrémités antérieures des axes des deux pieds coïncidassent, ce à quoi s'oppose nécessairement l'épaisseur des talons.

Dans sa *Nouvelle mécanique des mouvemens de l'homme et des animaux*, Barthez, qui passait pour un grand géomètre auprès de ses confrères, parce qu'il était allé un peu au-delà des élémens, critique la solution de Parent, qui s'est le premier occupé de ce problème, et donne pour l'angle que doivent former entre eux les axes des deux pieds $38.°56'$; mais, comme il ne dit pas à quelle distance l'un de l'autre il suppose les talons, ce qu'il a écrit sur ce sujet est tout à fait inintelligible. Pour que sa solution fût exacte, il faudrait que la distance entre les talons fût plus que double de la longueur de l'un des pieds ; ce qu'il ne paraît pas supposer.

J. D. G.

$$\frac{A'-A}{a'-a}=B\ ,\quad \frac{B'-B}{a''-a}=C\ ,\quad \frac{C'-C}{a'''-a}=D\ ,\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{A''-A'}{a''-a'}=B'\ ,\quad \frac{B''-B'}{a'''-a'}=C'\ ,\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{A'''-A''}{a'''-a''}=B''\ ,\ \ldots.;$$

$$\ldots\ldots\ldots;$$

on sait qu'alors si a , a' , a'' , a''' , ... sont des quantités peu différentes les unes des autres , en représentant par T le produit total de la taxe , supposée portée à t, on aura

$$T=A+(t-a)B+(t-a)(t-a')C+(t-a)(t-a')(t-a'')D+\ldots\ldots\ ;$$

telle est donc la fonction qu'il faudra rendre *maximum*, au moyen de la variabilité de t.

On tire de là

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=B+[2t-(a+a')]C+[3t^2-2(a+a'+a'')t+(aa'+aa''+a'a'')]D+\ldots.\ ,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=C+[(3t-(a+a'+a'')]D+\ldots\ldots.\ ;$$

de sorte que la condition commune au *maximum* et au *minimum* sera

$$0=B+[2t-(a+a')]C+[3t^2-2(a+a'+a'')t+(aa'+aa''+a'a'')]D+\ldots..$$

et une des racines de cette équation répondra à l'un ou à l'autre , suivant qu'elle rendra la fonction

$$C+[3t-(a+a'+a')]D+\ldots\ldots$$

négative ou positive.

On voit par là que le problème ne sera résoluble qu'autant qu'on aura en sa possession les résultats de trois expériences au moins. En supposant qu'on n'en ait pas davantage ; on trouvera

$$t=\frac{(a+a')C-B}{2C} ;$$

d'où

$$T=A+\frac{(a'-a)C-B}{2C}-\frac{(a'-a)^2C^2-B^2}{4C} ;$$

et cette valeur sera *maximum* ou *minimum*, suivant que C sera *négatif* ou *positif*.

PROBLÈME III. On s'est assuré, par l'expérience, qu'un seul dévidoir, tant que le fil ne rompait pas, pouvait dévider à raison d'une longueur a *de fil, par unité de temps.*

On s'est également assuré, par expérience, que le fil d'un seul dévidoir se rompait, terme moyen, à chaque m *unités de temps, et qu'il fallait alors* n *unités de temps pour réparer l'accident.*

On demande, d'après ces données, quel est le nombre des dévidoirs qu'il faut faire marcher, par un même mécanisme, pour obtenir, dans un temps donné, le plus grand produit possible ?

Solution. Cherchons quelle sera la longueur de fil effectivement dévidée par x dévidoirs, dans un temps donné t.

Puisqu'avec une seule bobine il se fait une rupture de fil au bout de m unités de temps ; lorsque les bobines seront au nombre de x, elles ne fonctionneront que $\frac{m}{x}$ unités de temps avant une rupture de fil ; et, durant ce temps, chacune d'elles dévidant une longueur de fil exprimée par $\frac{m}{x}a$, ces x bobines auront dévidé une longueur de fil exprimée par ma ; mais comme, au bout de ce temps $\frac{m}{x}$, il y aura une interruption du travail de toutes les bobines durant le temps n, pour le raccommodage du fil rompu, il s'ensuit que, durant chaque intervalle de temps $\frac{m}{x}+n$, il ne se dévidera également de toutes les bobines qu'une longueur totale de fil exprimée par ma, ce qui fera, pour chaque unité de temps, une longueur

$$\frac{ma}{\frac{m}{x}+n} \quad \text{ou} \quad \frac{max}{m+nx} ;$$

si donc on représente par A la longueur totale de fil dévidée par toutes les bobines, au bout du temps t, on aura

$$A=\frac{matx}{m+nx} ,$$

fonction qui, tant qu'on supposera x positif, comme on est obligé de le faire ici, n'est point susceptible d'un *maximum* proprement dit, mais seulement d'une *limite* répondant à x infini, et qui est

$$A=\frac{mat}{n} .$$

Ainsi, bien que le produit croisse avec le nombre des bobines; jamais on obtiendra un produit $\frac{m}{n}a$ par unités de temps, quel que soit le nombre fini de ces bobines (*).

(*) L'idée de ce problème nous a été suggérée par M. Sarrus; mais il paraît que son véritable énoncé se sera échappé de notre mémoire, et qu'avec lui se sera évanoui le *maximum* dont M. Sarrus le disait susceptible.

J. D. G.