ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

AMPÈRE

Analyse transcendante. Démonstration du théorème de Taylor, pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 317-329

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__317_0>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Démonstration du théorème de Taylor, pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes ;

Par M. AMPÈRE, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., Professeur au Collége de France et à l'Ecole polytechnique.

POUR développer

$$U=\mathrm{f}(x+g,\, y+h,\, z+k,\, \ldots)$$

en partant de

$$u=\mathrm{f}(x,\, y,\, z,\, \ldots\ldots)\;,$$

il faut prendre une valeur intermédiaire

$$u'=\mathrm{f}(x+\alpha g,\, y+\alpha h,\, z+\alpha k,\, \ldots\ldots)$$

où α est compris entre o et 1. En faisant varier α entre ces limites, on voit qu'à la première, où $\alpha=0$, on a $u'=u$ et qu'à la seconde, où $\alpha=1$, on a $u'=U$.

Cela posé, si l'on considère la quantité

$$\frac{U-u'}{1-\alpha}=\frac{f(x+g,y+h,z+k,.....)-f(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,.....)}{1-\alpha},$$

qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand $\alpha=1$, on verra aisément que cette quantité ne peut, en général, devenir nulle ni infinie pour cette valeur de α; car, d'après le théorème sur le rapport des accroissemens d'une variable indépendante et d'une de ses fonctions, on a

$$\frac{f(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,....)-f(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,.....)}{1-\alpha}$$

$$=g[f'_x(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,.....)+\eta_1],$$

$$\frac{f(x+g,y+h,z+\alpha k,.....)-f(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,......)}{1-\alpha}$$

$$=h[f'_y(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,.....)+\eta_2],$$

$$\frac{f(x+g,y+h,z+k,......)-f(x+g,y+h,z+\alpha k,.....)}{1-\alpha}$$

$$=k[f'_z(x+g,y+h,z+\alpha k,.....)+\eta_3],$$

. . . .

et par conséquent, en ajoutant et réduisant,

$$\frac{f(x+g,y+h,z+k,.....)-f(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,.....)}{1-\alpha}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} g f'_x(x+\alpha g,y+\alpha h,z+\alpha k,.....)\\ +h f'_y(x+g,y+\alpha h,z+\alpha k,........)\\ +k f'_z(x+g,y+h,z+\alpha k,........)\\ +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}\right\}+g\eta_1+h\eta_2+k\eta_3+......$$

Quand $\alpha=1$, les quantités ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ... deviennent nulles, avec les accroissemens $g-\alpha g$, $h-\alpha h$, $k-\alpha k$, ... et l'on a

$$\frac{U-u'}{1-\alpha}=\left\{\begin{array}{l} g\mathrm{f}'_x(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots) \\ +h\mathrm{f}'_y(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots) \\ +k\mathrm{f}'_z(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

qui, d'après le théorème cité, ne peut être, en général, ni nulle ni infinie. Ainsi la quantité

$$\frac{U-u'}{1-\alpha}$$

est une fonction de α qui ne devient ni o ni ∞ quand elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En la désignant par P, nous aurons

$$\frac{U-u}{1-\alpha}=P\ , \quad \text{ou} \quad U=u'+(1-\alpha)P\ ;$$

U conservant la même valeur quelle que soit celle qu'on donne à α et u', et P variant avec α.

En différentiant successivement par rapport à α, on obtient cette suite d'équations

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}+(1-\alpha)\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha}-P=0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}+(1-\alpha)\ \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\alpha^2}-2\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha}=0\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3}+(1-\alpha)\ \frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}\alpha^2}-3\ \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\alpha^2}=0\ ,$$

. . . .

$$\frac{\mathrm{d}^n u'}{\mathrm{d}\alpha^n}+(1-\alpha)\frac{\mathrm{d}^n P}{\mathrm{d}\alpha^n}-n\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}=0\,;$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}
P&=\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{1-\alpha}{1}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha}\,,\\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha}&=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\alpha^2}\,,\\
\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\alpha^2}&=\frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3}+\frac{1-\alpha}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}\alpha^3}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\mathrm{d}^{n-1}P}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}&=\frac{1}{n}\,\frac{\mathrm{d}^nu'}{\mathrm{d}\alpha^n}+\frac{1-\alpha}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}^nP}{\mathrm{d}\alpha^n}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
U&=u'+(1-\alpha)P\\
&=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha}\\
&=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\,\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2}\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\alpha^2}\\
&=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\,\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2.3}\,\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3}+\frac{(1-\alpha)^4}{1.2.3}\,\frac{\mathrm{d}^3P}{\mathrm{d}\alpha^3}\,,
\end{aligned}$$

et, en général

$$\left.\begin{aligned}U=u'&+\frac{(1-\alpha)}{1}\;\frac{du'}{d\alpha}\\&+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\;\frac{d^2u'}{d\alpha^2}\\&+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2.3}\;\frac{d^3u'}{d\alpha^3}\\&+\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{(1-\alpha)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\;\frac{d^{n-1}u'}{d\alpha^{n-1}}\\&+\frac{(1-\alpha)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\;\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}\end{aligned}\right\}\ (B)$$

formule qui se continue indéfiniment, suivant la même loi; car, en la supposant vérifiée pour tous les termes qui précèdent le reste $\frac{(1-\alpha)^n}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}$, il suffira d'y substituer au lieu de $\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}$ la valeur (A) pour obtenir

$$U=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}\;\frac{du'}{d\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}\;\frac{d^2u'}{d\alpha^2}+\frac{(1-\alpha)^3}{1.2.3}\;\frac{d^3u'}{d\alpha^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(1-\alpha)^n}{1.2\ldots n}\;\frac{d^nu'}{d\alpha^n}+\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n}\;\frac{d^nP}{d\alpha^n}\ ,$$

qui est la même formule pour un terme de plus; en sorte qu'étant vraie pour n termes, elle l'est aussi pour $n+1$, puis, par la même raison, pour $n+2$ termes et ainsi de suite.

Comme nous n'avons fait varier que α, dans

$$u'=f(x+\alpha g, y+\alpha h, z+\alpha k, \ldots)\ ,$$

pour en déduire

$$\frac{du'}{d\alpha}\,,\quad \frac{d^2u'}{d\alpha^2}\,,\quad \frac{d^3u'}{d\alpha^3}\,,\ldots\ldots\ \frac{d^nu'}{d\alpha^n}\,,$$

et que cette fonction est composée en $x+\alpha g$, $y+\alpha h$, $z+\alpha k$, ... comme la fonction donnée u l'est en x, y, z, ...; il sera aisé de calculer ces dérivées successives par les règles ordinaires du calcul différentiel. En effet, en différentiant $u=\mathrm{f}(x, y, z, \ldots)$ relativement à toutes les variables x, y, z, ... qui y sont contenues, en regardant à chaque différentiation successive, dx, dy, dz, ... comme des constantes ; on aura, pour ses différentielles des divers ordres, des fonctions de x, y, z, ... dx, dy, dz, ... qu'on pourra représenter par

$$du=\mathrm{f}_1(x, y, z, \ldots\ldots\ dx, dy, dz)\,,$$

$$d^2u=\mathrm{f}_2(x, y, z, \ldots\ldots\ dx, dy, dz)\,,$$

$$d^3u=\mathrm{f}_3(x, y, z, \ldots\ldots\ dx, dy, dz)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

en se rappelant que dx, dy, dz, ... se trouvent à une seule dimension dans tous les termes de f_1, à deux dans tous les termes de f_2, à trois dans tous les termes de f_3 et ainsi de suite ; les fonctions de x, y, z, ... qui entrent dans les mêmes termes étant les dérivées partielles de u, qui ne sont susceptibles, en général, de devenir ni nulles ni infinies.

Cela posé, si l'on fait

$$x+\alpha g=x'\,,\quad y+\alpha h=y'\,,\quad z+\alpha k=z'\,,\ldots\ldots,$$

on aura

$$u'=\mathrm{f}(x', y', z', \ldots\ldots\ldots\ldots)\,,$$

$$\mathrm{d}u'=\mathrm{f}_1(x',y',z',\ldots\ldots\mathrm{d}x',\mathrm{d}y',\mathrm{d}z'\ldots\ldots)\ ,$$

$$\mathrm{d}^2u'=\mathrm{f}_2(x',y',z',\ldots\ldots\mathrm{d}x',\mathrm{d}y',\mathrm{d}z'\ldots\ldots)\ ,$$

$$\mathrm{d}^3u'=\mathrm{f}_3(x',y',z',\ldots\ldots\mathrm{d}x',\mathrm{d}y',\mathrm{d}z'\ldots\ldots)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour avoir les valeurs de ces différentielles de u', quand on n'y fait varier que α, il suffira de substituer, dans les équations précédentes, les valeurs de $\mathrm{d}x'$, $\mathrm{d}y'$, $\mathrm{d}z'$, ... relatives à cette hypothèse, qui sont

$$\mathrm{d}x'=g\mathrm{d}\alpha\ ,\quad \mathrm{d}y'=h\mathrm{d}\alpha\ ,\quad \mathrm{d}z'=k\mathrm{d}\alpha\ ,\ \ldots;$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\alpha=\mathrm{f}_1(z',y',z',\ldots\ldots g\mathrm{d}\alpha,h\mathrm{d}\alpha,k\mathrm{d}\alpha,\ldots\ldots)\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}\alpha^2}\mathrm{d}\alpha^2=\mathrm{f}_2(x',y',z',\ldots\ldots g\mathrm{d}\alpha,h\mathrm{d}\alpha,k\mathrm{d}\alpha,\ldots\ldots)\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3u'}{\mathrm{d}\alpha^3}\mathrm{d}\alpha^3=\mathrm{f}_3(x',y',z',\ldots\ldots g\mathrm{d}\alpha,h\mathrm{d}\alpha,k\mathrm{d}\alpha,\ldots\ldots)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le nombre des dimensions de $\mathrm{d}\alpha$, dans les seconds membres étant le même que celui des dimensions de $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, ... dans les différentielles successives de u ; c'est-à-dire, 1 pour la première, 2 pour la seconde, 3 pour la troisième et ainsi de suite ; d'où il résulte que $\mathrm{d}\alpha$ disparaîtra de ces seconds membres en divisant la première par $\mathrm{d}\alpha$, la seconde par $\mathrm{d}\alpha^2$, la troisième par $\mathrm{d}\alpha^3$ et ainsi de suite, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{du'}{d\alpha}=f_1(x',y',z',\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots\ldots)\ ,\\[2ex]
\dfrac{d^2u'}{d\alpha^2}=f_2(x',y',z',\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,\\[2ex]
\dfrac{d^3u'}{d\alpha^3}=f_3(x',y',z',\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\\[2ex]
\dfrac{d^nu'}{d\alpha^n}=f_n(x',y',z',\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots\ldots)\ ,
\end{array}\right\}\ (C)$$

et conséquemment

$$U=u'+\frac{(1-\alpha)}{1}f_1(x',y',z',\ldots g,h,k,\ldots)+\frac{(1-\alpha)^2}{1.2}f_2(x',y',z',\ldots g,h,k,\ldots)$$

$$+\ldots\ldots+\frac{(1-\alpha)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f_{n-1}(x',y',z',\ldots g,h,k,\ldots)+\frac{(1-\alpha)^n}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}\ .$$

Faisant alors $\alpha=1$, il viendra

$$U=u+\frac{f_1(x,y,z,\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1}+\frac{f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2}+\ldots$$

$$+\frac{f^{n-1}(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)\ ;$$

en désignant par $\dfrac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)$ ce que devient $\dfrac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}$, quand on y fait $\alpha=0$.

On formera immédiatement les quantités

$$f_1(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,$$

$$f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$f_{n-1}(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)\ ,$$

en calculant les différentielles successives de u, et en y remplaçant les différentielles $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, ... des variables indépendantes par les accroissemens finis g, h, k, ... des mêmes variables.

On sait, qu'on peut considérer, en général, la différentielle d'une fonction, non comme une quantité infiniment petite, mais comme la portion de l'accroissement de cette fonction dont les différens termes croissent proportionnellement aux accroissemens des variables indépendantes, et dont le rapport à l'accroissement total de la fonction ne diffère de l'unité que d'une quantité qui devient plus petite que toute grandeur donnée quand les accroissemens le deviennent eux-mêmes.

D'après cette définition, il est évident que la distinction à faire entre les différentielles et les accroissemens entiers n'a lieu qu'à l'égard des fonctions, et que, pour les variables indépendantes, ce sont ces accroissemens entiers qui satisfont aux conditions prescrites dans la définition et qui doivent être considérées comme les différentielles des variables indépendantes ; en sorte qu'alors $g=\mathrm{d}x$, $h=\mathrm{d}y$, $k=\mathrm{d}z$, ... ; d'où il suit que

$$f_1(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)=\mathrm{d}u\ ,$$

$$f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)=\mathrm{d}^2u\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$f_{n-1}(x,y,z,\ldots g,h,k,\ldots)=\mathrm{d}^{n-1}u\ ;$$

au moyen de quoi la précédente formule peut être écrite ainsi :

$$U=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\ldots+\frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0).$$

C'est sous cette forme qu'elle se trouve dans divers ouvrages, et en particulier dans ceux de M. Lacroix (*Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, 3.me édition, page 56).

Le calcul différentiel fait donc connaître immédiatement la valeur de tous les termes qui, dans la formule

$$U=u+\frac{f_1(x,y,z,\ldots g,h,k,\ldots)}{1}+\frac{f_2(x,y,z,\ldots g,h,k,\ldots)}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{f_{n-1}(x,y,z,\ldots g,h,k,\ldots)}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0),$$

précèdent le dernier $\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)$; mais celui-ci ne peut être calculé de la même manière, puisque $P=\frac{U-u'}{1-\alpha}$ contient U, qui est précisément la quantité inconnue dont on cherche la valeur. Il faut donc négliger ce dernier terme et se contenter de calculer les précédens qui donnent, en général, une valeur d'autant plus approchée de U que le nombre de ces termes est plus grand.

Mais, si l'on ne peut pas déterminer la valeur de $\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)$, on peut du moins, par le calcul différentiel, assigner immédiatement deux limites entre lesquelles cette quantité, c'est-à-dire, l'erreur que l'on commet en négligeant ce terme est nécessairement comprise.

Il faut partir, pour cela, d'un théorème connu, savoir: que, si $v=F(\alpha)$ est une fonction de α et que $\frac{dv}{d\alpha}$ soit toujours de même signe, depuis $\alpha=a$ jusqu'à $\alpha=b$, la fonction

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

aura aussi le même signe. Posant

$$v=F(\alpha)=\left(C-\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}\right)(1-\alpha)^n,$$

C sera une constante qu'on déterminera de manière à donner les limites cherchées. Prenant ensuite, pour les deux limites a et b, $\alpha=0$, $\alpha=1$, en sorte que $b-a=1$, on aura $F(b)=0$, puisque le premier terme $C(1-\alpha)^n$ de $F(b)$ s'évanouit quand $\alpha=1$, et qu'en vertu de l'équation (B) on a pour le second

$$\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(1-\alpha)^n=1.2.3....(n-1)(U-u')-2.3.4...(n-1)\frac{du'}{d\alpha}(1-\alpha)$$

$$-3.4.5......(n-1)\frac{d^2u'}{d\alpha^2}(1-\alpha)^2-......-\frac{d^{n-1}u'}{d\alpha^{n-1}}(1-\alpha)^{n-1},$$

qui s'évanouit aussi, pour la même valeur de α, parce qu'elle donne $u'=U$ et que les quantités $\frac{du'}{d\alpha}$, $\frac{d^2u'}{d\alpha^2}$, ... $\frac{d^{n-1}u}{d\alpha^{n-1}}$, ne peuvent, en général, devenir infinies pour $\alpha=1$. On a ensuite, pour $\alpha=0$,

$$F(a)=F(0)=C-\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0);$$

donc

$$\frac{F(b)-F(a)}{a-b}=\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0),$$

d'ailleurs, d'après les équations (A) et (C),

$$\frac{dv}{d\alpha}=n\left(\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}-C\right)(1-\alpha)^{n-1}-\frac{d^nP}{d\alpha^n}(1-\alpha)^n$$

$$=\left\{n\,\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}-\frac{d^nP}{d\alpha^n}(1-\alpha)-nC\right\}(1-\alpha)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{d^nu'}{d\alpha^n}-C\right)(1-\alpha)^{n-1}=\{f_n(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots)-C\}(1-\alpha)^{n-1}.$$

Si donc on prend alternativement pour nC la plus grande et la plus petite valeur que prend

$$f_n(x',y',z',\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)$$

calculée immédiatement par n différentiations,

depuis $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, ...;
jusqu'a $x'=x+g$, $y'=y+h$, $z'=z+k$, ... ;

c'est-à-dire, depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=1$, et qu'on désigne ces deux valeurs par M et m, $\frac{dv}{d\alpha}$ sera constamment négatif, dans cet intervalle, quand on prendra $C=\frac{M}{n}$, et toujours positif, dans le même intervalle, quand on fera $C=\frac{m}{n}$; on aura donc, en vertu du théorème que nous venons de citer,

$$\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)-\frac{M}{n}\text{ négatif et }\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)-\frac{m}{n}\text{ positif ;}$$

d'où il suit que $\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}$ est compris entre la plus grande et la plus petite valeur que peut prendre $\frac{f_n(x,y,z,\ldots\ldots)}{n}$ dans le même intervalle, et que l'erreur que l'on commet en négligeant

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)\ ,$$

dans la formule trouvée plus haut, est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de

$$\frac{f_n(x,y,z,\ldots\ldots)}{n},$$

lorsqu'on y donne à x, y, z, ... toutes les valeurs comprises entre x et $x+g$, y et $y+h$, z et $z+k$, ...

En admettant, comme cela a nécessairement lieu pour toute fonction continue, que $f_n(x,y,z,\ldots\ldots)$ croisse par degrés insensibles, avec $x,y,z,\ldots\ldots$, il est évident que, pour de certaines valeurs de $x,y,z,\ldots\ldots$, comprises entre ces limites, elle prendra une valeur égale à $\frac{d^{n-1}P}{d\alpha^{n-1}}(0)$; et, comme en désignant par ξ, η, ζ, ... des nombres indéterminés, compris entre 0 et 1, on peut toujours représenter cette valeur par

$$\frac{f(x+\xi g,y+\eta h,z+\varrho k,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{n};$$

on aura exactement

$$f(x+g,y+h,z+k,\ldots\ldots)=f(x,y,z,\ldots\ldots)+\frac{f_1(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1}$$
$$+\frac{f_2(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{f_{n-1}(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{f_n(x+\xi g,y+\eta h,z+\varrho k,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

dont le dernier terme est précisément ce que devient le premier

$$\frac{f_n(x,y,z,\ldots\ldots g,h,k,\ldots\ldots)}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

de ceux qu'on supprime, quand on arrête la série au terme précédent, lorsqu'on y substitue $x+\xi g$, $y+\eta h$, $z+\zeta k$, ... au lieu de x, y, z, ...