
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

N. H. ABEL

Algèbre élémentaire. Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 204-213

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__204_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1826-1827, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

*Recherche de la quantité qui satisfait à la fois
à deux équations algébriques données ;*

Par M. N. H. ABEL. (*Norvégien.*)

~~~~~

LORSQU'UNE quantité satisfait, à la fois, à deux équations algébriques données, ces deux équations ont un facteur commun du premier degré. En supposant qu'elles n'ont pas d'autre facteur commun que celui-là, on peut toujours, comme l'on sait, exprimer rationnellement l'inconnue en fonction des coefficients des deux équations. On y parvient d'ordinaire à l'aide de l'élimination ; mais je vais faire voir, dans ce qui va suivre, que, dans tous les cas, on peut calculer immédiatement la valeur de l'inconnue, ou, plus généralement encore, la valeur d'une fonction rationnelle quelconque de cette inconnue.

Soient

$$\varphi(y) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_{m-1} y^{m-1} + y^m = 0, \quad (1)$$

$$\psi(y) = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \dots + q_{m-1} y^{m-1} + y^n = 0, \quad (2)$$

les deux équations proposées, la première du  $m.$ <sup>ème</sup> et l'autre du  $n.$ <sup>ème</sup> degré.

Désignons les  $n$  racines de (2) par  $y, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$  en les substituant tour-à-tour dans (1), on aura les  $n$  fonctions

$$\varphi(y), \quad \varphi(y_1), \quad \varphi(y_2), \dots \varphi(y_{n-1}). \tag{3}$$

Soient

$$\begin{aligned}
 &R = \varphi(y_1) \cdot \varphi(y_2) \cdot \varphi(y_3) \dots \dots \varphi(y_{n-2}) \cdot \varphi(y_{n-1}), \\
 &R_1 = \varphi(y) \cdot \varphi(y_2) \cdot \varphi(y_3) \dots \dots \varphi(y_{n-2}) \cdot \varphi(y_{n-1}), \\
 &R_2 = \varphi(y) \cdot \varphi(y_1) \cdot \varphi(y_3) \dots \dots \varphi(y_{n-2}) \cdot \varphi(y_{n-1}), \\
 &\dots \dots \dots \\
 &R_{n-2} = \varphi(y) \cdot \varphi(y_1) \cdot \varphi(y_2) \dots \dots \varphi(y_{n-3}) \cdot \varphi(y_{n-1}), \\
 &R_{n-1} = \varphi(y) \cdot \varphi(y_1) \cdot \varphi(y_2) \dots \dots \varphi(y_{n-3}) \cdot \varphi(y_{n-2}).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Cela posé, soit  $f(y)$  la fonction rationnelle de  $y$  dont on veut déterminer la valeur, et désignons par  $\theta(y)$  une autre fonction rationnelle quelconque de  $y$ . On aura l'équation identique

$$f(y) \cdot \theta(y) \cdot R = f(y) \cdot \theta(y) \cdot R. \tag{5}$$

Maintenant, ayant  $\varphi(y) = 0$ , on aura

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0, \dots \dots R_{n-1} = 0,$$

et, par suite,

$$tR + t_1R_1 + t_2R_2 + t_3R_3 + \dots \dots + t_{n-2}R_{n-2} + t_{n-1}R_{n-1} = tR;$$

où  $t, t_1, t_2, \dots t_{n-2}, t_{n-1}$  sont des quantités quelconques.

En faisant donc d'abord

$$t = \theta(y) , \quad t_1 = \theta(y_1) , \quad t_2 = \theta(y_2) , \quad \dots \quad t_{n-1} = \theta(y_{n-1}) ,$$

et ensuite

$$t = f(y) \cdot \theta(y) , \quad t_1 = f(y_1) \cdot \theta(y_1) , \quad t_2 = f(y_2) \cdot \theta(y_2) , \quad \dots \quad t_{n-1} = f(y_{n-1}) \cdot \theta(y_{n-1})$$

on obtiendra les deux équations

$$\left. \begin{aligned} \theta(y)R &= \theta(y)R + \theta(y_1)R_1 + \theta(y_2)R_2 + \dots + \theta(y_{n-1})R_{n-1} , \\ f(y) \cdot \theta(y) \cdot R &= f(y_1) \cdot \theta(y_1) \cdot R_1 + f(y_2) \cdot \theta(y_2) \cdot R_2 + \dots + f(y_{n-1}) \cdot \theta(y_{n-1}) \cdot R_{n-1} ; \end{aligned} \right\} (6)$$

par là, l'équation (5) deviendra

$$\begin{aligned} & f(y) \{ \theta(y)R + \theta(y_1)R_1 + \theta(y_2)R_2 + \dots + \theta(y_{n-1})R_{n-1} \} \\ &= \theta(y) \cdot f(y)R + \theta(y_1) \cdot f(y_1)R_1 + \theta(y_2) \cdot f(y_2)R_2 + \dots + \theta(y_{n-1}) \cdot f(y_{n-1})R_{n-1} ; \end{aligned}$$

équation qui, en posant, pour abrégé,

$$\left. \begin{aligned} \theta(y)R + \theta(y_1)R_1 + \theta(y_2)R_2 + \dots + \theta(y_{n-1})R_{n-1} &= \Sigma \theta(y)R , \\ f(y)\theta(y)R + f(y_1)\theta(y_1)R_1 + f(y_2)\theta(y_2)R_2 + \dots + f(y_{n-1})\theta(y_{n-1})R_{n-1} &= \Sigma f(y)\theta(y)R , \end{aligned} \right\} (7)$$

deviendra

$$f(y) \cdot \Sigma \theta(y)R = \Sigma f(y) \cdot \theta(y) \cdot R ,$$

et de là

$$f(y) = \frac{\Sigma f(y)\theta(y)R}{\Sigma \theta(y)R} . \quad (8)$$

Maintenant, il est clair que le numérateur et le dénominateur de cette valeur de  $f(y)$  sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines  $y, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ ; on peut donc, en vertu des

formules connues, les exprimer rationnellement par les coefficients des équations (1) et (2). Il en est donc de même de la fonction  $f(y)$

La fonction rationnelle  $\theta(y)$  étant arbitraire, on peut en disposer pour simplifier l'expression de  $f(y)$ . Pour cela, soit

$$f(y) = \frac{F(y)}{\chi(y)},$$

où  $F(y)$  et  $\chi(y)$  sont deux fonctions entières; on aura, en substituant,

$$\frac{F(y)}{\chi(y)} = \frac{\sum \frac{F(y)\theta(y)R}{\chi(y)}}{\sum \theta(y)R};$$

Si donc on suppose  $\theta(y) = \chi(y)$ , on aura

$$\frac{F(y)}{\chi(y)} = \frac{\sum F(y)R}{\sum \chi(y)R}; \quad (9)$$

et alors le numérateur et le dénominateur de cette fonction seront des fonctions entières des coefficients des équations proposées.

Si  $\chi(y) = 1$ , on aura, pour une fonction entière quelconque  $F(y)$ ,

$$F(y) = \frac{\sum F(y)R}{\sum R}; \quad (10)$$

ou bien

$$F(y) = \frac{F(y)R + F(y_1)R_1 + F(y_2)R_2 + \dots + F(y_{n-1})R_{n-1}}{R + R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1}}.$$

Mais on peut encore simplifier beaucoup l'expression de  $F(y)$  de la manière suivante :

Désignons par  $\psi'(y)$  la dérivée de  $\psi(y)$ , par rapport à  $y$ , et faisons

$$\theta(y) = \frac{1}{\psi'(y)} ;$$

l'équation (8) donnera

$$F(y) = \frac{\sum \frac{F(y)R}{\psi'(y)}}{\sum \frac{R}{\psi'(y)}} . \quad (11)$$

Cela posé, on peut d'abord exprimer  $R$  par une fonction entière de  $y$ . En effet, si l'on fait

$$(z-y_1)(z-y_2)\dots(z-y_{n-1}) = z^{n-1} + \nu_{n-2}z^{n-2} + \nu_{n-3}z^{n-3} + \dots + \nu_0 = 0 ;$$

on peut transformer  $R$ , qui est une fonction entière et symétrique de  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ , en fonction entière des coefficients  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-2}$ .

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} (\nu_0 + \nu_1 z + \nu_2 z^2 + \dots + \nu_{n-2} z^{n-2} + z^{n-1})(z-y) &= q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_{n-1} z^{n-1} + z^n \\ &= z^n + (\nu_{n-2} - y)z^{n-1} + (\nu_{n-3} - y\nu_{n-2} + y^2)z^{n-2} + (\nu_{n-4} - y\nu_{n-3} + y^2\nu_{n-2} - y^3)z^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

donc

$$\nu_{n-2} = q_{n-1} + y ,$$

$$\nu_{n-3} = q_{n-2} + y\nu_{n-2} - y^2 ,$$

$$\nu_{n-4} = q_{n-3} + y\nu_{n-3} - y^2\nu_{n-2} + y^3 ,$$

.....

d'où il suit que  $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-2}$  sont des fonctions entières de  $y$ ; la fonction  $R$  l'est donc aussi; elle est donc de la forme

$$R = \rho_0 + \rho_1 y + \rho_2 y^2 + \rho_3 y^3 + \dots + \rho_n y^n ; \quad (12)$$

où il est évident que  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  seront des fonctions entières des coefficients des équations (1) et (2).

La fonction  $R$  sera d'un degré supérieur à  $n-1$  ; mais, il est clair qu'on peut, en vertu de l'équation (2), en éliminer toutes les puissances de  $y$  supérieures à la  $(n-1)^{ème}$ , et de cette manière mettre  $R$  sous la forme

$$R = \rho_0 + \rho_1 y + \rho_2 y^2 + \rho_3 y^3 + \dots + \rho_{n-1} y^{n-1} ,$$

où  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$  sont toujours des fonctions entières de  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ .

En multipliant  $R$  par la fonction entière  $F(y)$  on aura la fonction  $F(y)R$ , qui est de même une fonction entière de  $y$ . On peut donc la mettre sous la même forme que  $R$ , c'est-à-dire, qu'on peut poser

$$F(y).R = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \dots + t_{n-1} y^{n-1} ; \quad (13)$$

$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  étant encore des fonctions entières de  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ .

Dès que  $R$  sera déterminé par l'équation (12), il est clair qu'on aura

$$R_1 = \rho_0 + \rho_1 y_1 + \rho_2 y_1^2 + \rho_3 y_1^3 + \dots + \rho_{n-1} y_1^{n-1} ,$$

$$R_2 = \rho_0 + \rho_1 y_2 + \rho_2 y_2^2 + \rho_3 y_2^3 + \dots + \rho_{n-1} y_2^{n-1} ,$$

.....

$$R_{u-1} = \rho_0 + \rho_1 y_{u-1} + \rho_2 y_{u-1}^2 + \rho_3 y_{u-1}^3 + \dots + \rho_{n-1} y_{u-1}^{n-1} .$$

On aura de même

$$F(y_1)R_1 = t_0 + t_1 y_1 + t_2 y_1^2 + t_3 y_1^3 + \dots + t_{n-1} y_1^{n-1} ;$$

$$F(y_2)R_2 = t_0 + t_1 y_2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_2^3 + \dots + t_{n-1} y_2^{n-1} ,$$

$$\dots ,$$

$$F(y_{n-1})R_{n-1} = t_0 + t_1 y_{n-1} + t_2 y_{n-1}^2 + t_3 y_{n-1}^3 + \dots + t_{n-1} y_{n-1}^{n-1} .$$

Maintenant, je dis qu'on aura

$$F(y) = \frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}} ;$$

En effet, on a d'abord

$$\Sigma \frac{R}{\psi'(y)} = \frac{R}{\psi'(y)} + \frac{R_1}{\psi'(y_1)} + \frac{R_2}{\psi'(y_2)} + \dots + \frac{R_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} ;$$

donc, en substituant les valeurs de  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , ...,  $R_{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{R}{\psi'(y)} &= \rho_0 \left\{ \frac{1}{\psi'(y)} + \frac{1}{\psi'(y_1)} + \frac{1}{\psi'(y_2)} + \dots + \frac{1}{\psi'(y_{n-1})} \right\} \\ &+ \rho_1 \left\{ \frac{y}{\psi'(y)} + \frac{y_1}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2}{\psi'(y_2)} + \dots + \frac{y_{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} \right\} \\ &+ \rho_2 \left\{ \frac{y^2}{\psi'(y)} + \frac{y_1^2}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2^2}{\psi'(y_2)} + \dots + \frac{y_{n-1}^2}{\psi'(y_{n-1})} \right\} \\ &+ \dots \\ &+ \rho_{n-1} \left\{ \frac{y^{n-1}}{\psi'(y)} + \frac{y_1^{n-1}}{\psi'(y_1)} + \frac{y_2^{n-1}}{\psi'(y_2)} + \dots + \frac{y_{n-1}^{n-1}}{\psi'(y_{n-1})} \right\} . \end{aligned}$$

Or,  $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , ...,  $y_{n-1}$ , étant les racines de l'équation (2) on a



$$\begin{aligned} \psi'(y) &= (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\dots(y-y_{n-1}) , \\ \psi'(y_1) &= (y_1-y)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\dots(y_1-y_{n-1}) ; \\ \psi'(y_2) &= (y_2-y)(y_2-y_1)(y_2-y_3)\dots(y_2-y_{n-1}) , \\ &\dots\dots\dots ; \\ \psi'(y_{n-1}) &= (y_{n-1}-y)(y_{n-1}-y_1)(y_{n-1}-y_2)\dots(y_{n-1}-y_{n-2}) ; \end{aligned}$$

donc, d'après une formule connue, les coefficients de  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ , dans l'expression de  $\sum \frac{R}{\psi'(y)}$ , s'évanouiront tous, excepté celui de  $\mu_{n-1}$ , qui se réduira à l'unité; on aura donc

$$\sum \frac{R}{\psi'(y)} = \rho_{n-1} .$$

On prouvera exactement de la même manière que

$$\sum \frac{R.F(y)}{\psi'(y)} = t_{n-1} ;$$

donc, en vertu de l'équation (11),

$$F(y) = \frac{t_{n-1}}{\rho_{n-1}} ;$$

ou bien, en écrivant  $t$  et  $\rho$ , au lieu de  $t_{n-1}$  et  $\rho_{n-1}$ ,

$$F(y) = \frac{t}{\rho} . \tag{14}$$

Soit maintenant  $F'(y)$  une autre fonction entière de  $y$ ; en supposant

$$F'(y)R = t'y^{n-1} + t'_{n-2}y^{n-2} + t'_{n-3}y^{n-3} + \dots + t'_1y + t'_0, \quad (15)$$

$t', t'_{n-1}, t'_{n-2}, \dots, t'_0$  étant des fonctions entières des quantités  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ , on aura

$$F'(y) = \frac{t'}{f}; \quad (16)$$

d'où, en comparant (14) à (16)

$$\frac{F(y)}{F'(y)} = \frac{t}{t'}. \quad (17)$$

Ainsi, on aura la valeur d'une fonction rationnelle quelconque  $\frac{F(y)}{F'(y)}$ , par le développement des deux fonctions

$$F(y)R \quad \text{et} \quad F'(y)R.$$

La formule (17) peut facilement être traduite en théorème.

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche uniquement la valeur de  $y$ . Alors on a

$$y = \frac{t}{t'}$$

où

$$R = \rho y^{n-1} + \rho' y^{n-2} + \dots \quad \text{et} \quad Ry = t y^{n-1} + t' y^{n-2} + \dots$$

On peut exprimer  $t$  en  $\rho$  et  $\rho'$ . En effet, en substituant la valeur de  $R$ , il viendra

$$Ry = \rho y^n + \rho' y^{n-1} + \dots;$$

or, en vertu de l'équation (2), on a

$$y^n = -q_{n-1}y^{n-1} - q_{n-2}y^{n-2} - \dots ;$$

donc, en substituant

$$Ry = (\rho' - \rho q_{n-1})y^{n-1} + \dots ;$$

Dans le développement de  $Ry$ , le coefficient de  $y^{n-1}$  est donc

$$\rho' - \rho q_{n-1} = t ;$$

donc

$$y = \frac{\rho' - \rho q_{n-1}}{\rho}$$

ou bien

$$y = -q_{n-1} + \frac{\rho'}{\rho} . \quad (18)$$

De cette manière, on n'a besoin de connaître que les coefficients de  $y^{n-1}$  et  $y^{n-2}$  dans le développement de

$$R = \rho y^{n-1} + \rho' y^{n-2} + \dots = \varphi(y_1) \varphi(y_2) \varphi(y_3) \dots \varphi(y_{n-1}) .$$

Paris, le 2 novembre 1826.

---