ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

C. C. GÉRONO

Géométrie élémentaire. Applications de la théorie des centres de moyennes distances

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 330-334

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__330_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Applications de la théorie des centres de moyennes distances ;

Par M. C. C. Gérono.

On sait que le principe fondamental de la théorie des centres de moyennes distances consiste en ce que des points $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ étant donnés dans l'espace au nombre de n, et des grandeurs homogènes en même nombre $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ répondant respectivement à chacun d'eux ; il existe toujours dans l'espace un point et un seul point P, tel que le produit de sa distance à quelque plan que ce puisse être par la somme $m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots+m_n$ est égal à la somme des produits respectifs par $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ des distances des points $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ au même plan.

On sait encore que, si Π est un point pris arbitrairement dans l'espace, on aura

$$m_1.\overline{\Pi P_1}^2+m_2.\overline{\Pi P_2}^2+m_3.\overline{\Pi P_3}^2+\ldots\ldots+m_n.\overline{\Pi P_n}^2=(m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots+m_n).\overline{\Pi P}^2$$

$$+m_1.\overline{PP_1}^2+m_2.\overline{PP_2}^2+m_3.\overline{PP_3}^2+\ldots\ldots+m_n\overline{PP_n}^2 .$$

M. Lhuilier, de Genève, qui s'est spécialement occupé de cette théorie, en a fait des applications très-curieuses ; mais il n'a pas considéré celles de ces applications auxquelles peut donner naissance l'indétermination des multiplicateurs $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$; indétermination qui permet de déplacer à volonté dans l'espace, le centre P des moyennes distances. Nous nous proposons de montrer ici, par un petit nombre d'exemples, le parti qu'on peut tirer en géométrie de cette considération.

I. Soient les quatre points donnés, les quatre sommets A, B, C, D, d'un tétraèdre et les multiplicateurs correspondans a, b, c, d, respectivement proportionnels aux aires des faces opposées. Comme on obtient également le volume du tétraèdre soit en multipliant le tiers de l'aire d'une face par sa distance au sommet opposé, soit en multipliant ce tiers de la somme des aires des faces par le rayon de la sphère inscrite, il s'ensuit que ce centre sera ici le centre des moyennes distances.

Si donc on se rappelle le procédé général au moyen duquel on détermine le centre des moyennes distances de plusieurs points, on parviendra, pour la détermination du centre de la sphère inscrite au tétraèdre dont il s'agit, au procédé que voici : Soit coupée l'arête CD, au point E, de telle sorte que les segmens EC, ED, soient proportionnels aux aires des faces ACB, ADB. Soit coupée BE, au point F, de telle sorte que les deux segmens FE et FB soient entre eux comme l'aire ACD est à la somme d'aires ACB+ADB ; enfin soit coupée AF en G, de telle sorte que les deux segmens GF et GA soient entre eux comme l'aire BCD est à la somme d'aires BAC+CAD+DAB ; et le point G ainsi déterminé sera le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Ou encore, plus symétriquement : Soient coupées AB en E, de telle sorte que les deux segmens EA et EB soient entre eux comme les aires des faces CAD et CBD, et CD en F, de telle sorte que les deux segmens FC et FD soient entre eux comme les aires des faces ACB et ADB. Soit enfin coupée EF en G, de telle sorte que les deux segmens GE et GF soient entre eux comme la somme d'aires ACB+ADB est à la somme d'aires CAD+CBD ; et le point G sera de nouveau le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Tout cela revient à dire que *le centre de la sphère inscrite à* *un tétraèdre est le même que le centre commun de gravité de quatre masses proportionnelles aux aires de ses faces, placées respectivement aux sommets opposés.*

II. Soit une sphère concentrique à la sphère inscrite au tétraèdre, décrite d'un rayon arbitraire, et soit P un point pris arbitrairement sur la surface de cette sphère; on aura, par l'équation fondamentale rapportée ci-dessus,

$$\overline{PA}^2.BCD+\overline{PB}^2.CDA+\overline{PC}^2.DAB+\overline{PD}^2ABC$$

$$=\overline{PG}^2(ABC+BCD+CDA+DAB)+\overline{GA}^2.BCD+\overline{GB}^2.CDA+\overline{GC}^2.DAB+\overline{GD}^2.ABC \quad ;$$

c'est-à-dire, la somme des produits des aires des faces d'un tétraèdre par les quarrés des distances des sommets opposés à l'un quelconque des points de la surface d'une sphère concentrique à la sphère inscrite est une quantité constante, égale au produit de l'aire du tétraèdre par le quarré du rayon de cette dernière sphère, augmenté de la somme des produits des aires des faces par les quarrés des distances des sommets opposés au centre de cette même sphère.

III. Soient pris, sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère gauche ABCD, des points E, F, G, H, de telle sorte qu'on ait

$$AE.BF.CG.DH=AH.DG.CF.BE \quad ;$$

les quatre points E, F, G, H seront ainsi dans un même plan. En effet, on pourra toujours déterminer quatre quantités a, b, c, d, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{AE}{BE}=\frac{b}{a}\,,\quad \frac{BF}{CF}=\frac{c}{b}\,,\quad \frac{CG}{DG}=\frac{d}{c}\,,\quad \frac{DH}{AH}=\frac{a}{d}\quad ;$$

alors les points E, F, G, H seront respectivement les centres de moyennes distances des systèmes

$$(A,B,a,b)\ ,\qquad (B,C,b,c)\ ,\qquad (C,D,c,d)\ ,\qquad (D,A,d,a)\ ;$$

le centre du système (A, B, C, D, a, b, c, d) devra donc se trouver à la fois sur les deux droites EG, FH ; d'où il suit que ces droites se couperont en quelque point K et seront ainsi dans un même plan.

La proposition 16 du V.e livre des Élémens de M. Legendre n'est, comme l'on voit, qu'un cas très-particulier de ce théorème.

On sait que, lorsque les quatre côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère gauche touchent en E, F, G, H, une même surface du second ordre, on a la relation

$$AE.BF.CG.DH=AH.DG.CF.BE\ ;$$

donc aussi alors les quatre points de contact E, F, G, H, sont situés dans un même plan.

IV. Lorsque quatre points A, B, C, D, sont dans un même plan, il est toujours possible de déterminer les quantités a, b, c, de telle sorte que le dernier D soit le centre des moyennes distances du système (A, B, C, a, b, c) des trois autres ; on a alors, en vertu de l'équation fondamentale,

$$\overline{AB}^2.b+\overline{AC}^2.c=\overline{AD}^2(a+b+c)+\overline{DA}^2.a+\overline{DB}^2.b+\overline{DC}^2.c\ ,$$

$$\overline{BC}^2.c+\overline{BA}^2.a=\overline{BD}^2(a+b+c)+\overline{DA}^2.a+\overline{DB}^2.b+\overline{DC}^2.c\ ,$$

$$\overline{CA}^2.a+\overline{CB}^2.b=\overline{CD}^2(a+b+c)+\overline{DA}^2.a+\overline{DB}^2.b+\overline{DC}^2.c\ .$$

En éliminant, entre ces trois équations, deux quelconques des troi quantités a, b, c, la troisième disparaîtra d'elle-même et on parviendra à l'équation de condition

$$4\overline{AD}^2.\overline{BD}^2.\overline{CD}^2+(\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-\overline{AC}^2)(\overline{DC}^2+\overline{DB}^2-\overline{BC}^2)(\overline{DB}^2+\overline{DA}^2-\overline{AB}^2)$$

$$-\overline{AD}^2(\overline{DB}^2+\overline{DC}^2-\overline{BC}^2)^2-\overline{BD}^2(\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-\overline{AC}^2)^2-\overline{CD}^2(\overline{DA}^2+\overline{DB}^2-\overline{AB}^2)^2=0\;;$$

équation qui exprime la relation entre les six distances qui séparent deux à deux quatre points d'un même plan. On parviendrait, avec la même facilité et sans l'intervention des quantités linéo-angulaires, à la relation entre les dix distances qui séparent deux à deux cinq points donnés dans l'espace.

Ces exemples suffisent pour montrer le parti qu'on peut tirer de l'indétermination des coefficiens dans les formules relatives à la théorie des centres de moyennes distances. On en pourra déduire ainsi, en particulier, toute la théorie des transversales.

Paris, le 10 janvier 1827.