ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Questions résolues. Solution des deux premiers problèmes de géométrie proposés à la page 327 du précedent volume. Solution du premier problème

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 159-165

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__159_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des deux premiers problèmes de géométrie proposés à la page 327 du précedent volume.

Solution du premier problème ;

Par M. VALLÈS, élève à l'Ecole polytechnique.

PROBLÈME. *Un fil parfaitement flexible et inextensible est appliqué sur la surface d'un cône droit, de manière à suivre exactement les circonvolutions d'une spirale conique qui s'y trouve tracée, et à se terminer au sommet du cône. On suppose que l'on développe ce fil, en le tenant constamment tangent à la spirale, et on demande quelle courbe décrira son extrémité dans l'espace?*

Solution. Le fil, en se développant, décrit dans l'espace une surface développable dont la spirale conique est l'arête de rebroussement; et la courbe demandée se trouve tracée sur cette surface, dont l'équation peut conséquemment être prise pour l'une des équations de cette courbe. Cherchons d'abord cette équation.

Soit pris le sommet du cône pour origine des coordonnées rectangulaires et son axe pour axe des z positifs. Disposons de plus le plan des xz de telle sorte qu'il soit tangent à la spirale à son origine. Comme il a été prouvé (*Annales*, tom. XVI, pag. 167) que la projection de cette courbe sur le plan des xy est une spirale d'Archimède, en appelant α l'angle générateur du cône et représentant par a une longueur donnée, si (t, u, v) est un quelconque des points de la spirale conique, on aura

$$t^2+u^2=v^2\text{Tang.}^2\alpha \qquad (1)$$

$$a\text{Arc.}\left(\text{Tang.}\frac{u}{t}\right)=\sqrt{t^2+u^2}=v\text{Tang.}\alpha$$

ou bien

$$\frac{u}{t}=\text{Tang.}\frac{v\text{Tang}\,\alpha}{a} \qquad (2)$$

équations d'où on tirera

$$t=v\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right), \quad u=v\text{Tang}\,\alpha\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right); \quad (3)$$

et ensuite, par différentiation

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}&=\left\{\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)-\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Sin}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang.}\alpha,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}&=\left\{\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)+\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang.}\alpha.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mais si (x, y, z) est un quelconque des points de la tangente à la spirale conique au point (t, u, v), on devra avoir, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{x-t}{z-v}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{y-u}{z-v}, \qquad (5)$$

ou bien, en mettant pour t et u leurs valeurs (3)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}&=\frac{x-v\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)}{z-v},\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}&=\frac{y-v\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)}{z-v};\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

égalant donc respectivement ces valeurs aux valeurs (4) il viendra, en réduisant,

$$\left.\begin{aligned}&\left\{z\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)-(z-v).\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang}\,\alpha=x,\\ &\left\{z\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)+(z-v).\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)\right\}\text{Tang}\,\alpha=y\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

l'élimination de v entre ces deux équations conduira à l'équation en x, y, z de la surface cherchée.

Pour l'obtenir facilement, prenons la somme des quarrés de ces deux équations ; nous aurons ainsi

$$\left\{z^2+v^2(z-v)^2\frac{\text{Tang.}^2\alpha}{a^2}\right\}\text{Tang.}^2\alpha=x^2+y^2\;;$$

ou bien

$$v^2(z-v)^2\text{Tang.}^4\alpha=a^2(x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha)\;;$$

d'où, en extrayant la racine quarrée

$$v(z-v)\text{Tang.}^2\alpha=-a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}\,.\qquad(8)$$

Nous donnons le signe $-$ au second membre attendu que, lorsque $z=0$, le premier devient essentiellement négatif.

Cette équation (8), résolue par rapport à v donne

$$\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}=\frac{z\text{Tang.}\alpha\pm\sqrt{z^2\text{Tang.}^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}}}{2a}\,.$$

On levera l'ambiguïté du signe du radical, en observant que la spirale conique étant sur la surface cherchée, il faut qu'en supposant $x=t$, $y=u$, $z=v$, ce qui donne $x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha=0$, les deux membres deviennent identiquement les mêmes, ce qui exige qu'on adopte le signe supérieur. On a donc simplement

$$\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}=\frac{z\text{Tang.}\alpha+\sqrt{z^2\text{Tang.}^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}}}{2a}\,. \quad (9)$$

On pourrait substituer immédiatement cette valeur dans l'une ou l'autre des équations (7); mais en prenant la somme de leurs produits respectifs par $\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)$ et $\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)$, on parvient à l'équation plus simple

$$\frac{x}{z\text{Tang.}\alpha}\text{Cos.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)+\frac{y}{z\text{Tang.}\alpha}\text{Sin.}\left(\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}\right)=1\,, \quad (10)$$

dans laquelle mettant pour $\frac{v\text{Tang.}\alpha}{a}$ sa valeur (9) on a, pour l'équation de la surface développable dont la spirale conique est l'arête de rebroussement.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{z\text{Tang.}\alpha}\text{Cos.}\left\{\frac{z\text{Tang.}\alpha+\sqrt{z^2\text{Tang.}^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}}}{2a}\right\}\\+&\frac{y}{z\text{Tang.}\alpha}\text{Sin.}\left\{\frac{z\text{Tang.}+\alpha\sqrt{z^2\text{Tang.}^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang.}^2\alpha}}}{2a}\right\}\end{aligned}\right\}=1\,. \quad (11)$$

Si l'on veut savoir suivant quelle courbe cette surface est coupée par le plan des xy, il suffira de faire dans son équation $z=0$; elle deviendra ainsi

$$x\text{Cos.}\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}+y\text{Sin.}\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}=0 ,$$

ce qui donne

$$\frac{x}{y}=-\text{Tang.}\frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}} \text{ ou } \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{\sqrt{a}}=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=-\frac{x}{y}\right)$$

ou encore

$$\sqrt{x^2+y^2}=+a\left\{\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{x}{y}\right)\right\}^2 ; \qquad (12)$$

ainsi cette courbe est une spirale dans laquelle les rayons vecteurs sont proportionnels aux quarrés des angles que forme leur direction avec l'axe des x.

Pour achever de résoudre le problème il nous faut une nouvelle équation de la courbe demandée; mais, comme cette courbe est décrite par l'extrémité du fil, il nous faudra avoir égard à sa longueur, prise de cette extrémité jusqu'à son point de contact avec le cône. Or, cette longueur est égale à celle de la portion de spirale comprise depuis le même point jusqu'au sommet; il nous faut donc préalablement obtenir cette dernière longueur.

En prenant la somme des quarrés des équations (4) on trouve

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=\left\{1+\frac{\varphi^2\text{Tang.}^2\alpha}{a^2}\right\}\text{Tang.}^2\alpha ;$$

d'où

$$\frac{ds}{dv}=\sqrt{1+\left(\frac{dt}{dv}\right)^2+\left(\frac{du}{dv}\right)^2}=\sqrt{1+\text{Tang.}^2\alpha+\frac{v^2\text{Tang.}^4\alpha}{a^2}}\,.$$

En posant, pour abréger,

$$a=b\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Tang.}\alpha\,,$$

cette expression deviendra

$$\frac{ds}{dv}=\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\,; \qquad (13)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$s=\frac{b}{2\text{Cos.}\alpha}\left\{\frac{v}{b}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}+\text{Log.}\left(\frac{v}{b}+\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\right)\right\}. \qquad (14)$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce que cette intégrale est nulle en même temps que v, ainsi que cela doit être.

Cela posé, on doit avoir

$$s=\sqrt{(x-t)^2+(y-u)^2+(z-v)^2}\,,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (5)

$$s=(z-v)\sqrt{1+\left(\frac{dt}{dv}\right)^2+\left(\frac{du}{dv}\right)^2}=(z-v)\frac{ds}{dv}\,;$$

ou enfin, par la formule (13)

$$s=\frac{z-v}{\text{Cos.}\alpha}\sqrt{1+\frac{v^2}{b^2}}\,;$$

donc (14)

$$\frac{2(z-\rho)}{b}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}=\frac{\rho}{b}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}+\text{Log}\left(\frac{\rho}{b}+\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}\right),$$

ou encore

$$\frac{2z-3\rho}{b}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}=\text{Log}.\left(\frac{\rho}{b}+\sqrt{1+\frac{\rho^2}{b^2}}\right); \quad (15)$$

équation dans laquelle il n'est plus question que de substituer pour ρ sa valeur (9)

$$\rho=\frac{z\text{Tang}.\alpha+\sqrt{z^2\text{Tang}.^2\alpha+4a\sqrt{x^2+y^2-z^2\text{Tang}.^2\alpha}}}{2\text{Tang}.\alpha},$$

pour obtenir la deuxième équation de la courbe cherchée.

Concevons que, sur la surface du cône on trace une infinité de spirales coniques, en faisant varier la valeur de la constante a ; chacune d'elles, par son développement, donnera naissance à une courbe à double courbure, de la nature de celle qui est demandée. L'ensemble de ces courbes formera une certaine surface dont on obtiendra l'équation en éliminant a ou b des deux équations de la courbe demandée, après avoir amené ces deux équations, au moyen de la relation.

$$a=b\text{Sin}.\alpha\text{Tang}.\alpha ;$$

à ne plus contenir que l'une ou l'autre de ces deux constantes.