ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SARRUS

Gnomonique. Note sur le tracé graphique des cadrans solaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 257-262
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__257_0>

GNOMONIQUE.

Note sur le tracé graphique des cadrans solaires ;

Par M. Sarrus, docteur agrégé ès sciences.

A la page 219 du XV.e volume du présent recueil, nous avons indiqué une méthode graphique fort simple pour tracer des cadrans solaires sur toutes sortes de surfaces planes, inclinées et déclinantes, sans qu'on ait aucun besoin de déterminer à l'avance l'inclinaison et la déclinaison du plan sur lequel on opère, ni même de connaître la latitude du lieu pour lequel le cadran est destiné.

En réfléchissant de nouveau sur ce sujet, il nous a paru que notre procédé, déjà si simple, était encore susceptible de quelques simplifications assez notables, soit sous le point de vue théorique, soit sous le point de vue pratique ; et c'est à les faire connaître que nous consacrons cette note.

Nous rappellerons d'abord que, dans tout cadran solaire du genre de ceux dont il est question ici, les heures sont indiquées par la coïncidence de l'ombre solaire d'une verge rectiligne, parallèle à l'axe de la terre et pouvant, à raison de l'extrême distance du soleil, être réputée l'axe même de son mouvement diurne apparent, avec une suite de droites concourant en un même point. Ces droites sont ce qu'on appelle les *lignes horaires ;* leur point de concours est le *centre du cadran* ; et la verge rectiligne dont l'ombre indique les heures et qui perce le cadran à son centre, en est dite l'*axe* ou le *style*. On appelle *soustylaire* la projection orthogonale du style sur le plan du cadran.

Quelquefois on remplace le style par une plaque métallique circulaire, percée à son centre d'un petit trou et fixée solidement en avant du cadran, dont le centre est alors le point où ce cadran serait percé par la parallèle à l'axe du monde conduite par le centre du trou de la plaque. C'est alors la coïncidence successive de l'extrémité du rayon solaire qui passe par le trou avec les lignes horaires qui indique les heures. Nous supposerons même, dans tout ce qui va suivre, qu'il en est ainsi, parce qu'en effet, c'est par là qu'il convient de commencer; sauf ensuite, quand on a déterminé le centre du cadran, à remplacer la plaque par un style dirigé de ce centre au centre du trou de cette plaque. Nous supposons, en outre, qu'on a déterminé à l'avance la projection orthogonale du centre du trou de la plaque sur le plan du cadran. Cette projection sera un point de la soustylaire, laquelle doit passer en outre par le centre du cadran.

Nous avons ici deux objets à nous proposer, savoir: 1.° la détermination du centre du cadran, qui entraîne celle de la soustylaire; 2.° le tracé de la méridienne et par suite celui des autres lignes horaires.

En faisant abstraction du changement journalier en déclinaison, ou du moins en choisissant une époque de l'année pour laquelle ce changement est insensible dans l'intervalle d'un jour, le soleil décrit chaque jour un parallèle à l'équateur céleste; et par conséquent le rayon solaire mobile qui passe par le trou de la plaque et que nous supposons réduit à une ligne droite mathématique, trace dans l'espace une surface conique de révolution, dont les deux nappes ont pour sommet commun le centre du trou de la plaque. L'axe du double cône, coïncidant avec l'axe de l'équateur céleste, est aussi l'axe du cadran, qui a conséquemment pour centre le point où son plan est percé par cet axe.

Si, à deux époques quelconques d'un même jour, on marque, sur le plan du cadran, deux images du trou de la plaque, les droites qui joindront les centres de ces images au centre du trou seront deux arêtes du cône ; de sorte que le plan perpendiculaire au leur qui passera par la droite qui divise leur angle en deux parties égales contiendra l'axe du cône, et par suite le centre du cadran qui est un point de cet axe. La trace de ce plan sur le plan du cadran contiendra donc aussi le centre cherché.

Si, au lieu de deux images du trou de la plaque, on en a marqué trois, on aura trois arètes du cône qui, combinées deux à deux, détermineront trois plans se coupant suivant son axe ; les traces de ces trois plans sur celui du cadran devront donc concourir en un même point qui en sera le centre. Voyons donc comment ces traces pourront être déterminées par une construction plane.

A une même distance quelconque du sommet du cône, soient pris trois points sur les arêtes dont il vient d'être question, et considérons ces points comme les centres de trois sphères égales, d'un rayon arbitraire, assez grand toutefois pour qu'elles se coupent deux à deux et qu'il en soit de même de leurs traces sur le plan du cadran ; les plans radicaux de ces trois sphères seront visiblement les trois plans que nous avons dit contenir l'axe du cône, qui en sera ainsi l'axe radical (*) ; d'où il suit que le centre du cadran ne sera autre que le centre radical des traces de ces trois sphères sur ce plan, lesquelles traces sont très-faciles à déterminer. Or, de là résulte la construction suivante :

Soient O (fig. 1) la projection orthogonale sur le plan du cadran, du centre du trou de la plaque et P, P′, P″ trois images

(*) Voy. la page 378 du précédent volume.

de ce trou sur le même plan. A OP, OP′, OP″, soient élevées en O des perpendiculaires OS, OS′, OS″, d'une longueur commune égale à la hauteur perpendiculaire du centre du trou de la plaque au-dessus du plan du cadran, soient menées SP, S′P′, S″P″, sur lesquelles soient prises les longueurs égales arbitraires SA, S′A′, S″A″. Des points A, A′, A″, comme centres et avec un même rayon arbitraire suffisamment grand, soient décrits des arcs coupant respectivement OP, OP′, OP″, en E et F, E′ et F′, E″ et F″. Sur EF, E′F′, E″F″ comme diamètres soient décrits trois cercles se coupant deux à deux en G et H, G′ et H′, G″ et H″; leurs axes radicaux GH, G′H′, G″H″, se couperont en C, centre radical de ces trois cercles et conséquemment centre du cadran, dont OC sera ainsi la soustylaire.

On sait, en outre que si, du centre du trou de la plaque, on fait descendre un fil à plomb, jusqu'au plan du cadran, le point où ce fil le rencontrera sera un point de la méridienne ou ligne de midi; et, comme cette ligne doit d'ailleurs passer par le centre du cadran, elle sera tout-à-fait déterminée.

Nous avons donné, dans notre premier article, pour déterminer les autres lignes horaires la méthode que l'on rencontre dans la plupart des traités de gnomonique; en observant, toutefois, que souvent elle exige qu'on opère sur le prolongement du plan du cadran. A la vérité, nous avons observé qu'on pourrait parer à cet inconvénient; mais le moyen que nous avons indiqué pour cela ajouterait à la complication du procédé. Il est une autre manière de parvenir au but qui n'est point sujette à cette inconvénient, et qui n'étend jamais les constructions au-delà de l'espace que le cadran doit embrasser. Elle est fondée sur un lemme qui ne paraît pas être connu, et que nous allons d'abord démontrer.

Soit AB (fig. 2) une corde quelconque d'un cercle et DE un diamètre perpendiculaire sur son milieu F. Par l'un quelconque G des points de l'arc DBE et par le point F soit menée une droite rencontrant de nouveau la circonférence en H. Soit menée DH, coupant AB en K, puis EK rencontrant de nouveau la circonférence en L; il arrivera alors que les angles DEL et DHG seront égaux et qu'ainsi les arcs DAL et DBG, dont les moitiés servent de mesure à ces angles seront aussi égaux. En effet, si l'on mène la corde EH, à cause des deux triangles rectangles KHE et KFE, dont KE est l'hypothénuse commune, le quadrilatère EF, HK sera inscriptible à un cercle ayant KE pour diamètre; d'où il suit que les angles FEK et DHF mesurés par la moitié du même arc de ce cercle, sont égaux.

Donc, réciproquement, si, ayant pris les arcs DBG et DAL égaux entre eux, on mène GH, DH et EL; le point d'intersection K des deux dernières droites sera situé sur AB. Si donc on a besoin de mener par le point E une droite faisant avec EF un angle donné, puis du point D une droite au point K où celle-là rencontre AB, on pourra, au lieu de cela, prendre un arc DBG, double de celui qui mesurerait l'angle donné, mener ensuite GF rencontrant de nouveau la circonférence en H; et alors DH sera la droite cherchée. Or, on conçoit que, si l'angle donné différait peu d'un angle droit, le point K pourrait se trouver fort loin, sur le prolongement de AB, tandis que, par le dernier procédé, la construction ne sort jamais du cercle dont DE est le diamètre.

Voici donc, d'après ces remarques, à quoi se réduit le tracé des lignes horaires. Soient, comme dans notre premier article, C (fig. 3) le centre du cadran, O la projection sur son plan du centre du trou de la plaque et conséquemment CO la direction de la soustylaire. Soit élevée à CO au point O la perpendiculaire OΣ, égale à la hauteur du centre du trou de la plaque au-dessus du plan du cadran. Soit menée CΣ et par le point Σ à cette droite la perpendiculaire ΣT, coupant en T le prolongement de CO. Soit prolongée CT, au-delà de T, d'une quantité Tσ égale à TΣ; sur Cσ, comme diamètre, soit décrite une circonférence, et soit enfin menée, par le point T, l'équinoxiale GH, perpendiculaire à ce diamètre.

Soit CM la ligne du midi, que nous avons enseigné à déterminer ci-dessus, coupant l'équinoxiale en M'. Soit menée σM', coupant de nouveau la circonférence en m, et soit pris l'arc Co égal à Cm. Soit divisée la circonférence, à partir du point o, en douze parties égales, aux points o, 1, 2, 3,....9, 10, 11. Alors pour construire, par exemple, la ligne de neuf heures, on joindra le point 9 au point T, par une droite rencontrant de nouveau la circonférence en n et la droite Cn sera la ligne cherchée.

En traduisant en analyse les diverses constructions que nous venons d'indiquer, on obtiendrait vraisemblablement les formules trigonométriques les plus simples, pour le calcul des cadrans solaires sur toutes sortes de plans.