ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

THOMAS DE ST-LAURENT

Optique. Recherche de l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 17 (1826-1827), p. 128-134
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1826-1827__17__128_0>

OPTIQUE.

Recherche de l'équation générale de la caustique par réflexion relative au cercle ;

Par M. Thomas de St-Laurent, officier au Corps royal d'Etat-Major.

Dans un précédent article (*), nous avons donné l'équation de la caustique par réflexion relative au cercle pour deux cas particuliers, savoir : 1.° pour le cas où le point rayonnant est sur la circonférence même du cercle réfléchissant ; 2.° pour le cas où ce point est infiniment éloigné. Nous allons présentement chercher l'équation de cette caustique pour un point lumineux situé d'une manière quelconque sur le plan du cercle réfléchissant, en nous efforçant de conserver constamment à nos calculs et à leurs résultats cette symétrie si propre à en garantir l'exactitude.

En prenant le centre du cercle réfléchissant pour origine des coordonnées rectangulaires, soient r le rayon de ce cercle, (a,b) le point rayonnant, (t,u) un point d'incidence quelconque et (x,y) le point correspondant de la caustique cherchée, c'est-à-dire, le point où elle est touchée par le rayon réfléchi ; nous aurons d'abord

$$t^2+u^2=r^2 . \qquad (1)$$

(*) Voy. la première page du présent volume.

J. D. G.

Le rayon incident, la normale au point d'incidence et le rayon réfléchi feront avec l'axe des x des angles dont les tangentes tabulaires seront respectivement

$$\frac{b-u}{a-t}\,, \qquad \frac{t}{u}\,, \qquad \frac{y-u}{x-t}\,;$$

d'où il suit que les tangentes des angles d'incidence et de réflexion seront respectivement

$$\frac{\frac{b-u}{a-t}-\frac{u}{t}}{1+\frac{u}{t}\cdot\frac{b-u}{a-t}}\,, \qquad \frac{\frac{u}{t}-\frac{y-u}{x-t}}{1+\frac{u}{t}\cdot\frac{y-u}{x-t}}$$

ou bien

$$\frac{t(b-u)-u(a-t)}{t(a-t)+u(b-u)}\,, \qquad \frac{u(x-t)-t(y-u)}{t(x-t)+u(y-u)}\,,$$

ou, en développant, réduisant et simplifiant, à l'aide de l'équation (1)

$$\frac{bt-au}{at+bu-r^2}\,, \qquad \frac{ux-ty}{tx+uy-r^2}\,;$$

or, par les lois de la catoptrique, ces deux angles doivent être égaux : égalant donc entre elles leurs expressions il viendra, en chassant les dénominateurs

$$(bt-au)(tx+uy-r^2)+(ty-ux)(at+bu-r^2)=0\,. \qquad (2)$$

C'est donc là l'équation générale du rayon réfléchi, dans laquelle t et u sont deux paramètres variables, liés entre eux par la relation (1), et conséquemment équivalens à un seul.

La caustique cherchée étant l'enveloppe de l'espace parcouru par ce rayon, lorsqu'on fait varier t et u, conformément à la relation (1), on en obtiendra l'équation en éliminant t, u et le rapport de dt à du entre les équations (1), (2) et leurs différentielles, prises par rapport à ces deux paramètres seulement. Or ces différentielles sont

$$t\mathrm{d}t+u\mathrm{d}u=0\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{x(au-bt)-b(tx+uy-r^2)+a(ux-ty)-y(at+bu-r^2)\}\mathrm{d}t\\+\{y(au-bt)+a(tx+uy-r^2)+b(ux-ty+x(at+bu-r^2))\}\mathrm{d}u\end{array}\right\}=0\ ;$$

ce qui donne, en éliminant,

$$(at+bu)(tx+uy-r^2)+(tx+uy)(at+bu-r^2)=2(au-bt)(ux-ty)\ ;\quad(3)$$

de sorte que le problème se réduit présentement à éliminer t et u entre les équations (1), (2), (3). Dans ces équations a et b figurent de la même manière que x et y, et c'est là une chose qu'on pouvait fort bien prévoir à l'avance, puisque les rayons incident et réfléchi peuvent être pris l'un pour l'autre.

Pour des valeurs données de t et u, c'est-à-dire, pour un point d'incidence donné, les équations (2), (3) doivent être satisfaites par le point correspondant de la caustique ; or l'équation (2) est celle du rayon réfléchi, et l'équation (3) est celle d'une autre droite ; c'est donc l'équation d'une droite qui coupe le rayon réfléchi à son point de contact avec la caustique cherchée. Nous ne nous occuperons pas de la construction générale de cette droite, qui serait d'ailleurs susceptible d'une certaine élégance.

Nous remarquerons seulement que, si le rayon incident était tangent au cercle, le point d'incidence serait donné par l'équation (1) combinée avec l'équation $at+bu=r^2$ au moyen de laquelle les équations (2), (3) se réduisant à $tx+uy=r^2$, $ux-ty=0$ qui sont les équations de la tangente et de la normale en ce point, qui serait lui-même conséquemment le point correspondant de la caustique ; et, comme le rayon réfléchi, qui a alors même direction que le rayon incident, doit être tangent à la caustique en ce point ; il s'ensuit que le rayon incident tangent au cercle réfléchissant est aussi tangent à la caustique au même point ; c'est-à-dire que la caustique touche le cercle réfléchissant aux deux points où il est coupé par la polaire du point rayonnant.

En ordonnant les équations (2), (3) par rapport à t et u, on peut leur donner cette forme

$$(t^2-u^2)(ay+bx)-2tu(ax-by)=r^2\{(y+b)t-(x+a)u\}$$

$$4tu(ay+bx)+2(t^2-u^2)(ax-by)=r^2\{(x+a)t+(y+b)u\}$$

en éliminant tour à tour entre elles chacun des deux binômes $ax-by$ et $ay+bx$, on trouvera

$$r^2(ay+bx)=(x+a)u^3+(y+b)t^3\ , \qquad (4)$$

$$2r^2(ax-by)=(x+a)(t^3+3tu^2)-(y+b)(u^3+3t^2u).$$

Ajoutant au quarré de la seconde le quadruple du quarré de la première, en observant que

$$(ay+bx)^2+(ax-by)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ ,$$

on trouvera

$$4r^2(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$$

$$(t^2+u^2)^2\{(x+a)^2(t^2+4u^2)-6(x+a)(y+b)tu+(y+b)^2(u^2+4t^2)\}\ ;$$

ou bien, à cause de l'équation (1)

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(x+a)^2(r^2+3u^2)-6(x+a)(y+b)tu+(y+b)^2(r^2+3t^2)\ ,$$

ou encore

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]=3[(x+a)u-(y+b)t]^2 \text{ , } (5)$$

Si présentement on pose, pour abréger,

$$x+a=rA \text{ , } \quad y+b=rB \text{ , }$$

$$t=rp \text{ , } \quad u=rq \text{ , } \quad ax+by=r^2C \text{ , }$$

$$4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]=3r^4R^2 \text{ , }$$

les équations (1), (4), (5) deviendront

$$p^2+q^2=1 \text{ , } \qquad (6)$$

$$Aq^3+Bp^3=C \text{ , } \qquad (7)$$

$$Aq-Bp=R \text{ ; } \qquad (8)$$

et tout se réduira à éliminer p et q entre elles.

Les équations (6) et (8) donnent

$$q=+\frac{AR\pm B\sqrt{A^2+B^2-R^2}}{A^2+B^2} \text{ . } \quad p=-\frac{BR\mp A\sqrt{A^2+B^2-R^2}}{A^2+B^2} \text{ ; }$$

d'où, en substituant dans (7) et chassant le dénominateur,

$$A\{AR\pm B\sqrt{A^2+B^2-R^2}\}^3-B\{BR\mp A\sqrt{A^2+B^2+R^2}\}^3=C(A^2+B^2)^3 \text{ . }$$

Par l'effet du développement des puissances dans le premier membre et des réductions qui en résultent, l'équation devient divisible par A^2+B^2 et se réduit à

$$\pm AB(A^2+B^2+2R^2)\sqrt{A^2+B^2-R^2}=(A^2+B^2)^2C-(A^2-B^2)R^3 \text{ . }$$

En quarrant, développant et ordonnant par rapport à R, l'équation devient en outre divisible par $(A^2+B^2)^2$ et se réduit à

$$A^2B^2(3R^2+A^2+B^2)=R^6-2(A^2-B^2)CR^3+(A^2+B^2)^2C^2\ ,$$

ou encore

$$A^2B^2(3R^2+A^2+B^2-4C^2)=\{R^3-C(A^2-B^2)\}^2\ .$$

Or, on a

$$3R^2+A^2+B^2-4C^2=\left(2.\frac{ax-by}{r^2}\right)^2\ ;$$

donc, en substituant, extrayant la racine quarrée des deux membres et transposant,

$$R^3=C(A^2-B^2)\pm 2AB.\frac{ax-by}{r^2}\ .$$

Quarrant de nouveau et multipliant par $27r^{12}$, il viendra

$$(3r^4R^2)^3=27r^4\{r^4C(A^2-B^2)\pm 2r^2AB(ax-by)\}^2\ ;$$

remettant enfin pour A, B, C, R leurs valeurs, on aura, pour l'équation de la caustique cherchée

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3$$
$$=27r^4\{(ay+bx)[(x+a)^2-(y+b)^2]\pm 2(x+a)(y+b)(ax-by)\}^2\ .$$

A cause du double signe du second membre, cette équation exprime deux courbes distinctes, et il importe de découvrir laquelle de ces deux courbes est la véritable caustique. Pour y parvenir rappelons-nous ce que nous avons remarqué ci-dessus, que les points où le cercle réfléchissant est coupé par la polaire du point (a,b), sont des points de la courbe : or ces points sont donnés par le système des deux équations

$$x^2+y^2=r^2\ ,\qquad ax+by=r^2\ ,\qquad (9)$$

dont l'une est l'équation du cercle lui-même et l'autre celle de la polaire dont il s'agit; il faudra donc que l'équation de la caustique soit satisfaite par le système de ces deux-là. Si de plus, pour un moment, nous faisons passer l'axe des x par le point rayonnant, ce qui donnera $b=0$, l'équation de la caustique deviendra

$$\{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-r^2(2ax+a^2)\}^3=27r^4a^2y^2[(x+a)^2-y^2\pm 2x(x+a)]^2$$

ou encore

$$\{(4a^2-r^2)(x^2+y^2)-r^2(2ax+a^2)\}^3=27r^4a^2y^2\{(x+a\pm x)^2-(x^2+y^2)\}^2\ ;$$

il faudra donc que cette équation soit satisfaite par ce que deviennent les équations (9) dans la même hypothèse ; c'est-à-dire, qu'elle devra être satisfaite en y remplaçant x^2+y^2 par r^2, ax par r^2, x par $\frac{r^2}{a}$ et y^2 par r^2-x^2 ou $r^2-\frac{r^4}{a^2}$ ou $\frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2}$: or elle devient ainsi, en réduisant et simplifiant,

$$(a^2-r^2)^2=\left\{\frac{a^4+a^2r^2+2r^4\pm 2r^2(a^2+r^2)}{a^2}\right\}^2\ ;$$

équation qui ne peut être satisfaite qu'en prenant le signe inférieur du second membre. La véritable équation de la caustique est donc

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3$$
$$=27r^4\{(ay+bx)[(x+a)^2-(y+b)^2]-2(x+a)(y+b)(ax-by)\}^2\ ,$$

ou en faisant le développement et les réductions dans le second membre,

$$\{4(a^2+b^2)(x^2+y^2)-r^2[(x+a)^2+(y+b)^2]\}^3=27r^4(bx-ay)^2(x^2+y^2-a^2-b^2)^2\ ;$$

équation d'une symétrie parfaite et qui demeure invariablement la même, soit qu'on y permute simultanément a et x avec b et y, soit qu'on y permute simultanément a et b avec x et y.