ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Géométrie élémentaire. Essai de démonstration du postulatum XI des élémens d'Euclide

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 152-155
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__152_1>

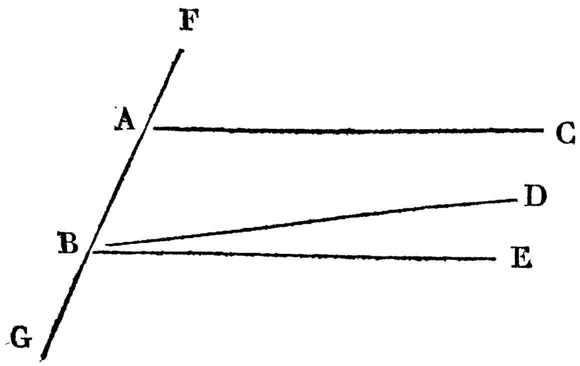
GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Essai de démonstration du Postulatum XI *des Élémens d'Euclide ;*

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du Génie, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

THÉORÈME. *Deux droites, suffisamment prolongées, se coupent nécessairement, lorsqu'elles font avec une troisième droite* *des angles internes d'un même côté dont la somme est moindre que deux angles droits.*

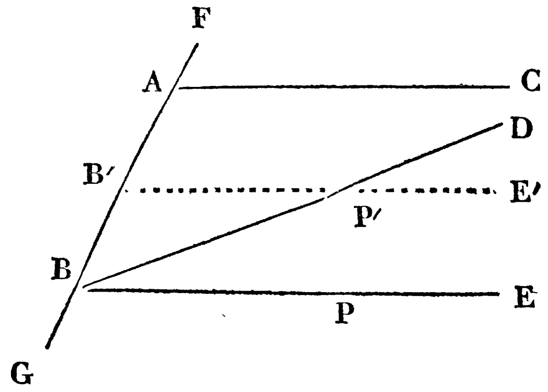
Démonstration. Soient les deux droites AC et BD, faisant avec FG deux angles internes d'un même côté CAB et DBA moindres ensemble que deux droits; il s'agit de prouver que ces droites AC et BD doivent se couper à une distance finie de FG.



Soit menée BE, faisant avec FG l'angle EBG = CAB. Puisque DBA+CAB est moindre que deux droits, DBA+EBG sera aussi moindre que deux droits, et conséquemment moindre que DBA +DBG; donc EBG sera moindre que DBG, c'est-à-dire, que BE, quelque loin qu'on la prolonge, sera entièrement comprise dans la région indéfinie DBG.

Concevons présentement que l'on fasse mouvoir l'angle EBG, sur le plan de la figure, de telle sorte que son côté BG ne quitte pas la droite FG et que son sommet B marche vers A. Lorsqu'enfin le point B aura atteint le point A, à cause de l'égalité des angles EBG et CAB, BE coïncidera avec AC.

Si donc l'on nie que AC coupe BD, il faudra admettre que BE, qui était d'abord toute entière dans la région indéfinie DBG, a passé, toute entière, dans la région indéfinie DBF.



Un quelconque P des points de BE se trouve avant le mouvement dans la région DBG, et doit ensuite, dans l'hypothèse que l'on prétend admettre, se trouver dans la région DBF, lorsque BE coïncidera avec AC. Quelle que soit donc la route suivie par ce point P dans le mouvement, puisqu'il aura passé d'un côté à l'autre de BD, il aura dû, tout au moins pour une position intermédiaire de BE, se trouver sur cette droite BD. Soit B′E′ cette position, et soit P′ la position correspondante du point P.

B′E′ ne coïncide pas alors avec BE, puisque le point B′ n'appartient pas à cette droite; donc B′E′ n'a que le seul point P′ de commun avec BD; d'où il suit que ces deux droites se coupent en P′, et que conséquemment B′E′, considérée comme droite indéfinie, se trouve partagée en P′ en deux parties dont l'une est toute entière d'un côté de BD, considérée aussi comme droite indéfinie, tandis que l'autre est toute entière de l'autre côté de cette droite. Donc, dans cette position intermédiaire, B′E′ n'est pas encore située toute entière dans la région FBD, qui est toute d'un même côté de BD.

En supposant que le mouvement continue; tant que B′E′ n'aura qu'un seul point P′ commun avec BE, on prouvera de même que cette droite n'est point toute entière dans la région FBD; puis donc qu'on admet que cette droite finit par être située toute entière dans cette région, il faut qu'il y ait un moment où D′E′ ait deux points communs avec BD ; mais alors elle devra coïncider avec cette droite, ce qui exigera que l'angle E′B′G soit égal à DBG, tandis que nous avons prouvé qu'il est plus petit ; ou, si l'on aime mieux, le point B′ coïnciderait avec le point B, de telle sorte que l'angle EBG n'aurait pas encore changé de place et que BE n'aurait de commun avec BD que ce seul point B. Donc AC ne saurait être entièrement contenue dans la région DBF, et doit conséquemment couper BD en quelque point.