

---

---

# ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURÉS ET APPLIQUÉES.

---

---

ROCHE

**Solution du problème d'analyse transcendante énoncé à la page 128 du présent volume, suivie de la démonstration d'un théorème nouveau**

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 14 (1823-1824), p. 294-302

<[http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1823-1824\\_\\_14\\_\\_294\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1823-1824__14__294_0)>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1823-1824, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

*Solution du problème d'analyse transcendante énoncé à la page 128 du présent volume, suivie de la démonstration d'un théorème nouveau;*

Par M. ROCHE, capitaine d'artillerie de la marine, ancien élève de l'école polytechnique.

*PROBLÈME. Quelle est la forme la plus générale des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme*

$$f(x-\alpha, y-\beta) = 0,$$

*dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  représentent des fonctions déterminées quelconques de la constante arbitraire  $c$ ?*

*Solution.* En supposant tour à tour l'équation intégrale résolue par rapport à  $y-\beta$  et  $x-\alpha$ , on obtiendra des valeurs de cette forme

$$y-\beta = \Phi'(x-\alpha), \quad x-\alpha = \Psi(y-\beta),$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  seront des fonctions déterminées de  $x-\alpha$  et  $y-\beta$ , respectivement. En différentiant ces deux équations, et représentant, à l'ordinaire, par  $p$  le coefficient différentiel de  $y$  et par  $\Phi'$  et  $\Psi'$  les dérivées respectives de  $\Phi$  et  $\Psi$ , on trouvera

$$p = \Phi'(x-\alpha), \quad 1 = p\Psi'(y-\beta),$$

équations qui, résolues, la première par rapport à  $x-\alpha$  et l'autre par rapport à  $y-\beta$ , donneront

$$x-\alpha=\varphi(p), \quad y-\beta=\psi(p),$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  seront également des fonctions déterminées de  $p$ ; et par suite

$$\alpha=x-\varphi(p), \quad \beta=y-\psi(p).$$

Mais  $\alpha$  et  $\beta$  étant des fonctions déterminées de  $c$  sont aussi fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire, qu'il doit exister entre elles une relation déterminée. En supposant donc cette relation exprimée par l'équation

$$F(\alpha, \beta)=0,$$

et substituant, on obtiendra, pour l'équation différentielle demandée

$$F\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\}=0. \quad (\text{I})$$

Mais il est essentiel de remarquer que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  ne sauraient être indépendantes; et rien n'est plus facile que d'assigner la relation qui doit exister entre elles. Si, en effet, on différentie les valeurs de  $x-\alpha$  et  $y-\beta$  trouvées ci-dessus, on aura

$$dx=\varphi'(p).dp, \quad dy=\psi'(p).dp,$$

$\varphi'$  et  $\psi'$  étant les dérivées respectives de  $\varphi$  et  $\psi$ ; or, ces deux équations, divisées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad p=\frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}, \quad \text{c'est-à-dire, } \psi'(p)=p\varphi'(p); \quad (\text{II})$$

relation qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$\psi(p) = \int \varphi'(p) \cdot p dp ,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\psi(p) = p\varphi(p) - \int \varphi(p) \cdot dp . \quad (*)$$

Soit, par exemple, l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 ,$$

dans laquelle on suppose

$$\alpha = \rho \cos c , \quad \beta = \rho \sin c ,$$

$c$  étant la constante arbitraire. En différentiant cette équation, il viendra

$$(x-\alpha) + p(y-\beta) = 0 .$$

En mettant dans la proposée et sa différentielle pour  $\alpha$  et  $\beta$  leurs valeurs en  $c$  et éliminant ensuite  $c$  entre les deux équations résultantes, on aura, toutes réductions faites,

$$(1+p^2)(x^2+y^2+r^2-\rho^2)^2 = 4r^2(y+px)^2 ,$$

équation qui peut être mise sous cette forme

(\*) Ce résultat avait déjà été obtenu par M. Woisard, dans un mémoire qu'à raison de l'abondance des matières nous avons été contraint d'abréger en le publiant.

J. D. G.

$$\left\{x - \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2 + \left\{y - \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}\right\}^2 = r^2,$$

et qui rentre ainsi dans la formule (I). De plus, on a ici

$$\varphi(p) = \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \psi(p) = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}},$$

d'où

$$\varphi'(p) = \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \psi'(p) = \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ce qui vérifie la relation (II).

Au moyen de ce qui précède, on peut aisément démontrer le théorème suivant :

*THÉORÈME.* *Toute équation différentielle de la forme*

$$F\{x - \varphi(p), y - \psi(p)\} = 0,$$

*qui admet une solution particulière, a, par là même, une intégrale de la forme*

$$f(x - \alpha, y - \beta) = 0,$$

*dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions d'une même constante arbitraire.*

*Et réciproquement toute équation différentielle de la première forme, dont l'intégrale est de la seconde, admet par là même une solution particulière.*

*Démonstration.* En effet, 1.º on sait que, pour obtenir la solution particulière d'une équation telle que

$$F\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\} = 0,$$

il faut, après l'avoir différentiée, égaler séparément à zéro et le multiplicateur de  $dp$  et la partie qui en est indépendante. Or, si l'on désigne respectivement par  $P$  et  $Q$  les dérivées du premier membre de cette équation, prises par rapport aux deux binomes  $x-\varphi(p)$ ,  $y-\psi(p)$ , considérés comme deux variables, sa différentielle sera

$$Pdx + Qdy - \{P\varphi'(p) + Q\psi'(p)\} dp = 0;$$

afin donc que cette équation admette une solution particulière, il faudra qu'on ait séparément

$$Pdx + Qdy = 0, \quad P\varphi'(p) + Q\psi'(p) = 0,$$

équations entre lesquelles éliminant le rapport de  $P$  à  $Q$ , on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad p = \frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}, \quad \text{c'est-à-dire}, \quad \varphi'(p) = p\psi'(p),$$

qui est précisément la relation (II), nécessaire pour que l'équation admette une intégrale de la forme

$$f(x-\alpha, y-\beta) = 0;$$

ce qui démontre déjà la première partie de la proposition.

2.<sup>e</sup> Réciproquement, soit

$$f(x-\alpha, y-\beta) = 0,$$

l'intégrale d'une équation différentielle, dans laquelle on suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions d'une même constante  $c$ ; pour avoir la solution particulière de son équation différentielle, il faudra, comme l'on sait, éliminer la constante  $c$  entre cette équation et sa dérivée par rapport à cette lettre; mais, en représentant par  $P_1$  et  $Q_1$  les dérivées de son premier membre, prises par rapport à  $x-\alpha$ ,  $y-\beta$ , considérés comme deux variables la dérivée dont il s'agit sera

$$P_1 dx + Q_1 dy = 0.$$

Si, au contraire, on différentie la proposée par rapport à  $x$  et  $y$  on aura

$$P_1 dx + Q_1 dy = 0;$$

d'où il suit que la différentielle de sa solution particulière sera le résultat de l'élimination de  $c$  entre ces deux dernières. Or, on a vu par le problème précédent que cette différentielle était

$$F\{x-\varphi(p), y-\psi(p)\} = 0.$$

avec la condition

$$\psi'(p') = p\varphi'(p);$$

or, en différentiant de nouveau l'équation différentielle obtenue, on parvient, comme nous l'avons déjà vu, à un résultat de la forme

$$Pdx + Qdy - \{P\varphi'(p) + Q\psi'(p)\}dp = 0;$$

or, si l'on substitue, dans cette dernière équation, pour  $\psi'(p)$  sa valeur  $p\varphi'(p)$ , et pour  $dy$  sa valeur  $pdr$ , on obtiendra

$$(P+pQ)\{dx-dp\varphi'(p)\}=0,$$

équation qui peut être satisfaite en posant

$$P+pQ=0 \quad \text{ou} \quad Pdx+Qdy=0$$

ce qui revient à dire que la différentielle

$$Pdx+Qdy-\{P\varphi'(p)+Q\psi'(p)\}dp=0,$$

en y considérant  $p$  comme une constante, est égale à zéro, ce qui est précisément le caractère des solutions particulières; mais l'équation est aussi satisfaite en posant

$$dx-dp\varphi'(p)=0 \quad \text{d'où} \quad dy=dp.\psi'(p)=0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$x-\alpha=\varphi(p), \quad y-\beta=\psi(p),$$

équations dans lesquelles  $\alpha, \beta$  sont les constantes arbitraires, et qui donnent, par l'élimination de  $p$ ,

$$f(x-\alpha, y-\beta)=0.$$

*Corollaire.* Il résulte de là un moyen facile de ramener l'intégration d'une équation différentielle dans laquelle  $x$  ou  $y$  est donnée en fonction de  $p$ , lorsqu'elle ne peut être résolue par rapport à cette

cette lettre, à l'intégration d'une fonction d'une seule variable, jointe à l'élimination.

Soit, en effet, l'équation proposée

$$x-\alpha=\varphi(p) ;$$

$\frac{dy}{dx}$  sera une fonction de  $x-\alpha$  et conséquemment de  $p$ ; de sorte que l'intégration de cette équation donnera un résultat de la forme

$$y-\beta=\psi(p) ,$$

dans lequel  $\beta$  sera la constante arbitraire. En différentiant ces deux équations et éliminant entre leurs différentielles  $\frac{dp}{dx}$ , on obtiendra comme ci-dessus, l'équation de condition

$$\psi'(p)=p\varphi'(p) ,$$

et la fonction  $\psi$  sera donnée par l'intégration de la fonction  $p\varphi'(p)$ .

Si, au contraire, l'équation proposée est

$$y-\beta=\psi(p) ,$$

en posant

$$x-\alpha=\varphi(p) ,$$

la fonction  $\varphi$  serait donnée, à l'inverse, par l'intégration de la fonction  $\frac{\psi(p)}{p}$ .

Dans l'un et dans l'autre cas, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  étant continues, l'élimination de  $p$  entre les deux équations

## QUESTIONS

$$x - \alpha = \varphi(p) , \quad y - \beta = \psi(p)$$

conduira à l'intégrale cherchée. (\*)

---

---

(\*) M. Woisard, professeur aux écoles d'artillerie à Metz, a aussi donné une solution du problème qui, pour le fond, ne diffère pas de celle qu'on vient de lire.

J. D. G.