ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LENTHÉRIC

Démonstration du premier des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 283 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 366-377
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__366_1>

Démonstration du premier des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 283 du présent volume ;

Par M. Lenthéric, docteur ès sciences, professeur de mathématiques et de physique au collége royal de Montpellier.

Soient a, b, c trois longueurs quelconques, en posant

$$b-c=a',$$
$$c-a=b',$$
$$a-b=c';$$

on aura évidemment

$$a'+b'+c'=0\ , \qquad (1)$$

$$aa'+bb'+cc'=0\ . \qquad (2)$$

Si A, B, C sont trois angles quelconques et qu'on pose

$$B-C=A'\ ,$$

$$C-A=B'\ ,$$

$$A-B=C'\ ;$$

on aura pareillement

$$A'+B'+C'=0\ , \qquad (3)$$

$$AA'+BB'+CC'=0\ . \qquad (4)$$

L'équation (3) donne tour-à-tour

$$\left.\begin{array}{l} -B'-C'=A'=B-C\ , \\ -C'-A'=B'=C-A\ , \\ -A'-B'=C'=A-B\ ; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} C-C'=B+B'\ , \\ A-A'=C+C'\ , \\ B-B'=A+A'\ ; \end{array}\right.$$

et par conséquent

$$\begin{array}{ll} \text{Cos.}(C-C')=\text{Cos.}(B+B')\ , & \text{Sin.}(B+B')=\text{Sin.}(C-C')\ , \\ \text{Cos.}(A-A')=\text{Cos.}(C+C')\ , & \text{Sin.}(C+C')=\text{Sin.}(A-A')\ , \\ \text{Cos.}(B-B')=\text{Cos.}(A+A')\ , & \text{Sin.}(A+A')=\text{Sin.}(B-B')\ ; \end{array}$$

d'où en ajoutant et transposant

$$(A+A')+(B+B')+(C+C')-(A-A')-(B-B')-(C-C')=0\ ; \quad (5)$$

$$\text{Cos.}(A-A')+\text{Cos.}(B-B')+\text{Cos.}(C-C')-\text{Cos.}(A+A')-\text{Cos.}(B+B')-\text{Cos.}(C+C')=0\,, \qquad (6)$$

$$\text{Sin.}(A+A')+\text{Sin.}(B+B')+\text{Sin.}(C+C')-\text{Sin.}(A-A')-\text{Sin.}(B-B')-\text{Sin.}(C-C')=0\,. \qquad (7)$$

En vertu des formules connues

$$2\text{Sin.}x\text{Sin.}y=\text{Cos.}(x-y)-\text{Cos.}(x+y)\,,$$

$$2\text{Cos.}x\text{Sin.}y=\text{Sin.}(x+y)-\text{Sin.}(x-y)\,,$$

on a

$$2\text{Sin.}A\text{Sin.}A'=\text{Cos}\,(A-A')-\text{Cos.}(A+A')\,,$$

$$2\text{Sin.}B\text{Sin.}B'=\text{Cos.}(B-B')-\text{Cos.}(B+B')\,,$$

$$2\text{Sin.}C\text{Sin.}C'=\text{Cos.}(C-C')-\text{Cos.}(C+C')\,;$$

$$2\text{Cos.}A\text{Sin.}A'=\text{Sin.}(A+A')-\text{Sin.}(A-A')\,,$$

$$2\text{Cos.}B\text{Sin.}B'=\text{Sin.}(B+B')-\text{Sin.}(B-B')\,,$$

$$2\text{Cos.}C\text{Sin.}C'=\text{Sin.}(C+C')-\text{Sin.}(C-C')\,.$$

Ajoutant membre à membre les équations de chacune des deux séries, en ayant égard aux équations (6) et (7), et divisant par *deux*, il viendra

$$\text{Sin.}A\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C\text{Sin.}C'=0\,, \qquad (8)$$

$$\text{Cos.}A\text{Sin.}A'+\text{Cos.}B\text{Sin.B}'+\text{Cos.}C\text{Sin.}C=0\,. \qquad (9)$$

En prenant, tour-à-tour, la somme des produits respectifs de ces deux dernières équations, d'abord par $+\text{Sin.}X$ et $+\text{Cos.}X$, puis $+\text{Cos.}X$ et $-\text{Sin.}X$, on aura, quel que soit l'angle X,

$$\text{Cos.}(A-X)\text{Sin.}A'+\text{Cos}(B-X)\text{Sin.}B'+\text{Cos.}(C-X)\text{Sin.}C'=0\,, \quad (10)$$

$$\text{Sin}(A-X)\text{Sin.}A'+\text{Sin.}(B-X)\text{Sin.}B'+\text{Sin.}(C-X)\text{Sin.}C'=0\,. \quad (11)$$

Cela posé, soient a, b, c trois rayons vecteurs d'une planète ou d'une comète, et A, B, C les angles que font leurs directions respectives avec une droite tracée arbitrairement dans leur plan, par le centre du soleil. Soient X l'angle que fait la ligne des apsides avec la même droite, p le paramètre de l'orbite et λ le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, <1 pour l'ellipse, $=1$ pour la parabole, et >1 pour l'hyperbole; on aura

$$\left.\begin{array}{l} 2a[1+\lambda\text{Cos}(A-X)]=p\,, \\ 2b[1+\lambda\text{Cos.}(B-X)]=p\,, \\ 2c[1+\lambda\text{Cos.}(C-B)]=p\,. \end{array}\right\} \quad (12)$$

En prenant la somme des produits respectifs de ces équations par $bc\text{Sin.}A'$, $ca\text{Sin.}B'$, $ab\text{Sin.}C'$, et ayant égard à l'équation (10), il viendra

$$2abc(\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C')=(bc\text{Sin.}A'+ca\text{Sin.}B'+ab\text{Sin.}C')p\,,$$

d'où

$$p=2.\frac{\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C'}{\dfrac{\text{Sin.}A'}{a}+\dfrac{\text{Sin.}B'}{b}+\dfrac{\text{Sin.}C'}{c}}\,. \quad (13)$$

En prenant la somme des produits des trois mêmes équations respectivement par a', b', c' et ayant égard aux relations (1) et (2) il viendra, en divisant par 2λ

$$aa'\text{Cos}(A-X)+bb'\text{Cos}.(B-X)+cc'\text{Cos}.(C-X)=0\ ,$$

ou bien en développant

$$(aa'\text{Cos}.A+bb'\text{Cos}.B+cc'\text{Cos}.C)\text{Cos}.X+(aa'\text{Sin}.A+bb'\text{Sin}.B+cc'\text{Sin}.C)\text{Sin}.X=0\ ;$$

d'où

$$\text{Tang}.X=-\frac{aa'\text{Cos}.A+bb'\text{Cos}.B+cc'\text{Cos}.C}{aa'\text{Sin}.A+bb'\text{Sin}.B+cc'\text{Sin}.C}\ . \qquad (14)$$

La première des équations (12) donne

$$\lambda=\frac{p-2a}{2a\text{Cos}.(A-X)}\ ;$$

mais de la valeur de Tang. X on conclut aisément

$$\text{Sin}.X=-\frac{aa'\text{Cos}.A+bb'\text{Cos}.B+cc'\text{Cos}.C}{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos}.A'+2cc'aa'\text{Cos}.B'+2aa'bb'\text{Cos}.C'}}\ ,$$

$$\text{Cos}.X=+\frac{aa\text{Sin}.A+bb'\text{Sin}.B+cc'\text{Sin}.C}{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c'^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos}.A'+2cc'aa'\text{Cos}.B'+2aa'bb'\text{Cos}.C'}}\ ;$$

et par suite

$$\text{Cos}.A\text{Cos}.X+\text{Sin}.A\text{Sin}.X=\text{Cos}.(A-X)$$

$$=\frac{cc'\text{Sin}.B'-bb'\text{Sin}.C'}{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos}.A'+2cc'aa'\text{Cos}.B'+2aa'bb'\text{Cos}.C'}}\ .$$

D'un autre côté la formule (13) donne

$$p-2a=-2a.\frac{cc'\text{Sin}.B'-bb'\text{Sin}.C'}{bc\text{Sin}.A'+ca\text{Sin}.B'+ab\text{Sin}.C'}\ ;$$

substituant ces valeurs dans celle de λ, il viendra

$$\lambda=-\frac{\sqrt{a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2+2bb'cc'\text{Cos}\,A'+2cc'aa'\text{Cos}\,B'+2aa'bb'\text{Cos.}\,C'}}{bc\text{Sin.}\,A'+ca\text{Sin.}\,B'+ab\text{Sin.}\,C'}\,. \quad (15)$$

Ainsi, trois rayons vecteurs étant donnés de grandeur et de situation, on en pourra déduire, par des calculs très-symétriques, la grandeur et la situation de l'orbite.

Ces diverses formules sont connues depuis long-temps (*) ; mais il ne paraît pas qu'on ait remarqué encore qu'elles ne sont que des cas particuliers d'autres formules plus générales que nous allons faire connaître.

Soient a, b, c, d, ... p, q, r, s des longueurs quelconques *en nombre impair* ; posons

$$b-c+d-\ldots\ldots-q+r-s=a'\,,$$

$$c-d+e-\ldots\ldots-r+s-a=b'\,,$$

$$d-e+f-\ldots\ldots-s+a-b=c'\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r-s+a-\ldots\ldots-m+n-p=q'\,,$$

$$s-a+b-\ldots\ldots-n+p-q=r'\,,$$

$$a-b+c-\ldots\ldots-p+q-r=s'\,;$$

il en résultera

(*) Voy. *Annales*, tom. IV, pag. 197. J. D. G.

$$a'+b'+c'+\dots\dots+q'+r'+s'=0\ , \qquad (1)$$

$$aa'+bb'+cc'+\dots\dots+qq'+rr'+ss'=0\ . \qquad (2)$$

On aura aussi

$$\left.\begin{array}{l}
a-a'=a-b+c-\dots\dots+q-r+s=s+s' \\
b-b'=b-c+d-\dots\dots+r-s+a=a+a'\ , \\
c-c'=c-d+e-\dots\dots+s-a+b=b+b'\ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ , \\
q-q'=q-r+s-\dots\dots+m-n+p=p+p'\ , \\
r-r'=r-s+a-\dots\dots+n-p+q=q+q'\ , \\
s-s'=s-a+b-\dots\dots+p-q+r=r+r'\ ,
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

d'où en ajoutant et transposant

$$(a+a')+(b+b')+\dots+(r+r')+(s+s')-(a-a')-(b-b')-\dots-(r-r')-(s-s')=0\ . \quad (4)$$

Si A, B, C, D, ... P, Q, R, S sont des angles *en nombre impair*, en posant

$$B-C+D-\dots\dots-Q+R-S=A'\ ,$$

$$C-D+E-\dots\dots-R+S-A=B'\ ,$$

$$D-E+F-\dots\dots-S+A-B=C'\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R-S+A-\dots\dots-M+N-P=Q'\ ,$$

$$S-A+B-\ldots\ldots-N+P-Q=R' ,$$

$$A-B+C-\ldots\ldots-P+Q-R=S' ;$$

on aura de même

$$A'+B'+C'+\ldots\ldots+Q'+R'+S'=0 , \qquad (5)$$

$$AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots+QQ'+RR'+SS'=0 , \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} A-A'=S+S' , \\ B-B'=A+A' , \\ C-C'=B+B' , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q-Q'=P+P' , \\ R-R'=Q+Q' , \\ S-S'=R+R' , \end{array}\right\} \qquad (7)$$

$$(A+A')+(B+B')+\ldots+(R+R')+(S+S')-(A-A')-(B-B')-\ldots-(R-R')-(S-S')=0 . \qquad (8)$$

Des équations (7) on conclura encore

$$\text{Cos.}(A-A')=\text{Cos.}(S+S') , \qquad \text{Sin}(A-A')=\text{Sin.}(S+S') ,$$

$$\text{Cos.}(B-B')=\text{Cos.}(A+A') , \qquad \text{Sin.}(B-B')=\text{Sin.}(A+A') ,$$

$$\text{Cos.}(C-C')=\text{Cos.}(B+B') , \qquad \text{Sin.}(C-C')=\text{Sin.}(B+B') ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{Cos.}(Q-Q')=\mathrm{Cos.}(P+P')\,,\qquad \mathrm{Sin.}(Q-Q')=\mathrm{Sin.}(P+P')\,,$$

$$\mathrm{Cos}\,(R-R')=\mathrm{Cos}\,(Q+Q')\,.\qquad \mathrm{Sin.}(R-R')=\mathrm{Sin.}(Q+Q')\,,$$

$$\mathrm{Cos.}(S-S')=\mathrm{Cos.}(R+R')\,,\qquad \mathrm{Sin.}(S-S')=\mathrm{Sin.}(R+R')\,;$$

Ajoutant les équations dans les deux séries et transposant, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Cos}\,(A-A')+\mathrm{Cos.}(B-B')+\mathrm{Cos.}(C-C')+\ldots+\mathrm{Cos.}(Q-Q')+\mathrm{Cos.}(R-R')+\mathrm{Cos.}(S-S')\\ -\mathrm{Cos.}(A+A')-\mathrm{Cos.}(B+B')-\mathrm{Cos.}(C+C')-\ldots-\mathrm{Cos.}(Q+Q')-\mathrm{Cos.}(R+R')-\mathrm{Cos.}(S+S')\end{array}\right\}=0\,.\quad(9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Sin.}(A+A')+\mathrm{Sin.}(B+B)+\mathrm{Sin.}(C+C')+\ldots+\mathrm{Sin.}(Q+Q')+\mathrm{Sin.}(R+R')+\mathrm{Sin.}(S+S')\\ -\mathrm{Sin.}(A-A')-\mathrm{Sin.}(B-B')-\mathrm{Sin.}(C-C')-\ldots-\mathrm{Sin.}(Q-Q')-\mathrm{Sin.}(R-R')-\mathrm{Sin.}(S-S')\end{array}\right\}=0\,.\quad(10)$$

En faisant toujours usage des deux théorèmes

$$2\mathrm{Sin.}x\mathrm{Sin}\,y=\mathrm{Cos.}(x-y)-\mathrm{Cos.}(x+y)\,,$$

$$2\mathrm{Cos.}x\mathrm{Sin.}y=\mathrm{Sin.}(x+y)-\mathrm{Sin.}(x-y)\,,$$

on trouvera

$$2\mathrm{Sin.}A\mathrm{Sin.}A'=\mathrm{Cos.}(A-A')-\mathrm{Cos.}(A+A')\,,$$

$$2\mathrm{Sin.}B\mathrm{Sin.}B'=\mathrm{Cos.}(B-B')-\mathrm{Cos.}(B+B')\,,$$

$$2\mathrm{Sin.}C\mathrm{Sin.}C'=\mathrm{Cos.}(C-C')-\mathrm{Cos.}(C+C')\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\mathrm{Sin.}Q\mathrm{Sin.}Q'=\mathrm{Cos.}(Q-Q')-\mathrm{Cos.}(Q+Q')\,,$$

$$2\mathrm{Sin.}R\mathrm{Sin.}R'=\mathrm{Cos}\,(R-R')-\mathrm{Cos.}(R+R')\,;$$

$$2\mathrm{Sin.}S\,\mathrm{Sin.}S'=\mathrm{Cos.}(S-S')-\mathrm{Cos.}(S+S')\,;$$

$$2\text{Cos}.A\text{Sin}.A'=\text{Sin}.(A+A')-\text{Sin}\,(A-A')\ ,$$
$$2\text{Cos}\,B\text{Sin}\cdot B'=\text{Sin}.(B+B')-\text{Sin}.(B-B')\ ,$$
$$2\text{Cos}.C\text{Sin}.C'=\text{Sin}.(C+C')-\text{Sin}\,(C-C')\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ,$$
$$2\text{Cos}.Q\text{Sin}.Q'=\text{Sin}.(Q+Q')-\text{Sin}\,(Q-Q')\ ,$$
$$2\text{Cos}.R\text{Sin}.R'=\text{Sin}\,(R+R')-\text{Sin}\,(R-R')\ ,$$
$$2\text{Cos}.S\text{Sin}.S'=\text{Sin}\,(S+S')-\text{Sin}.\,(S-S')\ .$$

Prenant les sommes d'équations dans les deux séries, et ayant égard aux équations (9) et (10), il viendra en divisant par *deux*

$$\text{Sin}.A\text{Sin}.A'+\text{Sin}.B'\text{Sin}.B'+\text{Sin}.C\text{Sin}.C'+\ldots+\text{Sin}.Q\text{Sin}.Q'+\text{Sin}.R\text{Sin}.R'+\text{Sin}.S\text{Sin}.S'=0\ , \quad (11)$$

$$\text{Cos}.A\text{Sin}.A'+\text{Cos}.B\text{Sin}.B'+\text{Cos}\,C\text{Sin}.C'+\ldots+\text{Cos}.Q\text{Sin}.Q'+\text{Cos}.R\text{Sin}.R'+\text{Cos}.S\text{Sin}.S'=0, \quad (12)$$

Si l'on prend la somme des produits respectifs de ces deux équations d'abord par $+\text{Sin}.X$ et $+\text{Cos}.X$, puis par $+\text{Cos}.X$ et $-\text{Sin}.X$, on aura, quel que soit l'angle X,

$$\text{Cos}.(A-X)\text{Sin}.A'+\text{Cos}(B-X)\text{Sin}.B'+\ldots\ldots+\text{Cos}.(R-X)\text{Sin}.R'+\text{Cos}.(S-X)\text{Sin}.S'=0\ , \quad (13)$$

$$\text{Sin}.(A-X)\text{Sin}.A'+\text{Sin}.(B-X)\text{Sin}.B'+\ldots\ldots+\text{Sin}.(R-X)\text{Sin}.R'+\text{Sin}.(S-X)\text{Sin}.S'=0\ , \quad (14)$$

Cela posé, admettons que a, b, c, ... q, r, s soient des rayons vecteurs d'une planète ou d'une comète, et que A, B, C, ... Q, R, S soient les angles qu'ils forment respectivement avec une droite menée arbitrairement dans leur plan, par le centre du soleil. Soient X l'angle que fait la ligne des apsides avec la même droite, p le paramètre de l'orbite et λ le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, <1 pour l'ellipse, $=1$ pour la parabole et >1 pour l'hyperbole, on aura

$$\left.\begin{array}{l}2a[1+\lambda\text{Cos.}(A-X)]=p\ ,\\ 2b[1+\lambda\text{Cos.}(B-X)]=p\ ,\\ 2c[1+\lambda\text{Cos.}(C-X)]=p\ ,\\ \dots\dots\dots\dots\dots ,\\ 2q[1+\lambda\text{Cos.}(Q-X)]=p\ ,\\ 2r[1+\lambda\text{Cos.}(R-X)]=p\ ,\\ 2s[1+\lambda\text{Cos.}(S-X)]=p\ .\end{array}\right\}\quad(15)$$

Si l'on prend d'abord la somme des produits respectifs de ces équations par $bc\ldots rs\text{Sin.}A'$, $cd\ldots sa\text{Sin.}B'$, $de\ldots ab\text{Sin.}C'$, ..., $rs\ldots np\text{Sin.}Q'$, $sa\ldots pq\text{Sin.}R'$, $ab\ldots qr\text{Sin.}S'$, en ayant égard à l'équation (13), il viendra

$$2abc\ldots qrs(\text{Sin.}A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C'+\ldots\ldots+\text{Sin.}Q'\text{Sin.}R'+\text{Sin.}S')$$

$$=(bc\ldots rs\text{Sin.}A'+cd\ldots sa\text{Sin.}B'+\ldots\ldots+sa\ldots pq\text{Sin.}R'+ab\ldots qr\text{Sin.}S')p\ ;$$

d'où

$$p=2.\frac{\text{Sin }A'+\text{Sin.}B'+\text{Sin.}C'+\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{Sin.}Q'+\text{Sin.}R'+\text{Sin.}S'}{\frac{\text{Sin.}A'}{a}+\frac{\text{Sin.}B'}{b}+\frac{\text{Sin.}C'}{c}+\ldots\ldots+\frac{\text{Sin.}Q'}{q}+\frac{\text{Sin.}R.}{r}+\frac{\text{Sin.}S'}{s}}\ .\quad(16)$$

Si l'on prend la somme des produits respectifs des mêmes équations par a', b', c', ... q', r', s', en ayant égard aux équations (1) et (2), il viendra, en divisant par 2λ,

$$aa'\text{Cos.}(A-X)+bb'\text{Cos.}(B-X)+\ldots\ldots+rr'\text{Cos.}(R-X)+ss'\text{Cos.}(S-X)=0\ ;$$

ou bien, en développant

$$\left.\begin{array}{l}(aa'\text{Cos.}A+bb'\text{Cos.}B+\ldots\ldots+rr'\text{Cos.}R+ss'\text{Cos.}S)\text{Cos.}X\\ +(aa'\text{Sin.}A+bb'\text{Sin.}B+\ldots\ldots+rr'\text{Sin.}R+ss'\text{Sin.}S)\text{Sin.}X\end{array}\right\}=0\ ;$$

d'où

$$\text{Tang.}X = -\frac{aa'\text{Cos.}A + bb'\text{Cos.}B + \ldots\ldots + rr'\text{Cos.}R + ss'\text{Cos.}S}{aa'\text{Sin.}A + bb'\text{Sin.}B + \ldots\ldots + rr'\text{Sin.}R + ss'\text{Sin.}S} . \quad (17)$$

Les valeurs de p et X étant déterminées par les formules (16) et (17), on en conclura celle de λ à l'aide de l'une quelconque des équations (15).

Si l'on borne le nombre des rayons vecteurs donnés à cinq seulement, la formule (16) deviendra exactement celle qui a été proposée à démontrer à la page 283 du présent volume, et qu'on voit ainsi appartenir à l'hyperbole et à la parabole tout aussi bien qu'à l'ellipse.