ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Analise algébrique. Recherches d'analise sur les fonctions, avec application à la démonstration du parallélogramme des forces

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 14 (1823-1824), p. 350-363
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__350_0>

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Recherches d'analise sur les fonctions, avec application à la démonstration du parallélogramme des forces ;

Par un ABONNÉ.

DANS des recherches physico-mathématiques, on rencontre quelquefois des équations de quelqu'une des formes suivantes :

La loi de ces résultats est manifeste : on peut les prolonger en toute sécurité aussi loin qu'on le voudra, et on voit qu'ils donneront, en réduisant,

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} A^2x+4ABx^3+6AC & x^5+8AD & x^7+10AE & x^9+12AF & x^{11}+\ldots. \\ +3B^2 & +8BC & +10BD & +12BE & \\ & & +\ 5C^2 & +12CD & \end{array}$$

$$=1.3Bx+2.5Cx^3+3.7Dx^5+4.9Ex^7+5.11Fx^9+\ldots.$$

En exprimant donc que cette dernière équation a lieu quel que soit x et réduisant, il viendra

$$3B=A^2\ ,$$

$$5C=2AB\ ,$$

$$7D=2AC+B^2\ ,$$

$$9E=2(AD+BC)\ ,$$

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(t+u)\ ,$$

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(tu)\ ,$$

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(t+u)\ ,$$

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(tu)\ ;$$

dans lesquelles la forme de la fonction φ est l'inconnue du problème. Nous allons, dans ce qui va suivre, montrer comment on peut déterminer, pour chaque cas, la nature de la fonction φ ; nous appliquerons ensuite à un exemple les résultats que nous aurons obtenus.

I. Si, dans l'équation

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(t+u)\ , \qquad (1)$$

on change u en $u+v$, elle devient

$$\varphi(t)+\varphi(u+v)=\varphi(t+u+v)\ ;$$

mais, en vertu de la proposée

$$11F=2(AE+BD)+C^2\ ,$$

$$13G=2(AF+BE+CD)\ ,$$

$$15H=2(AG+BF+CE)+D^2\ ,$$

et ainsi de suite, ce qui démontre la loi annoncée.

Ces résultats, auxquels il serait aisé de parvenir, sans rien emprunter du calcul différentiel, peuvent servir de supplément à ce qui a déjà été publié dans ce recueil (tom. III, pag. 344).

J. D. G.

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v) \;;$$

donc, en substituant

$$\varphi(t)+\varphi(u)+(v)=(t+u+v) \;;$$

en supposant ensuite que v se change en $v+x$, on trouvera, par de semblables considérations que

$$\varphi(t)+\varphi(u)+\varphi(v)+\varphi(x)=\varphi(t+u+v+x) \;;$$

et en général

$$\varphi(t)+\varphi(u)+\varphi(v)+\ldots\ldots=\varphi(t+u+v+\ldots\ldots). \qquad (2)$$

Si l'on suppose ensuite toutes les lettres t, u, v, ... égales à t et au nombre de q, cette équation deviendra

$$q.\varphi(t)=\varphi(qt) \qquad (3)$$

où q est un nombre essentiellement entier et positif. On aurait semblablement

$$q.\varphi(u)=\varphi(qu).$$

Dans cette dernière équation, posons $qu=t$; d'où $u=\frac{1}{q}t$; ce qui donnera, en substituant,

$$q.\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\varphi(t) \;,$$

d'où

$$\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\frac{1}{q}\varphi(t) \;;$$

puis, en multipliant les deux membres par p,

$$p.\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\frac{p}{q}\varphi(t). \qquad (4)$$

Mais

Mais si dans l'équation (3) on change q en p, elle devient

$$p.\varphi(t)=\varphi(pt)\ ,$$

puis, en changeant t en $\frac{1}{q}t$,

$$p.\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right)\ ; \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) et (5),

$$\frac{p}{q}\varphi(t)=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right)\ ; \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p, q peuvent être pris aussi grands qu'on voudra, il en résulte que l'équation (3) doit avoir lieu, lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $\frac{p}{q}t=u$, d'où $\frac{p}{q}=\frac{u}{t}$, l'équation (6) deviendra

$$\frac{u}{t}\varphi(t)=\varphi(u)$$

ou bien

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{\varphi(u)}{u}$$

et comme t et u sont supposés deux variables indépendantes, qui ne sauraient généralement être égales entre elles, on doit en conclure

$$\frac{\varphi(t)}{t}=A\ , \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(t)=At\ .$$

A étant une constante.

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement ; il donne en effet

$$\varphi(t)=At\ , \qquad \varphi(u)=Au$$

d'où, en ajoutant,

$$\varphi(t)+\varphi(u)=At+Au=A(t+u)=\varphi(t+u)\ ;$$

comme le veut l'équation proposée.

II. Si, dans l'équation

$$\varphi(t)+\varphi(u)=\varphi(tu)\ , \qquad (1)$$

on change u en uv, puis v en vx, et ainsi de suite ; en développant successivement $\varphi(uv)$, $\varphi(vx)$, ... au moyen de cette même équation, on trouvera généralement

$$\varphi(t)+\varphi(u)+\varphi(v)+.....=\varphi(tuv.....)\ . \qquad (2)$$

Supposant ensuite que les variables t, u, v, ... toutes égales entre elles, sont au nombre de q, on aura

$$q.\varphi(t)=\varphi(t^q)\ ; \qquad (3)$$

et l'on aurait pareillement

$$q.\varphi(u)=\varphi(u^q)\ .$$

Faisant, dans cette dernière équation, $u^q=t$, d'où $u=t^{\frac{1}{q}}$, elle deviendra

$$q.\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\varphi(t),$$

et par suite

$$\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\frac{1}{q}\varphi(t)\ ;$$

puis, en multipliant les deux membres par p,

$$p.\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\frac{p}{q}\varphi(t) . \qquad (4)$$

Mais si, dans l'équation (3), on change q en p, elle devient

$$p.\varphi(t)=\varphi(t^p) ;$$

puis, en changeant t en $t^{\frac{1}{q}}$,

$$p.\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\varphi(t^{\frac{p}{q}}) ; \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) et (5),

$$\frac{p}{q}\varphi(t)=\varphi(t^{\frac{p}{q}}). \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p, q peuvent être pris aussi grands qu'on le voudra, il en résulte que l'équation (3) doit avoir lieu lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également, lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $t^{\frac{p}{q}}=u$, on en tirera $\frac{p}{q}=\frac{\text{Log.}u}{\text{Log.}t}$, et l'équation (6) deviendra

$$\frac{\text{Log.}u}{\text{Log.}t}\varphi(t)=\varphi(u) ,$$

ou bien

$$\frac{\varphi(t)}{\text{Log.}t}=\frac{\varphi(u)}{\text{Log.}u} ;$$

d'où on conclura, comme ci-dessus,

$$\frac{\varphi(t)}{\text{Log.}t}=A , \qquad \text{ou} \qquad \varphi(t)=A\text{Log.}t ;$$

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement ; il donne en effet

$$\varphi(t)=A\text{Log}.t\,, \qquad \varphi(u)=A\text{Log}.u\ ;$$

d'où, en ajoutant

$$\varphi(t)+\varphi(u)=A\text{Log}.t+A\text{Log}.u=A(\text{Log}.t+\text{Log}.u)=A\text{Log}.(tu)=\varphi(tu)\ ,$$

comme le veut l'équation proposée.

III. Si, dans l'équation

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(t+u)\ , \qquad (1)$$

on change, tour-à-tour, u en $u+v$, v en $v+x$, et ainsi de suite, en développant successivement $\varphi(u+v)$, $\varphi(v+x)$, ..., au moyen de cette même équation, on trouvera généralement

$$\varphi(t).\varphi(u).\varphi(v)\ldots\ldots=(t+u+v+\ldots\ldots) \qquad (2)$$

supposant ensuite que les variables t, u, v, ..., toutes égales entre elles, sont au nombre de q, on aura

$$\{\varphi(t)\}=\varphi(qt)\ , \qquad (3)$$

et l'on aurait pareillement

$$\{\varphi(u)\}^q=\varphi(qu)\ .$$

Faisant, dans cette dernière, $qu=t$, d'où $u=\frac{1}{q}t$, elle deviendra

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)\right\}^q=\varphi(t)\ ;$$

et par suite

$$\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)=\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{q}}\ ;$$

puis, en élevant les deux membres à la puissance p,

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)\right\}^p=\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}. \qquad (4)$$

Mais si, dans l'équation (3), on change q en p, elle devient

$$\{\varphi(t)\}^p=\varphi(pt),$$

d'où, en changeant t en $\frac{1}{q}t$,

$$\left\{\varphi\left(\frac{1}{q}t\right)\right\}^p=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right), \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) à (5),

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}=\varphi\left(\frac{p}{q}t\right); \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p et q peuvent être supposés si grands qu'on le voudra, il s'ensuit que l'équation (3) doit avoir lieu, lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également, lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $\frac{p}{q}t=u$ d'où $\frac{p}{q}=\frac{u}{t}$, l'équation (6) deviendra

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{u}{t}}=\varphi(u);$$

ou bien

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{t}}=\{\varphi(u)\}^{\frac{1}{n}};$$

d'où on conclura, comme ci-dessus,

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{t}}=A, \quad \text{ou} \quad \varphi(t)=A^t.$$

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement ; il donne en effet

$$\varphi(t)=A^t\,, \qquad \varphi(u)=A^u\,,$$

d'où, en multipliant,

$$\varphi(t).\varphi(u)=A^t.A^u=A^{t+u}=\varphi(t+u)\ ;$$

comme le veut l'équation proposée.

IV. Si, dans l'équation

$$\varphi(t).\varphi(u)=\varphi(tu)\,, \qquad (1)$$

on change tour-à-tour u en uv, v et vx, et ainsi de suite, en développant successivement $\varphi(uv)$, $\varphi(vx)$, ..., au moyen de cette même équation, on trouvera généralement

$$\varphi(t).\varphi(u).\varphi(v)\ldots\ldots=\varphi(tuv\ldots\ldots). \qquad (2)$$

Supposant ensuite que les variables t, u, v, ..., toutes égales entre elles, sont au nombre de q, on aura

$$\{\varphi(t)\}^q=\varphi(t^q)\ ; \qquad (3)$$

et l'on aurait pareillement

$$\{\varphi(u)\}^q=\varphi(u^q)\ .$$

Faisant, dans cette dernière, $u^q=t$, d'où $u=t^{\frac{1}{q}}$, elle deviendra

$$\{\varphi(t^{\frac{1}{q}})\}^q=\varphi(t)\ ;$$

et par suite

$$\varphi(t^{\frac{1}{q}})=\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{q}}\ ;$$

puis, en élevant les deux nombres à la puissance p,

$$\{\varphi(t^{\frac{1}{q}})\}^p = \{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}}. \qquad (4)$$

Mais si, dans l'équation (3), on change q en p, elle devient

$$\{\varphi(t)\}^p = \varphi(t^p);$$

d'où, en changeant t en $t^{\frac{1}{q}}$,

$$\{\varphi(t^{\frac{1}{q}})\}^p = \varphi(t^{\frac{p}{q}}); \qquad (5)$$

donc, en comparant (4) et (5),

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{p}{q}} = \varphi(t^{\frac{p}{q}}); \qquad (6)$$

et, comme les nombres entiers positifs p et q peuvent être supposés si grands qu'on le voudra, il s'ensuit que l'équation (3) doit avoir lieu lors même que q est incommensurable. Il ne serait pas difficile de prouver qu'elle doit avoir lieu également lorsque q est négatif.

Si présentement on pose $t^{\frac{p}{q}} = u$, d'où $\frac{p}{q} = \frac{\text{Log.}u}{\text{Log.}t}$, l'équation (6) deviendra

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{\text{Log.}u}{\text{Log.}t}} = \varphi(u),$$

ou bien

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{\text{Log.}t}} = \{\varphi(u)\}^{\frac{1}{\text{Log.}u}};$$

d'où on conclura, comme ci-dessus

$$\{\varphi(t)\}^{\frac{1}{\text{Log.}t}} = A, \quad \text{ou} \quad \varphi(t) = A^{\text{Log}\,t};$$

mais on a

$$A^{\mathrm{Log}.t} = t^{\mathrm{Log}.A} = t^{B} \ ,$$

B étant une nouvelle constante, donc finalement

$$\varphi(t) = t^{B} \ .$$

Ce résultat se vérifie d'ailleurs facilement; il donne en effet

$$\varphi(t) = t^{B} \ , \quad \varphi(u) = u^{B} \ ;$$

d'où, en multipliant,

$$\varphi(t) \, . \, \varphi(u) = t^{B} \, . \, u^{B} = (tu)^{B} = \varphi(tu) \ ,$$

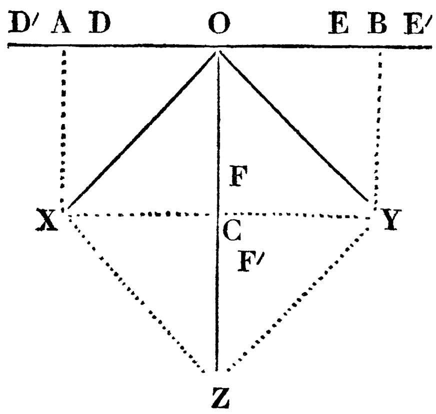
comme le veut l'équation proposée.

Entre autres usages que l'on pourrait faire de ces résultats, nous indiquerons ici l'application ingénieuse que M. Ampère a faite du dernier à la démonstration du parallélogramme des forces. On sait que lorsque deux forces agissent sur un même point, suivant des directions quelconques, elles ont une résultante unique, dirigée vers ce point, comprise dans le plan des composantes et passant dans l'angle que forment leurs directions. Il est de plus manifeste que, si les composantes sont égales, la résultante divisera cet angle en deux parties égales; c'est-à-dire qu'elle sera alors dirigée suivant la diagonale du rhombe construit sur les droites qui représente les composantes en intensité et en direction.

On peut prouver de plus que, lorsque ces composantes égales sont en outre rectangulaires, la diagonale dont il vient d'être question représente la résultante non seulement en direction mais encore en intensité. Cette proposition se déduit d'un raisonnement fort simple que, parce qu'il est peu connu, on sera sans doute bien aise de rencontrer ici.

Si

Si l'on suppose que la résultante de deux forces représentées en intensité et en direction par deux côtés consécutifs d'un carré est représentée en intensité par une longueur plus grande que sa diagonale, il faudra, à l'inverse, qu'une force représentée en intensité et en direction par cette diagonale; décomposée suivant les deux côtés qui la comprennent, ait des composantes représentées en intensité par des droites moins longues que les côtés de ce carré; et au contraire, si la résultante est représentée en intensité par une droite moins longue que la diagonale, une force représentée par cette diagonale aura des composantes représentées en intensité par des droites plus longues que les côtés de ce carré.



Cela posé, soit un carré OXZY, avec ses deux diagonales OZ, XY se coupant en C; et sur ses deux côtés OX, OY, comme diagonales, soient construits les deux autres carrés CA, CB. Supposons que OX, OY représentent les intensités et directions de deux composantes, auquel cas OZ sera la direction de leur résultante. Si l'on suppose que l'intensité de cette résultante soit plus grande que OZ, il faudra d'après cela que les composantes OD, OF de OX, et OE, OF de OY, soient moindres que OA=OC=OB; mais OD et OE se détruisent; donc la résultante unique de OX et

OY se trouverait ainsi représentée par $2OF < OZ$, ce qui est contre l'hypothèse.

Si l'on supposait, au contraire, que la résultante de OX et OY fût moindre que OX, il faudrait que les composantes OD′, OF′ de OX, et OE′, OF′ de OY, fussent plus grandes que $OA = OC = OB$; et comme encore ici OD′ et OE′ se détruisent, la résultante de OX et OY se trouverait être $2OF' > OZ$, ce qui serait également contraire à l'hypothèse.

La résultante de OX et OY, ne pouvant être ainsi ni plus grande ni moindre que OZ, lui sera nécessairement égale, et on aura conséquemment

$$X = Y = \frac{Z}{\sqrt{2}}, \quad \text{Cos.}(X, Z) = \text{Cos.}(Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Soient présentement P', P'' deux forces rectangulaires inégales quelconques, dont la résultante soit P ; et soit $\text{Ang.}(P, P') = \theta$; on devra avoir

$$P = \text{F}(P', P''), \quad \theta = \Phi(P', P'')$$

d'où, par l'élimination de P'',

$$\Phi(P, P', \theta) = 0 ;$$

équation qui doit être de la forme

$$\frac{P'}{P} = \text{f}(\theta),$$

afin que θ ne varie pas, tant que le rapport de P' à P demeurera le même.

Mais, parce que θ est une fonction de $\text{Cos.}\theta$, on pourra à cette équation substituer la suivante

$$\frac{P'}{P} = \varphi(\text{Cos.}\theta),$$

φ étant la caractéristique d'une fonction inconnue qu'il s'agit présentement de déterminer.

Pour y parvenir, considérons trois forces rectangulaires X, Y, Z

agissant sur un même point O. Soient P la résultante partielle de X et Z, Q celle Y et Z, et R la résultante de tout le système ; cette dernière pourra être indifféremment considérée comme la résultante des forces rectangulaires P et Y ou comme la résultante des forces rectangulaires Q et X.

Soient posés

$$\text{Ang.}(P, X) = t, \quad \text{Ang.}(P, R) = u, \quad \text{Ang.}(X, R) = v ;$$

nous aurons, par ce qui précède

$$\frac{X}{P} = \varphi(\text{Cos.}t), \frac{P}{R} = \varphi(\text{Cos.}u), \frac{X}{R} = \varphi(\text{Cos.}v),$$

d'où en comparant le produit des deux premières équations à la troisième

$$\varphi(\text{Cos.}v) = \varphi(\text{Cos.}t) . \varphi(\text{Cos.}u).$$

Mais l'angle trièdre, rectangle suivant la direction de P, dont les deux autres arêtes sont suivant X et R, donne

$$\text{Cos.}v = \text{Cos.}t.\text{Cos.}u$$

d'où

$$\varphi(\text{Cos.}v) = \varphi(\text{Cos.}t.\text{Cos.}u)$$

donc

$$\varphi(\text{Cos.}t) . \varphi(\text{Cos.}u) = \varphi(\text{Cos.}t\text{Cos.}u) ;$$

d'où on tire, par ce que nous avons vu (IV)

$$\varphi(\text{Cos.}t) = \text{Cos.}^{B}t.$$

Donc Z étant la résultante de deux forces rectangulaires X et Y, faisant avec leurs directions des angles α, β, on doit avoir

$$X = Z\text{Cos.}^{B}\alpha, \qquad Y = Z\text{Cos.}^{B}\beta ;$$

d'où

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \{\text{Cos.}^{2B}\alpha + \text{Cos.}^{2B}\beta\} ;$$

mais si l'on suppose $Y = X$, d'où $\text{Cos.}\beta = \text{Cos.}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on doit avoir, comme nous l'avons vu, $2X^2 = Z^2$; donc $B = 1$; donc enfin

$$X = Z\text{Cos.}\alpha, \quad Y = Z\text{Cos.}\beta, \text{ d'où } X^2 + Y^2 = Z^2 .$$